

УДК 004.94

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ГИПЕРГРАФОВ

В.К. Погрёбной

Томский политехнический университет

E-mail: vkr@tpu.ru

Предложен метод дифференциации вершин и рёбер гиперграфа, реализующий идею интеграции структурных различий в гиперграфе и получения интегральных характеристик для вершин и рёбер. Разработан и обоснован эффективный алгоритм решения задачи определения изоморфизма гиперграфов, в основу которого положен метод параллельного дифференцирования вершин и рёбер в нескольких гиперграфах. Работа алгоритма показана на примере определения изоморфизма двух гиперграфов.

Ключевые слова:

Гиперграфовая модель, изоморфизм гиперграфов, метод дифференциации вершин и рёбер, метод параллельной дифференциации, интеграция структурных характеристик, интегральные характеристики вершин и рёбер.

Key words:

Hypergraph model, isomorphism of hypergraphs, differentiation method of vertices and edges, method of parallel differentiation, integration of structural characteristics, integral characteristics of vertices and edges.

Для анализа структурных свойств сложных распределённых систем широко используются графовые модели. Стремление повысить адекватность модели приводит к необходимости использовать не только бинарные отношения между компонентами системы (вершинами графа), но и отношения, объединяющие более двух вершин. В этом случае в качестве модели используется гиперграф [1]. Рёбро гиперграфа, связывающее совокупность вершин, соответствует определённому отношению между данной совокупностью вершин. Это, например, может быть совокупность компонентов (вершин) системы, участвующих в выполнении определённой функции, или совокупность данных, описывающих определённый объект, свойства, события, или совокупность элементов радиоэлектронной аппаратуры, объединённых в одну электрическую цепь [2].

При решении задач декомпозиции множества компонентов системы на подмножества решается задача разрезания графа на подграфы. В процессе декомпозиции часто возникает потребность в установлении структурной и функциональной эквивалентности подграфов, т. е. решении задачи определения изоморфизма графов. Известно, что данная задача относится к неполиномиальному классу сложности. Поэтому, как правило, алгоритмы её решения разрабатывались для частных условий и видов графов. В работе [3] предложен алгоритм решения задачи определения изоморфизма для графов общего вида.

Основная идея, выдвинутая в [3] и положенная в основу разработки алгоритма, заключается в определении для каждой вершины графа интегральной характеристики, обобщающей её отношения с интегральными характеристиками всех других вершин графа. Интегральные характеристики вершин получаются с помощью рекурсивного правила интеграции различий вершин. Процедура, реализующая данное правило, последовательно выполняет итерации согласно глубине рекурсии. Число итераций при этом не превышает диаметр гра-

фа. На k -ой итерации для каждой вершины обобщаются сведения о характеристиках смежных с ней вершин. Характеристики этих смежных вершин в свою очередь были получены на $(k-1)$ -й итерации как результат обобщения характеристик своих смежных вершин. В результате выполнения рекурсивного правила каждая вершина получает свою уникальную интегральную характеристику. Можно сказать, что полученная таким образом характеристика вершины интегрально отражает уникальность её положения относительно структуры уникальных положений всех других вершин в графе.

Два графа являются изоморфными, если между интегральными характеристиками вершин данных графов имеет место взаимно однозначное соответствие. В [3] найден простой и эффективный механизм, позволяющий воплотить данную идею в форме алгоритма обобщения характеристик вершин. Цель настоящей статьи заключается в разработке алгоритма решения задачи определения изоморфизма гиперграфов, использующего идею получения интегральных характеристик.

Характеристики вершин и рёбер гиперграфов и задача определения изоморфизма

В модели, представленной гиперграфом $H=(Q,R,F)$, множество вершин $Q=\{q_i\}$, $i=1,2,\dots,n$ соответствует множеству компонентов системы, множество рёбер $R=\{r_j\}$, $j=1,2,\dots,m$ соответствует множеству отношений, задаваемых на множестве компонентов, а функция F выполняет роль инцидентора, который каждому ребру r_j ставит в соответствие подмножество вершин $Q_j \subset Q$, связанных между собой j -м отношением.

