УДК 519.2

ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ОБОБЩЕННОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. Ч. II. ЭФФЕКТИВНОСТЬ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ И ОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕДАЧА СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Н.С. Демин*, С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

*Томский политехнический университет
Томский государственный университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Исследуется проблема информационной эффективности и оптимальной передачи стохастических сигналов по непрерывно-дискретным каналам с памятью в совместной задаче фильтрации и экстраполяции. Основные результаты заключаются в получении формул, определяющих эффективную глубину памяти, кодирующие и декодирующие функционалы.

Ключевые слова:
Сигнал, стохастические системы, фильтрация, экстраполяция, количество информации.
Key words:
Signal, stochastic system, filtering, extrapolation, information amount.

1. Введение

Вопрос информационной эффективности каналов передачи при заданной способе передачи и синтеза оптимальных способов передачи являются одними из основных в теории информации и теории передачи сообщений. В данной работе на основе результатов [1] исследуются указанные вопросы в задаче непрерывно-дискретной передачи с памятью стохастических каналов.

2. Информационная эффективность наблюдений с памятью

Представляет интерес вопрос об эффективности наблюдений с памятью в задаче экстраполяции, т. е. увеличивает или уменьшает количество информации наличие памяти. Данное исследование проведем для частного случая скалярных стационарных процессов x_t, z_t, $\eta(t_m)$ определяемых соотношениями

$$dx_t = -ax_t dt + \sqrt{Q}dw_t,\ a>0,$$
$$dz_t = H_0 x_t dt + \sqrt{R}dv_t,$$
$$\eta(t_m) = G_0 x_{t_m} + G_1 x_{\tau_1} + G_2 x_{\tau_2} + \sqrt{V}\xi(t_m), \tag{2.1}$$

В качестве меры информационной эффективности наблюдений с памятью $\eta(t_m)$ относительно наблюдений без памяти $\tilde{\eta}(t_m)$, когда $G_1=0$, $G_2=0$, в задаче экстраполяции в случае $L=1$ может быть взята величина

$$\Delta = \Delta I_s^{t_m}[x_s; z_0^{t_m}, \eta(t_m)] - \Delta\tilde{I}_s^{t_m}[x_s; z_0^{t_m}, \eta(t_m)],$$

где $\Delta I_s^{t_m}[\cdot]$ и $\Delta\tilde{I}_s^{t_m}[\cdot]$ – приращения количества информации из [1] при $L=1$ в моменты времени t_m, поступающие соответственно из наблюдений $\eta(t_m)$ и $\tilde{\eta}(t_m)$. Рассматриваем случай редких дискретных наблюдений. Тогда [2]

$$\Delta = (1/2)\ln[\tilde{\gamma}^{11}(s,t_m)/\gamma^{11}(s,t_m)], \tag{2.2}$$

$$\gamma^{11}(s,t_m) = \gamma^{11}(T) - [d/b], \tag{2.3}$$

$$\tilde{\gamma}^{11}(s,t_m) = \gamma^{11}(T) - [G_0^2(\gamma_0^1(T))^2/(V+G_0^2\gamma)], \tag{2.4}$$

$$d = [G_0\gamma_0^1(T) + G_1\gamma_1^1(t_1^*,T) + G_2\gamma_2^1(t_2^*,T)]^2,$$
$$b = V + G_0^2\gamma + G_1^2\gamma_{11}(t_1^*) + G_2^2\gamma_{22}(t_2^*) + 2G_0G_1\gamma_{01}(t_1^*) + $$
$$+2G_0G_2\gamma_{02}(t_2^*) + 2G_1G_2\gamma_{12}(t_1^*,t_2^*),$$

где γ, $\gamma_{01}(t_1^*)$, $\gamma_{02}(t_2^*)$, $\gamma_{11}(t_1^*)$, $\gamma_{22}(t_2^*)$, $\gamma_{12}(t_1^*,t_2^*)$, $\gamma^{11}(T)$, $\gamma_0^1(T)$, $\gamma_1^1(t_1^*,T)$, $\gamma_2^1(t_2^*,T)$ определены в (3.2) из [2], $t_1^*=t_m-\tau_1$ и $t_2^*=t_m-\tau_2$ являются величинами, характеризующие глубину памяти, $T=s-t_m$ – интервал экстраполяции.

