Экспериментальные исследования алгоритма показали, что выбор полюсов может осуществляться без вмешательства пользователя с помощью простых формальных правил, реализованных в алгоритме, либо выбираться произвольным образом из пронумерованной последовательности вершин множества. Этот вывод базируется пока лишь на результатах экспериментов, которые не подтвердили вполне естественное предположение о том, что совокупность полюсов, выбранная с учётом топологии расположения вершин множества, должна приводить к ЛК-разбиению с более высокой оценкой компактности. В последующем предстоит найти более надёжные обоснования этого и других свойств алгоритма.

Выводы

Алгоритм получения локально компактных разбиений, в основу которого положен метод последовательного улучшения разбиений, является эффективным инструментом для приближённого решения задачи разбиения множества объектов территориально распределённых систем на подмножества равной мощности с минимальной суммарной оценкой компактности. При разбиении множеств, содержащих до 100 объектов (вершин топологического графа), локальный оптимум достигался не более чем за 10 итераций. Получаемые локально компактные разбиения являлись вполне приемлемыми для использования на практике.

Работа выполнена при проведении НИР в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 гг. Госконтракт № П2396.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. Погребной А.В. Определение числа и топологии размещения станций многопроцессорной вычислительной системы // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 160–164.

Поступила 10.09.2010 г.

УДК 65.012.122

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОДНОТИПНЫМ РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Л.И. Самочернова, Е.С. Петров

Томский политехнический университет
E-mail: am@am.tpu.ru

Изучена система массового обслуживания с однотипным резервным прибором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Проведена оптимизация системы при учете потерь на ожидание и амортизацию.

Ключевые слова:
Система, обслуживание, время ожидания, амортизация, оптимальный момент.
Key words:
System, service, queuing time, depreciation, optimal moment.

Введение

Проблемы анализа и синтеза управляемых систем массового обслуживания (УСМО) вызывают значительный интерес, т. к. моделями УСМО описывается функционирование многих реальных технических систем, например, вычислительных систем, систем связи [1–10]. Многие работы [1–4] посвящены изучению систем массового обслуживания (СМО), в которых моменты включения и отключения резервного прибора, интенсивность обслуживания зависят от длины очереди или от числа заявок в системе. Системы, в которых стратегия управления резервными приборами или интенсивностью обслуживания зависит от времени ожидания, остались изученными слабо. Однако именно УСМО с управлением по времени ожидания заявок в очереди являются хорошими математическими моделями многих реальных систем, где важна не длина очереди, а время ожидания заявок в очереди. В данной работе рассматривается оптимизация СМО с однотипным, симметричным резервным прибором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди.

1. Описание системы

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с простейшим входящим потоком интенсивности λ, к которой может подключаться резервный прибор. Приборы однотипны, то есть обслуживание предполагается экспоненциальным с интенсивностью μ как для основного, так и для резервного приборов. Если заявка, находящаяся в некоторый момент времени t первой в очереди, поступила в систему в момент времени t_0, то величину $s(t)=t-t_0$ будем называть текущим временем ожидания заявки, находящейся в очереди первой. Дисциплина обслуживания резервным прибором следующая: как только s – текущее время ожидания заявки, находящейся в очереди первой, достигает величины s_0 (s_0=const>0), подключается резервный прибор и берет на обслуживание заявку, стоящую первой в очереди. После обслуживания одной заявки любой из двух приборов, окончивших обслуживание первым, выключается (то есть становится резервным), если текущее время ожидания заявки, которая в этот момент времени находится первой в очереди, $s<s_0$, но оба прибора продолжают обслуживание, если $s\geq s_0$. Необходимо найти такой оптимальный момент подключения, s_0^{opt}, резервного прибора, который бы минимизировал средние суммарные потери такой системы в единицу времени.

Опишем СМО случайным процессом с компонентами: $\{s(t),v(t)\}$, где $s(t)$ – текущее время ожидания заявки, находящейся первой в очереди, $v(t)$ – число работающих приборов в момент времени t. Кроме того, возможны еще три особых состояния: $\{v(t)=0\}$ (система пуста); $\{v(t)=1\}$ (очередь пуста и работает только один прибор); $\{v(t)=2\}$ (очередь пуста и работают оба прибора).

Рассматривая возможные переходы за бесконечно малый промежуток времени в заданное состояние, можно показать аналогично тому, как сделано в [6], что вероятности переходов не зависят от предыстории, так как поток заявок простейший, а обслуживание экспоненциальное. Следовательно, процесс $\{s(t),v(t)\}$ с особыми состояниями $\{v(t)=0\}$, $\{v(t)=1\}$, $\{v(t)=2\}$ является марковским случайным процессом. Предположим, что существует стационарное распределение вероятностей, которое, как известно, совпадает с финальным распределением. Достаточным условием существования стационарного режима работы рассматриваемой СМО является условие [6]: $\lambda<2\mu$.