Гиперграф можно представить матрицей инцидентий $A=\|a_{ij}\|_{n \times m}$, где $a_{ij}=1$, если вершина q_i инцидентна ребру r_j , и $a_{ij}=0$, в противном случае. Гиперграфы $H_1=(Q_1,R_1,F_1)$ и $H_2=(Q_2,R_2,F_2)$ при условии, что $|Q_1|=|Q_2|$ и $|R_1|=|R_2|$, являются изоморфными, если между множествами Q_1 и Q_2 и между множествами R_1 и R_2 можно установить взаимно однозначные соответствия, при которых инциденторы

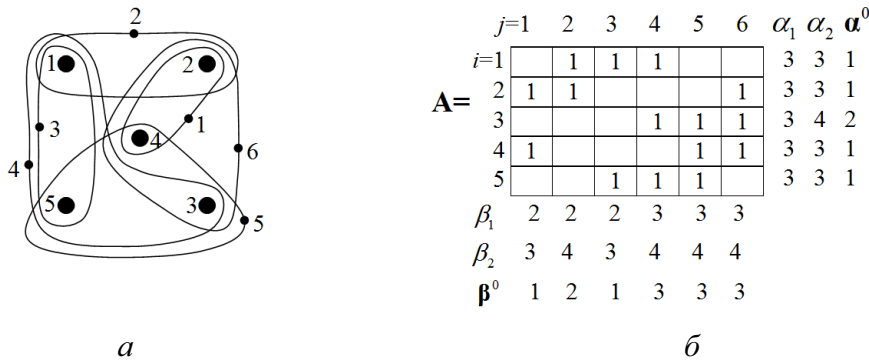


Рис. 1. Пример визуального и матричного представления гиперграфа

F_1 и F_2 совпадают и, следовательно, матрицы A_1 и A_2 , построенные с учётом этих соответствий, должны быть равны, т. е. $A_1 = A_2$.

Из этого определения следует, что изоморфизм двух гиперграфов можно установить путём последовательного перебора перестановок строк и столбцов в матрице инцидентности одного из гиперграфов и после каждой перестановки сравнивать полученную матрицу с матрицей другого гиперграфа. В общем случае число перебираемых вариантов матриц может достигнуть $n! \times m!$. Очевидно, что, если гиперграфы неизоморфны, то для того, чтобы убедиться в этом, потребуется перебрать все $n! \times m!$ вариантов.

Пример гиперграфа, содержащего 5 вершин и 6 рёбер, на рис. 1, а, представлен визуально и на рис. 1, б, матрицей инцидентности. В частности, для определения изоморфизма двух гиперграфов такой размерности число перебираемых матриц составит $5! \times 6! = 86400$.

Существенное сокращение переборов достигается на основе использования ряда структурных характеристик вершин и рёбер гиперграфа. Если для отдельных вершин и рёбер удастся получить уникальные значения характеристик, то соответствующие вершины и рёбра могут быть исключены из перестановок. Для рассматриваемого примера гиперграфа (рис. 1) приведены значения двух характеристик α_i и α_j для вершин и двух характеристик β_i и β_j для рёбер.

Характеристика α_{i_i} равна числу рёбер инцидентных вершине q_i , а характеристика α_{j_i} обозначает степень связности вершины q_i с другими вершинами гиперграфа (рис. 1, а). Так, вершина q_3 связана со всеми вершинами, т. е. $\alpha_{23} = 4$, а для других вершин q_i характеристика $\alpha_{2i} = 3$.

Характеристика β_{j_j} определяет число вершин инцидентных ребру r_j , а характеристика β_{2j} равна числу рёбер в гиперграфе смежных с ребром r_j . Например, из рис. 1, а следует, что ребро r_2 несмежно только с ребром r_3 , т. е. $\beta_{25} = 4$, а ребро r_1 смежно с рёбрами r_2, r_3, r_5, r_6 и $\beta_{21} = 3$.