Относительно глубины памяти имеются две крайние ситуации: случай малой глубины, когда $t_1^*\to 0$, $t_2^*\to 0$; случай большой глубины, когда $t_1^*\to\infty$, $t_2^*\to\infty$. Пусть $\Delta_0=\lim\Delta$ при $t_1^*\to 0$, $t_2^*\to 0$ и $\Delta_\infty=\lim\Delta$ при $t_1^*\to\infty$, $t_2^*\to\infty$. Из (2.2)–(2.4) и (3.2) в [2] следует

$$\Delta_0 = (1/2)\ln[(1-\delta_0)^{-1}],\ \Delta_\infty = (1/2)\ln[(1-\delta_\infty)^{-1}], \tag{2.5}$$

$$\delta_0 = \frac{2aV\gamma^2\begin{pmatrix}(G_1+G_2)^2+\\+2G_0(G_1+G_2)\end{pmatrix}\exp\{-2aT\}}{\begin{bmatrix}\left[V+\gamma(G_0+G_1+G_2)^2\right]\times\\ \times\begin{bmatrix}Q(V+\gamma G_0^2)(1-\exp\{-2aT\})+\\+2aV\gamma\exp\{-2aT\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}}, \tag{2.6}$$

$$\delta_\infty = \frac{2a\kappa\gamma^3G_0^2(G_1^2+G_2^2)\exp\{-2aT\}}{\begin{bmatrix}[V+\gamma(G_0^2+\kappa(G_1^2+G_2^2))]\times\\ \times\begin{bmatrix}Q(V+\gamma G_0^2)(1-\exp\{-2aT\})+\\+2aV\gamma\exp\{-2aT\}\end{bmatrix}\end{bmatrix}}, \tag{2.7}$$

где

$$\gamma = (1/\delta)(\lambda-a),\ \delta = H_0^2/R,$$
$$\lambda = \sqrt{a^2+\delta Q},\ \kappa = (\lambda+a)/2\lambda.$$

Исследование поведения Δ как функции глубины памяти t^* для случая $t_1^*=t_2^*=t^*$ дает следующий результат.

Утверждение. Пусть

$$\mathbf{G} = \{(G_0,G_1,G_2):(G_1+G_2)^2+2G_0(G_1+G_2)\le 0\}. \tag{2.8}$$

Если $(G_0,G_1,G_2)\notin\mathbf{G}$, то $\Delta(t^*)$ является монотонно убывающей функцией глубины памяти от значения $\Delta_0>0$ до значения $\Delta_\infty<0$, обращаясь в ноль в точке $t^*=t^*_{eff}$, для которой справедлива формула

$$t^*_{eff} = \\ =\frac{1}{\lambda}\ln\frac{|G_1+G_2|(V+\kappa\gamma G_0^2)}{|G_0|(\sqrt{V^2+\kappa\gamma(G_1+G_2)^2(V+\kappa\gamma G_0^2)}\pm V)}, \quad (2.9)$$

где знак «–», если $G_0(G_1+G_2)=|G_0|\cdot|G_1+G_2|$, и знак «+», если $G_0(G_1+G_2)=-|G_0|\cdot|G_1+G_2|$. Если $(G_0,G_1,G_2)\in\mathbf{G}$, то $\Delta(t^*)\le 0$ для всех $t^*\ge 0$.

Дадим комментарии к полученному результату. Величина $t^*=t^*_{eff}$ может быть определена как эффективная глубина памяти и получена как единственный корень уравнения $\Delta(t^*)=0$, которое имеет вид

$$(G_1+G_2)^2(V+\kappa\gamma G_0^2)\exp\{-2\lambda t^*\}+ \\ +2VG_0(G_1+G_2)\exp\{-\lambda t^*\}- \\ -G_0^2(G_1+G_2)^2\kappa\gamma=0. \quad (2.10)$$

При $t^*<t^*_{eff}$ дискретные наблюдения с памятью являются более эффективными, нежели дискретные наблюдения без памяти, т. к. при этом $\Delta(t^*)>0$ и составляющие $G_1x_{\tau_1}$ и $G_2x_{\tau_2}$ сигнала $\eta(t_m)$ несут дополнительную информацию. При $t^*=t^*_{eff}$ дискретные наблюдения с памятью являются менее эффективными, нежели дискретные наблюдения без памяти, так как при этом $\Delta(t^*)<0$. Данный эффект объясняется тем, что при достаточно большой глубине памяти информационные связи между текущими значениями сигнала x_{t_m} и его прошлыми значениями x_{τ_1} и x_{τ_2} исчезают и составляющие $G_1x_{\tau_1}$ и $G_2x_{\tau_2}$ сигнала $\eta(t_m)$ не несут никакой информации, а действуют как дополнительный шум.

Влияние непрерывных наблюдений на информативность дискретных наблюдений осуществляется через параметр $\delta=H_0^2/R$, который пропорционален отношению сигнал/шум по интенсивности в непрерывном канале наблюдения. При $\delta\to\infty$ получим, что $\Delta I_s^{t_m}[\cdot]\to 0$ и $\Delta\bar{I}_s^{t_m}[\cdot]\to 0$, что дает $\Delta\to 0$. Таким образом, при достижении абсолютно точного измерения в непрерывном канале дискретные наблюдения как с памятью так и без памяти не приносят новой информации о значениях x_S при любых T. При $\delta\to 0$, что соответствует случаю отсутствия непрерывных наблюдений, справедливы формулы (2.2)–(2.9), в которых $\gamma=Q/2a$, $\lambda=a$, $\kappa=1$, т. е. в этом случае появляется явная зависимость t^*_{eff} от времени корреляции $\alpha_k=1/a$ процесса x_t.

3. Оптимальная передача стохастических процессов

В данном пункте для случая непрерывно-дискретной передачи с памятью стохастических сигналов рассматривается решение одной из базовых задач теории информации и теории передачи сообщений [3]. Пусть процессы x_t, z_t, $\eta(t_m)$ являются скалярными процессами (см. (2.1)–(2.3) в [1]) и $N=1$, $f(\cdot)=F(t)x_t$, $\Phi_2(\cdot)=\Phi_2(t)$, $\Phi_3(\cdot)=\Phi_3(t_m)$.

Ставится задача: в классе кодирующих функционалов $\mathrm{K}=\{\mathrm{H}^1;\mathrm{G}\}=\{h(\cdot);g(\cdot)\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$\mathbf{M}\{h^2(t,x_\tau,z)\}\le\tilde{h}(t), \\ \mathbf{M}\{g^2(t_m,x_{t_m},x_\tau,z)\}\le\tilde{g}(t_m), \quad (3.1)$$

найти функционалы $h^0(\cdot)$ и $g^0(\cdot)$, обеспечивающие относительно задачи фильтрации минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t)=\inf\Delta(t)$, где $\Delta(t)=\mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\mu(t)=\mathbf{M}\{x_t|z_0^t,\eta_0^m\}$ процесса x_t. Структура $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ такова, что дискретный канал является каналом с памятью, а непрерывный – каналом с чистым запаздыванием, т. к. в нем передается только прошлое значение x_τ сигнала.

Теорема. На классе $\mathrm{K}_l=\{\mathrm{H}^1_l;\mathrm{G}_l\}$ линейных функционалов

$$\mathrm{H}^1_l=(h(\cdot):h(t,x_\tau,z)=h(t,z)+H_1(t,z)x_\tau\},$$

$$\mathrm{G}_l=\left\{\begin{matrix} g(\cdot):g(t_m,x_{t_m},x_\tau,z)= \\ =g(t_m,z)+G_0(t_m,z)x_{t_m}+G_1(t_m,z)x_\tau \end{matrix}\right\}: \quad (3.2)$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(t,x_\tau,z^0)$, $g^0(t_m,x_{t_m},x_\tau,z^0)$ имеют представления

$$h^0(t,z^0)=-H_1^0(t,z^0)\mu^0(\tau,t), \\ H_1^0(t,z^0)=[\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}, \quad (3.3)$$

$$g^0(t_m,z^0)=-G_0^0(t_m,z^0)\mu^0(t_m-0), \\ G_0^0(t_m,z^0)=[\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}, \\ G_1^0(t_m,z^0)=0, \quad (3.4)$$

и имеет место свойство

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=\sup I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m], \quad (3.5)$$

где sup берется по всем $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathrm{K}_l$ и