Значения характеристик $\{\alpha_g\} = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\{\beta_g\} = (\beta_1, \beta_2)$ для гиперграфа (рис. 1, а) представлены на рис. 1, б, справа и снизу от матрицы A . Уникальные значения характеристик в данном приме-

ре получили вершина q_3 с $(\alpha_{13}, \alpha_{23}) = (3, 4)$ и ребро r_2 с $(\beta_{12}, \beta_{22}) = (2, 4)$. Учитывая отличие характеристик у рёбер r_2, r_3 и r_4, r_5, r_6 , число перебираемых вариантов сокращается до $4! \times 2! \times 3! = 288$.

Можно предположить, что при расширении числа характеристик в совокупностях $\alpha = \{\alpha_g\}$ и $\beta = \{\beta_g\}$ будет возрастать различие (дифференциация) вершин и рёбер по значениям данных характеристик. Однако, привлекаемые с этой целью характеристики α_g и β_i не всегда приводят к дифференциации вершин и рёбер. Так, для примера на рис. 1, б, все вершины относительно характеристики α_1 оказались неразличимы. Кроме того, стремление повысить дифференциацию за счёт расширения характеристик в совокупностях $\{\alpha_g\}$ и $\{\beta_g\}$ может привести к такому росту затрат на их вычисление, которые окажутся сопоставимыми с затратами на решение исходной задачи. Поэтому важно найти механизм дифференциации вершин и рёбер на основе простых и легко вычисляемых характеристик.

Метод дифференциации вершин и рёбер гиперграфа

Рассматривается ситуация, когда для вершин и рёбер гиперграфа $H = (Q, R, F)$ определены значения совокупностей простых характеристик $\alpha = \{\alpha_g\}$ и $\beta = \{\beta_g\}$. Введем функции $\delta(\alpha)$ и $\delta(\beta)$, значения которых являются числами натурального ряда в интервале $1, 2, \dots, n$ для $\delta(\alpha)$ и в интервале $1, 2, \dots, m$ для $\delta(\beta)$. Функция $\delta(\alpha)$ каждой совокупности значений характеристик $\alpha_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots)$ вершины q_i ставит в соответствие кодовое число α_i^0 из ряда чисел $1, 2, \dots, n$ так, чтобы разные совокупности значений получили разные кодовые числа, т. е. соблюдалось условие:

$$\forall q_i, q_k \in Q, i \neq k [(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots) \neq (\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots)] \Rightarrow (\alpha_i^0 \neq \alpha_k^0).$$

Заметим, что элементы в совокупностях $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots)$ упорядочены и сравнение совокупностей при выполнении функции $\delta(\alpha)$ должно выполняться с учётом этого порядка.

Аналогично выполняется функция $\delta(\beta)$, присваивая совокупности значений характеристик $\beta_j = (\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots)$ кодовое число β_j^0 из ряда чисел $1, 2, \dots, m$. В итоге получают векторы $\alpha^0 = \{\alpha_i^0\}$ и

$\beta^0 = \{\beta_j^0\}$, элементы которых отражают различия среди вершин и рёбер относительно введенных характеристик. Для примера гиперграфа (рис. 1) векторы α^0 и β^0 показаны справа и снизу от матрицы.

Для продолжения процесса дифференциации вершин и рёбер введём операцию попарного произведения элементов двух векторов и обозначим её символом $\otimes$, т. е. $X \otimes Y = Z$. Здесь вектор $X = \{x_i\}$, вектор $Y = \{y_j\}$, а элементы z_i вектора $Z = \{z_i\}$ получаются в результате произведения, $z_i = x_i y_i$. Применяя операцию $\otimes$ для вектора α^0 и вектор-столбца A_j матрицы A , получим вектор $\beta^1 = \alpha^0 \otimes A_j$. Элементы вектора β^1 будем рассматривать как значения совокупности из n характеристик $(\beta_{1j}^1, \beta_{2j}^1, \dots, \beta_{nj}^1)$. По отношению к данным совокупностям можно применить функцию $\delta(\beta)$ и получить вектор $\beta^1 = \{\beta_j^1\}$, элементы которого являются кодовыми числами β_j^1 из ряда чисел $1, 2, \dots, m$. Вектор $\alpha^1 = \{\alpha_i^1\}$ получим аналогично как результат применения операции $\otimes$ для вектора β^0 и вектор-строк A_i матрицы A , $\alpha_i^1 = \beta^0 \otimes A_i$, и выполнения функции $\delta(\alpha)$ относительно векторов $\alpha_i^1 = (\alpha_{1i}^1, \alpha_{2i}^1, \dots, \alpha_{mi}^1)$. При выполнении функций $\delta(\alpha)$ и $\delta(\beta)$ элементы векторов β^1 и α^1 принимаются неупорядоченными. Поэтому, два вектора α_i^1 и α_k^1 , $i \neq k$, являются равными, $\alpha_i^1 = \alpha_k^1$, если между их элементами α_{ji}^1 и α_{jk}^1 можно установить взаимно-однозначное соответствие так, что для всех пар $(\alpha_{ji}^1, \alpha_{jk}^1)$ справедливо $\alpha_{ji}^1 = \alpha_{jk}^1$.

В качестве исходного вектора, с которого начинается процесс дифференциации, можно использовать как вектор α^0 , так и β^0 . Для определённости будем считать, что первая итерация выполняется на основе характеристик вершин, т. е. вектор β^1 определяется на основе вектора α^0 . На этой итерации при выполнении функции $\delta(\beta)$ могут учитываться кодовые числа вектора β^0 . Таким образом, процесс дифференциации на основе исходного вектора $\alpha^f = \alpha^0$ сводится к последовательному выполнению итераций $f=0, 1, 2, \dots$, реализующих рекуррентное правило, представленное следующими выражениями:

$$\alpha^j \otimes A_j = \beta_j^{f+1} \Rightarrow \beta^{f+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$\beta^{f+1} \otimes A_i = \alpha_i^{f+1} \Rightarrow \alpha^{f+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Процесс дифференциации вершин и рёбер продолжается до тех пор, пока на некоторой f -й итерации вектор $\alpha^f = \alpha^{f-1}$ и, соответственно, $\beta^f = \beta^{f-1}$. Такие векторы будем именовать устойчивыми и обозначать α^* и β^* . Получение устойчивого вектора соответствует двум ситуациям. В первой из них происходит полная дифференциация вершин, т. е. все вершины получают разные кодовые числа α_i^* , именуемые интегральными характеристиками. Вторая ситуация соответствует неполной дифференциации, когда некоторые вершины имеют одинаковые интегральные характеристики. Совокупности вершин с одинаковыми интегральными характеристиками названы однородными группами. В общем случае векторы α^* и β^* могут содержать по несколько однородных групп.

Изучение свойств однородных групп и условий применения метода дифференциации вершин в этих группах требует отдельного исследования. В данной работе основное внимание сосредоточено, непосредственно, на методе дифференциации и его применении для решения задачи определения изоморфизма гиперграфов. Для более глубокого понимания метода попытаемся на содержательном уровне дать интерпретацию процесса дифференциации вершин и рёбер гиперграфа. С этой целью рассмотрим процесс дифференциации на примере гиперграфа, представленного матрицей инцидентий A на рис. 2. Пример подобран так, что вершины по характеристике α_1 и рёбра по характеристике β_1 неразличимы, т. е. число единиц в строках равно четырём, а в столбцах — равно трём. Соответственно все элементы векторов α^0 и β^0 равны 1.

Предположим, что нам удалось подобрать такую другую характеристику α_g , по которой вершина q_1 получила уникальную характеристику (на рис. 2 помечена *), а характеристики всех других вершин остались неразличимы. В этом случае вершине q_1 присваивается кодовое число $\alpha_{q_1}^0 = 2$, а у остальных вершин сохраняются кодовые числа $\alpha_i^0 = 1$. Полученный вектор α^0 используется при дифференциации в качестве исходного.