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]= \\ =I_\tau^0[\cdot]+(1/2)\sum_{\tau\le t_i\le t}\ln[1+(\tilde{g}(t_i)/V(t_i))]+ \\ +\frac{1}{2}\int_\tau^t\left[\frac{\tilde{h}(\sigma)}{R(\sigma)}\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,\sigma))^2}{\Delta^0(\sigma)\Delta_{01}^0(\tau,\sigma)}\right]- \\ -Q(\sigma)\left(\frac{1}{\Delta^0(\sigma)}-\frac{1}{D(\sigma)}\right)d\sigma, \quad (3.6)$$

$$Q(t)=\Phi_1^2(t),\ R(t)=\Phi_2^2(t),\ V(t_m)=\Phi_3^2(t_m), \\ \mu^0(t)=\mathbf{M}\{x_t\,|(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m\}, \\ \mu^0(\tau,t)=\mathbf{M}\{x_\tau\,|(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m\}, \\ \Delta^0(t)=\mathbf{M}\{[x_t-\mu^0(t)]^2\}, \\ \Delta_{11}^0(\tau,t)=\mathbf{M}\{[x_\tau-\mu^0(\tau,t)]^2\}, \\ \Delta_{01}^0(\tau,t)=\mathbf{M}\{[x_t-\mu^0(t)][x_\tau-\mu^0(\tau,t)]\};$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0;\eta_0(t_m)\}$ определяется соотношениями

$$dz_t^0=[\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}\times \\ \times[x_\tau-\mu^0(\tau,t)]dt+\Phi_2(t)dv_t, \\ \eta^0(t_m)=[\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m-0)]^{1/2}\times \\ \times[x_{t_m}-\mu^0(t_m-0)]dt+\Phi_3(t_m)\xi(t_m); \quad (3.7)$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta^0(t)$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(t) = F(t)\mu^0(t)dt + R^{-1}(t)\left[\frac{\tilde{h}(t)}{\Delta_{11}^0(\tau,t)}\right]^{1/2} \Delta_{01}^0(\tau,t)dz_t^0,$$

$$d\Delta^0(t)/dt = \left(2F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\left[\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t))^2}{\Delta^0(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)}\right]\right)\times \Delta^0(t) + Q(t) \quad (3.8)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m) = \mu^0(t_m - 0) + [\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m - 0)]^{1/2} \times [V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$

$$\Delta^0(t_m) = V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta^0(t_m - 0); \quad (3.9)$$

4) $\mu^0(\tau,t)$, $\Delta_{11}^0(\tau,t)$, $\Delta_{01}^0(\tau,t)$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(\tau,t) = R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2} dz_t^0,$$

$$d\Delta_{11}^0(\tau,t)/dt = -R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau,t), \quad (3.10)$$

$$d\Delta_{01}^0(\tau,t)/dt = [F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta_{01}^0(\tau,t)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(\tau,t_m) = \mu^0(\tau,t_m - 0) + \Delta_{01}^0(\tau,t_m - 0) \times [\tilde{g}(t_m)/\Delta^0(t_m - 0)]^{1/2}[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m),$$

$$\Delta_{11}^0(\tau,t_m - 0) = \Delta_{11}^0(\tau,t_m - 0)\frac{V(t_m)}{V(t_m) + \tilde{g}(t_m)} \times \left[1 + \frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)}\left(1 - \frac{\left(\Delta_{01}^0(\tau,t_m - 0)\right)^2}{\Delta^0(\tau,t_m - 0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m - 0)}\right)\right], \quad (3.11)$$

$$\Delta_{01}^0(\tau,t_m) = V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta_{01}^0(\tau,t_m - 0).$$

Доказательство. При заданных $\{h(\cdot); g(\cdot)\} \in \{H_t^1; G_e\}$ на интервалах времени $t_m \le t < t_{m+1}$

$$\mu(t) = \mathbf{M}\{x_t \,|z_0^t, \eta_0^m\}, \quad \mu(\tau,t) = \mathbf{M}\{x_t \,|z_0^t, \eta_0^m\},$$

$$\gamma(t) = \mathbf{M}\{[x_t - \mu(t)]^2 \,|z_0^t, \eta_0^m\},$$

$$\gamma_{11}(\tau,t) = \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu(\tau,t)]^2 \,|z_0^t, \eta_0^m\},$$

$$\gamma_{01}(\tau,t) = \mathbf{M}\{[x_t - \mu(t)][x_\tau - \mu(\tau,t)] \,|z_0^t, \eta_0^m\}$$