Как следует из рис. 2 для полной дифференциации вершин и рёбер потребовалось три итерации, $f=3$. Записи $\alpha^f(\beta^f)$ и $\beta^f(\alpha^{f-1})$ указывают, что вектор α^f получен на основе вектора β^f и, соответственно, β^f на основе α^{f-1} . В скобках на рис. 2 приведены только ненулевые элементы векторов α^f и β^f . Элементы перечислены без разделителей, т. к. в данном примере все они являются одноразрядными числами.

Процесс дифференциации в основном сводится к выполнению операций $\otimes$ и функций $\delta(\alpha)$ и $\delta(\beta)$. Например, ненулевым элементам вектора, полученным в результате выполнения операции $\beta^1 \otimes A_i = A_{5i}$ (1212), функция $\delta(\alpha_5^1)$ поставила в соответствие кодовое число $\alpha_5^1 = 3$, т. к. вектору α_5^1 с элементами (2211), т. е. $\alpha_5^1 = \alpha_3^1$, ранее уже было присвоено кодовое число $\alpha_3^1 = 3$.

Полная дифференциация, полученная в данном примере означает, что каждая вершина и ребро гиперграфа занимает уникальное положение, которое фиксируется соответствующей интегральной характеристикой (кодовым числом). Заметим, что в нашем примере характеристика α_g для вершины q_1 вносилась как некоторая абстрактная величина, не отражающая каких-либо структурных свойств гиперграфа. Поэтому интеграция различий на всех итерациях дифференциации могла фиксировать лишь структурные отличия отношений между вершинами и рёбрами. Если все вершины и рёбра рассматривать в качестве центров, относительно которых осуществляется интеграция различий, то каждая итерация дифференциации увеличивает на единицу радиус (глубину) охвата вершин и рёбер гиперграфа, вовлеченных в интеграцию разли-

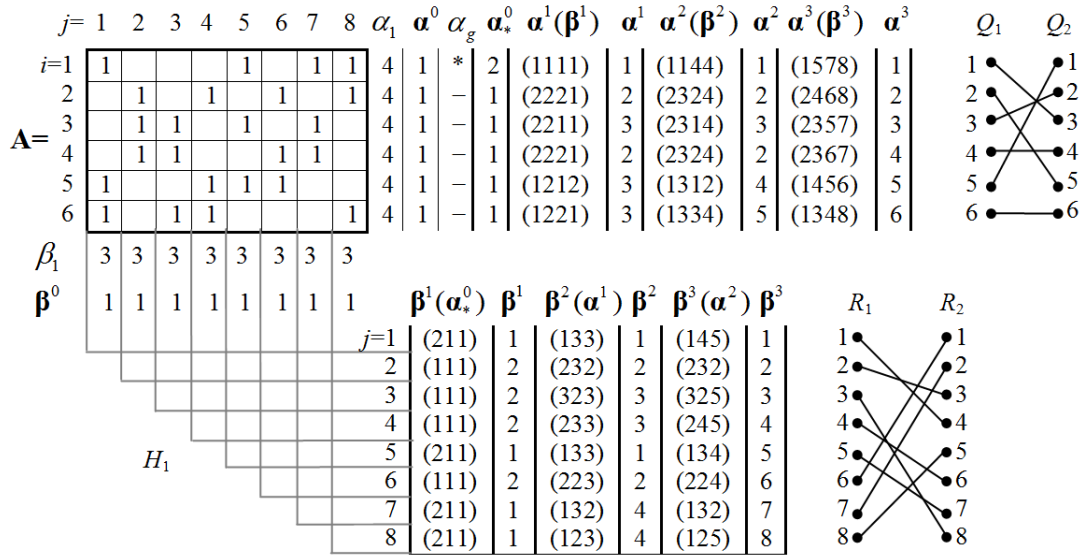


Рис. 2. Пример дифференциации вершин и рёбер гиперграфа

чий. Поэтому число итераций, как правило, не превышает диаметр гиперграфа. В частности, наличие однородных групп на итерации f^* свидетельствует о том, что все вершины и рёбра вовлечены в интеграцию различий, но этого оказалось недостаточно для полной дифференциации.

Алгоритм определения изоморфизма гиперграфов

Для определения изоморфизма гиперграфом используется изложенный выше метод дифференциации, выполняемый одновременно (параллельно) в исследуемой группе гиперграфов. Метод параллельной дифференциации отличается тем, что при назначении кодовых чисел векторы α^f (или β^f) во всех гиперграфах рассматриваются совместно. Так, если на некоторой f -й итерации параллельной дифференциации в двух графах $H_1=(Q_1, R_1, F_1)$ и $H_2=(Q_2, R_2, F_2)$ получены векторы $\alpha^f(H_1)=\alpha^f(H_2)$, то им должны быть назначены равные кодовые числа, т. е. $\alpha^f(H_1)=\alpha^f(H_2)$.

При выполнении параллельной дифференциации один из гиперграфов (любой) принимается в качестве ведущего, а все остальные ведомыми. Дифференциация в ведущем гиперграфе ничем не отличается от изложенного выше метода и представлена на рис. 2. Назначение кодовых чисел в ведомых гиперграфах осуществляется с учетом назначенных ранее кодовых чисел в ведущем гиперграфе. Если при выполнении очередной f -й итерации вектор α^f (или вектор β^f) ведомого гиперграфа не совпадает с вектором α^f (или β^f) ведущего гиперграфа, то данный ведомый гиперграф не изоморфен ведущему. Процесс параллельной дифференциации заканчивается на итерации f^* . При этом векторы α^f (и векторы β^f) в изоморфных гиперграфах должны совпадать.

Теорема. Два гиперграфа H_1 и H_2 являются изоморфными, если выполнение в них параллельной дифференциации приводит к полной дифференциации вершин и рёбер.

Доказательство. Если полная дифференциация вершин и рёбер гиперграфов H_1 и H_2 не достигается, то возможны две ситуации завершения параллельной дифференциации. В первой из них на итерации f^* векторы $\alpha^f(H_1)=\alpha^f(H_2)$ и $\beta^f(H_1)=\beta^f(H_2)$ содержат однородные группы и в этом случае делать выводы об изоморфизме гиперграфов или его отсутствии преждевременно. Вторая ситуация возможна на итерации f , когда $\alpha^f(H_1) \neq \alpha^f(H_2)$ или $\beta^f(H_1) \neq \beta^f(H_2)$. Неравенство данных векторов возможно лишь при несовпадении инциденторов F_1 и F_2 и, следовательно, гиперграфы H_1 и H_2 не изоморфны. Из этого следует необходимость полной дифференциации.

Покажем достаточность условия полной дифференциации для изоморфизма гиперграфов. Предположим, что полная дифференциация достигнута, а гиперграфы H_1 и H_2 не являются изоморфными. Заметим также, что перестановки строк и столбцов в матрице A гиперграфа можно осуществлять независимо друг от друга, не нарушая инцидентор F . Поэтому, если перенумеровать вершины и рёбра в гиперграфе H_2 в соответствии с кодовыми числами векторов $\alpha^f(H_2)$ и $\beta^f(H_2)$ и упорядочить строки и столбцы в матрице $A(H_2)$, то, учитывая, что гиперграфы H_1 и H_2 не изоморфны, должно выполняться условие $A(H_1) \neq A(H_2)$. Но это возможно только в случае, если имеют место неравенства $\alpha^f(H_1) \neq \alpha^f(H_2)$ или $\beta^f(H_1) \neq \beta^f(H_2)$, что противоречит условию о полной дифференциации вершин и рёбер. Теорема доказана.

Алгоритм определения изоморфизма гиперграфов H_1 и H_2 основан на утверждении теоремы и реализует метод параллельной дифференциации вершин и рёбер. Основные операции алгоритма сводятся к следующему.