определяются уравнениями [2]

$$d\mu(t) = F(t)\mu(t)dt + R^{-1}(t)H_1(t,z)\gamma_{01}(\tau,t)d\tilde{z}_t, \quad (3.12)$$

$$d\gamma(t)/dt = 2F(t)\gamma(t) - R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\gamma_{01}^2(\tau,t) + Q(t), \quad (3.13)$$

$$d\mu(\tau,t) = R^{-1}(t)H_1(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)d\tilde{z}_t,$$

$$d\gamma_{11}(\tau,t)/dt = -R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\gamma_{11}^2(\tau,t),$$

$$d\gamma_{01}(\tau,t)/dt = [F(t) - R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)]\gamma_{10}(\tau,t) \quad (3.14)$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m) = \mu(t_m - 0) + [G_0(t_m,z)\gamma(t_m - 0) + G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0)] \times W^{-1}(t_m,z)\tilde{\eta}(t_m), \quad (3.15)$$

$$\gamma(t_m) = \gamma(t_m - 0) - [G_0(t_m,z)\gamma(t_m - 0) + G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0)]^2 \times W^{-1}(t_m,z), \quad (3.16)$$

$$\mu(\tau,t_m) = \mu(\tau,t_m - 0) + \begin{bmatrix} G_0(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0) + \\ +G_1(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m - 0) \end{bmatrix} W^{-1}(t_m,z)\tilde{\eta}(t_m),$$

$$\gamma_{11}(\tau,t_m) = \gamma_{11}(\tau,t_m - 0) - \begin{bmatrix} G_0(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0) + \\ +G_1(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m - 0) \end{bmatrix}^2 W^{-1}(t_m,z),$$

$$\gamma_{01}(\tau,t_m) = \gamma_{01}(\tau,t_m - 0) - [G_0(t_m,z)\gamma(t_m - 0) + G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0)] \times \begin{bmatrix} G_0(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0) + \\ +G_1(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m - 0) \end{bmatrix} W^{-1}(t_m,z), \quad (3.17)$$

$$d\tilde{z}_t = dz_t - [h(t,z) + H_1(t,z)\mu(\tau,t)]dt, \quad (3.18)$$

$$\tilde{\eta}(t_m) = \eta(t_m) - \begin{bmatrix} g(t_m,z) + G_0(t_m,z)\mu(t_m - 0) + \\ +G_1(t_m,z)\mu(\tau,t_m - 0) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

$$W(t_m,z) = V(t_m) + G_0^2(t_m,z)\gamma(t_m - 0) + G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(t_m - 0) + 2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\gamma_{01}(t_m - 0). \quad (3.20)$$

Так как $\mathbf{M}\{\cdot\}=\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot|z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\}\}$, то использование (3.2) в (3.1) дает

$$\mathbf{M}\{g^2(\cdot)\} = \mathbf{M}\left\{\begin{bmatrix} g(t_m,z) + G_0(t_m,z)\mu(t_m - 0) + \\ +G_1(t_m,z)\mu(\tau,t_m - 0) \end{bmatrix}^2\right\} + \mathbf{M}\left\{\begin{matrix} G_0^2(t_m,z)\gamma(t_m - 0) + \\ +G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m - 0) + \\ +2G_0(t_m,z)G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m - 0) \end{matrix}\right\}. \quad (3.21)$$

Пусть до момента $t<t_m$ передача шла оптимальным способом. Тогда из (3.16), (3.21) для $\Delta(t_m)=\mathbf{M}\{\gamma(t_m)\}$ по неравенству Иенсена $\mathbf{M}\{Y^{-1}\} \ge (\mathbf{M}\{Y\})^{-1}$ [3] и (3.9) получим

$$\Delta(t_m) \ge V(t_m)[V(t_m) + \tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta^0(t_m - 0) = \Delta^0(t_m), \quad (3.22)$$

Использование (3.4) в (3.16) дает, что $\gamma^0(t_m)=\Delta^0(t_m)$. Совпадение $\gamma^0(t_m)$ с нижней границей (3.22) для $\Delta(t_m)$ доказывает оптимальность кодирования (3.4). Так как $\mathbf{M}\{\cdot\}=\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot|z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\}\}$, то использование (3.2) в (3.1) дает

$$\mathbf{M}\{h^2(\cdot)\} = \mathbf{M}\{[h(t,z)+H_1(t,z)\,\mu(\tau,t)]^2\} +$$
$$+\mathbf{M}\{H_1^2(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)\} \le \tilde{h}(t). \qquad (3.23)$$