1. Для гиперграфов H_1 и H_2 по заданным характеристикам $\{\alpha_s\}$ определяются векторы α^0 и β^0 . В качестве ведущего принимается гиперграф H_1 . Если по векторам α^0 и β^0 дифференциация

- вершин и (или) рёбер не происходит, то выполняется п. 3 алгоритма.
- Выполняются итерации параллельной дифференциации вершин и рёбер гиперграфов H_1 и H_2 . После выполнения очередной f -й итерации анализируются возможные ситуации:
 - если векторы $\alpha^f(H_1) = \alpha^f(H_2)$ и $\beta^f(H_1) = \beta^f(H_2)$, то выполняется следующая итерация;
 - если выполняется одно из неравенств $\alpha^f(H_1) \neq \alpha^f(H_2)$, $\beta^f(H_1) \neq \beta^f(H_2)$, то в случае дифференциации вершин однородной группы происходит переход к п. 3, а в случае дифференциации от векторов α^0 , β^0 фиксируется, что гиперграфы H_1 и H_2 неизоморфны;
 - если получены устойчивые векторы $\alpha^*(H_1) = \alpha^*(H_2)$, $\beta^*(H_1) = \beta^*(H_2)$, содержащие однородные группы, то происходит переход к п. 3;
 - если достигнута полная дифференциация вершин и рёбер, то гиперграфы являются изоморфными и происходит переход к п. 4.
 - Выполняется дифференциация вершин и рёбер однородной группы. С этой целью в гиперграф H_1 вводится абстрактная характеристика, по которой одной из вершин однородной группы присваивается кодовое число равное максимальному элементу вектора $\alpha^f(H_1)$ увеличенному на единицу. Данное кодовое число последовательно присваивается вершинам соответствующей однородной группы в гиперграфе H_2 и после каждого присвоения выполняются итерации параллельного дифференцирования в соответствии с п. 2.
 - По векторам $\alpha^f(H_1)$ и $\alpha^f(H_2)$ устанавливается соответствие вершин изоморфных гиперграфов H_1 и H_2 , а по векторам $\beta^f(H_1)$ и $\beta^f(H_2)$ – соответствие рёбер.
- Работу алгоритма покажем на примере, в котором гиперграф, представленный на рис. 2, примем в качестве ведущего (H_1), а ведомый гиперграф H_2 и процесс его параллельной дифференциации

представим на рис. 3. Заметим, что относительно исходных характеристик α_1 и β_1 гиперграфы H_1 и H_2 являются однородными группами. Поэтому процесс параллельной дифференциации осуществляется с введением абстрактной характеристики α_g для вершины q_1 в гиперграфе H_1 (рис. 2) и последовательным присвоением этой характеристики вершинам гиперграфа H_2 (рис. 3). Необходимость последовательного присвоения абстрактной характеристики является вполне очевидной и объясняется тем, что мы не знаем, какая вершина в однородной группе гиперграфа H_2 соответствует вершине, которой была присвоена абстрактная характеристика в однородной группе гиперграфа H_1 .

Из рис. 3 следует, что присвоения абстрактной характеристики вершинам q_1 и q_2 оказались неудачными и привели к ситуациям, которые соответствуют п. 2б алгоритма. На рис. 3 для векторов $\beta_{1,3}^1(\alpha_1^1) = (3, 3, 3)$ и $\alpha_{2,4}^1(\beta_2^1) = (2, 1, 1, 1)$ в ведущем гиперграфе H_1 (рис. 2) не нашлись аналоги. Эти ситуации на рис. 3 помечены знаком (?). Полная дифференциация достигнута в результате присвоения абстрактной характеристики вершине q_3 . Графы соответствия для вершин и рёбер изоморфных гиперграфов H_1 и H_2 приведены на рис. 2.

Для достижения полной дифференциации в ведущем гиперграфе H_1 потребовалось выполнить 3 итерации. В частности, при полном переборе матриц для данного примера размерностью $n \times m = 6 \times 8$ потребовалось бы сравнивать $6! \times 8! = 29030400$ вариантов матриц. Учитывая, что проверке на изоморфизм подвергаются фрагменты графовых моделей, их размерность, как правило, не превышает нескольких десятков вершин и рёбер. Решение задач с такой и более высокой размерностью для предложенного алгоритма не вызывает затруднений. Это следует из содержания основных вычислительных процедур алгоритма и подтверждается возможностью его выполнения даже вручную для размерностей в пределах 10–15 вершин и рёбер.