Если $h(\cdot)=h^0(\cdot)$ и $g(\cdot)=g^0(\cdot)$ тогда $\gamma^0(t_m)$, $\gamma_{11}{}^0(\tau,t)$ и $\gamma_{01}{}^0(\tau,t)$ не являются случайными величинами. Тогда из (3.13), (3.23) для $\Delta(t)=\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$ по неравенству Иенсена $\mathbf{M}\{\exp\{Y\}\}\ge\exp\{\mathbf{M}\{Y\}\}$ следует $\Delta(t)\ge\Delta^0(t)$, где $\Delta^0(t)$ определяется уравнением

$$d\Delta^0(t)/dt = (2F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t))\times$$
$$\times[(\gamma_{01}^0(\tau,t))^2/\gamma^0(t)\gamma_{11}^0(\tau,t)]\Delta^0(t)+Q(t), \qquad (3.24)$$
$$\Delta^0(t)\big|_{t=t_m} = \Delta^0(t_m).$$

Для $\gamma^0(t)$ имеем уравнения

$$d\gamma^0(t)/dt = (2F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t))\times$$
$$\times[(\gamma_{01}^0(\tau,t))^2/\gamma^0(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)]\gamma^0(t)+Q(t),$$
$$\gamma^0(t)\big|_{t=t_m} = \Delta^0(t_m). \qquad (3.25)$$

Так как $\gamma_{11}{}^0(\tau,t)=\Delta_{11}{}^0(\tau,t)$, $\gamma_{01}{}^0(\tau,t)=\Delta_{01}{}^0(\tau,t)$, то решения (3.24), (3.25) совпадают, т. е. $\gamma^0(t)=\Delta^0(t)$, что доказывает оптимальность кодирования (3.3). Уравнения (3.7)–(3.11) следуют в результате подстановки (3.3), (3.4) в (3.12)–(3.20). Справедливость данного результата для произвольного интервала времени $t_m\le t<t_{m+1}$ следует по индукции.

Согласно неравенству Ихары $I_t[\cdot]\le(1/2)\ln[D(t)/\Delta(t)]$ [3]. Тогда

$$\sup I_t[x_t; z_0^t, \eta_0^m] = I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m] =$$
$$= (1/2)\ln[D(t)/\Delta^0(t)]. \qquad (3.26)$$

Так как

$$p_t(x) = \mathbf{N}\{x;\mu^0(t),\Delta^0(t)\} \text{ и } p(t,x) = \mathbf{N}\{x;a(t),D(t)\}$$

при кодировании (3.3), (3.4), то

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m] =$$
$$= \mathbf{M}\{\ln[p_t(x_t)/p(t,x_t)]\} =$$
$$= (1/2)\ln[D(t)/\Delta^0(t)]. \qquad (3.27)$$

Совпадение (3.26) и (3.27) обеспечивает справедливость свойства (3.5). Из (3.27) следует

$$\frac{dI_t^0[x_t;(z^0)_0^t,()\eta^{0m}_{\ 0}]}{dt} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D(t)}\frac{dD(t)}{dt} - \frac{1}{\Delta^0(t)}\frac{d\Delta^0(t)}{dt}\right), \qquad (3.28)$$

Так как

$$dD(t)/dt = 2F(t)D(t)+Q(t),$$

тогда из (3.8), (3.28) следует что для $t_m\le t<t_{m+1}$

$$\frac{dI_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]}{dt} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\tilde{h}(t)}{R(t)}\dfrac{(\Delta_{01}^0(\tau,t))^2}{\Delta^0(t)\Delta_{01}^0(\tau,t)} - \\ -Q(\sigma)\left(\dfrac{1}{\Delta^0(\sigma)} - \dfrac{1}{D(\sigma)}\right)\end{array}\right). \qquad (3.29)$$

Использование (3.9) дает, что

$$I_{t_m}^0[x_{t_m};(z^0)_0^{t_m},(\eta^0)_0^m] =$$
$$= (1/2)\ln[D(t_m)/\Delta^0(t_m-0)] =$$
$$= I_{t_m-0}^0[\cdot] + (1/2)\ln[1+\tilde{g}(t_m)/V(t_m)]. \qquad (3.30)$$

Тогда (3.6) следует из (3.29), (3.30). Теорема доказана.

Заключение

Рассмотрены задачи информационной эффективности дискретных каналов наблюдения с памятью относительно каналов без памяти в задаче экстраполяции и оптимальной непрерывно-дискретной передачи по непрерывному каналу с чистым запаздыванием и дискретному каналу с памятью. Получены формулы, определяющие эффективную глубину памяти и оптимальный способ передачи.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проект № 02.740.11.5190

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Информационный анализ в совместной задаче непрерывно-дискретной фильтрации и обобщенной экстраполяции. Ч. 1. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 5. – С. 6–11.
2. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Поступила 12.07.2010 г.