$j=$										α_1	α^0	α_g	α_1^*	$\alpha_1^1(\beta_1^1)$	α_1^1	α_2^*	$\alpha_2^1(\beta_2^1)$	α_2^1	α_3^*	$\alpha^1(\beta^1)$	α^1	$\alpha^2(\beta^2)$	α^2	$\alpha^3(\beta^3)$	α^3				
$A=$	1				1		1	1		4	1	*	2	(1111)	1	1	(2221)	2	1	(2121)	3	(2131)	3	(6145)	5				
	2		1	1					1	1	4	1	—	1	(2212)	2	2	(1111)	1	1	(1212)	3	(4213)	3	(7253)	3			
	3			1		1				1	4	1	—	1	(2121)	3	1	(1221)	3	2	(1111)	1	(4141)	1	(7185)	1			
	4	1	1	1						1	4	1	—	1	(1222)	2	1	(2111)	?	1	(2122)	2	(2423)	2	(6723)	4			
	5	1		1			1	1			4	1	—	1	(1221)	3	1	(2122)		1	(2212)	2	(2243)	2	(6284)	2			
	6				1	1	1		1		4	1	—	1	(1212)	3	1	(2221)		1	(1122)	3	(1433)	5	(1843)	6			
β_1										3	3	3	3	3	3	3	3												
β^0										1	1	1	1	1	1	1	1												
																				$j=$									
																				1									
																				2									
																				3									
																				4									
																				5									
																				6									
																				7									
																				8									
H_2																													

Рис. 3. Пример параллельной дифференциации вершин и рёбер гиперграфа

В заключение отметим, что наряду с характеристиками структурного типа таких, например, как α_1 , α_2 и β_1 , β_2 в методе дифференциации в качестве исходных могут использоваться характеристики, отражающие физические, химические, биологические и другие свойства вершин и рёбер гиперграфовых моделей. Процесс интеграции различий при введении таких характеристик, как правило, приводит к полной дифференциации за 1–2 итерации. Здесь важно подчеркнуть, что использование данных характеристик следует рассматривать как вынужденную меру, связанную с необходимостью адекватного представления фрагментов распределённых систем в виде гиперграфовых моделей и установления их эквивалентности, а не с целью ускорения сходимости алгоритма.

В связи с возможностью введения таких характеристик следует отметить еще одно важное обстоятельство. Для алгоритма основным препятствием к достижению полной дифференциации вершин и рёбер является наличие в гиперграфе однородных групп, выявленные в процессе интеграции различий, требует отдельного исследования. Вместе с тем однородные группы в этих исследова-

ниях представляют интерес не только с позиции разработки правил дифференциации для решения задачи определения изоморфизма, но и с целью анализа структурных свойств графовой модели в целом.

Задачу, связанную с применением метода дифференциации путём интеграции различий с целью выявления и исследования отдельных труднообнаруживаемых структурных свойств, по отношению к задаче определения изоморфизма можно рассматривать как обратную. Уже сам факт наличия однородных групп и эффективного метода их выделения может оказаться весьма полезной основой для исследования структурных особенностей графовых моделей. При этом нет оснований исключать и возможность того, что для самых разных приложений, использующих графовые модели, метод дифференциации вершин и рёбер на основе интеграции различий, а также методы выделения и исследования однородных групп, могут оказаться более востребованными, чем решение задачи определения изоморфизма.

Работа выполнена при проведении НИР в рамках реализации ФЦП «Научные и научно педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 гг. Госконтракт № П2396.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: КомКнига, 2004. – 644 с.
2. Корниенко А.В., Погребной В.К. Модель и алгоритм разбиения схем вычислительных устройств на функциональные блоки // Управляющие системы и машины. – 1976. – № 5. – С. 94–98.

3. Погребной В.К. Об одном методе определения изоморфизма графов // Кибернетика. – 1982. – № 2. – С. 7–13.

Поступила 29.8.09.2010 г.