Финальную плотность вероятностей $p(s,v)$ величины (s,v) обозначим через $p_1(s)$ в области $0\leq s\leq s_0$, если $v(t)=1$; $p_2(s)$ в области $0\leq s\leq s_0$, если $v(t)=2$; $p_3(s)$ в области $s\geq s_0$, для которой $v(t)=2$. Обозначим через $\pi(v)$ финальную вероятность того, что в очереди заявок нет, а на обслуживании находится v заявок (v=0,1,2).

Аналогично тому, как это сделано в [6], получены финальные плотности вероятностей $p_i(s)$, ($i=\overline{1,3}$) и финальные вероятности особых состояний $\pi(0)$, $\pi(1)$, $\pi(2)$:

$$\left.\begin{aligned}
p_1(s) &= \frac{\lambda^2(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{(\lambda-\mu)s}}{\mu m},\\
p_2(s) &= \frac{\lambda^3(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{\lambda s-\mu s_0}}{2\mu^2 m},\\
p_3(s) &= \frac{\lambda^3(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{(\lambda-2\mu)s+\mu s_0}}{2\mu^2 m},\\
\pi(0) &= \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}{m},\\
\pi(1) &= \frac{\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}{\mu m},\\
\pi(2) &= \frac{\lambda^2(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)e^{-\mu s_0}}{2\mu^2 m},
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $m=\mu(2\mu-\lambda)-\lambda^2 e^{(\lambda-\mu)s_0}$, $\lambda\neq\mu$.

Если $\lambda=\mu$, то $p_i(s)$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(v)$, v=0,1,2 имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
p_1(s) &= \frac{\lambda}{1+\lambda s_0},\\
p_2(s) &= \frac{\lambda e^{\lambda(s-s_0)}}{2(1+\lambda s_0)},\\
p_3(s) &= \frac{\lambda e^{\lambda(s_0-s)}}{2(1+\lambda s_0)},\\
\pi(0) &= \frac{1}{1+\lambda s_0},\\
\pi(1) &= \frac{1}{1+\lambda s_0},\\
\pi(2) &= \frac{e^{-\lambda s_0}}{2(1+\lambda s_0)}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2. Оптимизация системы

Рассмотрим случай, когда в СМО имеют место потери только двух видов.

А. Потери от ожидания заявок в очереди

Пусть потери от ожидания i заявок в единицу времени равны $F(i)$. Тогда среднее значение потерь на ожидание можно записать в виде:

$$L_1 = M[F(i)] = \\ = \int_0^{s_0}\tilde{F}(s)[p_1(s)+p_2(s)]ds + \int_{s_0}^{\infty}\tilde{F}(s)p_3(s)ds, \tag{3}$$

где $$\tilde{F}(s)=\sum_{i=1}^{\infty}F(i)\frac{(\lambda s)^{i-1}e^{-\lambda s}}{(i-1)!}.$$

В частности, если $F(i)=D_1 i$, то $\tilde{F}(s)=D_1(\lambda s+1)$, где D_1 – положительная константа, имеющая смысл потерь от ожидания одной заявки в единицу времени.

Б. Потери на амортизацию резервного прибора

Будем считать, что работа резервного прибора приводит к потерям в единицу времени, равным D_2. Тогда среднее значение потерь на амортизацию резервного прибора в единицу времени имеет вид

$$L_2 = D_2[\pi(2) + \int_0^{s_0} p_2(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} p_3(s)ds]. \qquad (4)$$

Таким образом, с учетом (3) и (4) средние суммарные потери системы массового обслуживания в единицу времени примут вид

$$L(s_0) = L_1 + L_2 = \int_0^{s_0} \tilde{F}(s)[p_1(s) + p_2(s)]ds +$$

$$+ \int_{s_0}^{\infty} \tilde{F}(s) p_3(s)ds + D_2[\pi(2) + \int_0^{s_0} p_2(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} p_3(s)ds], \qquad (5)$$

где $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$, $\pi(2)$ для значений $\lambda \neq \mu$ и $\lambda = \mu$ имеют, соответственно, вид (1) и (2).

Задача оптимизации такой системы массового обслуживания сводится к нахождению момента s_0^{opt} включения резервного прибора, который минимизирует функцию потерь (5). Эта задача решена численно.

Частный случай

Рассмотрим СМО, в которой потери от ожидания описываются функцией потерь, линейно зависящей от числа заявок в системе $F(i)=D_1 i$, где D_1 – потери от ожидания одной заявки в единицу времени. Тогда средние суммарные потери системы в единицу времени имеют вид

$$L(s_0) = D_1[\int_0^{s_0} (\lambda s + 1)[p_1(s) + p_2(s)]ds +$$

$$+ \int_{s_0}^{\infty} (\lambda s + 1) p_3(s)ds] + D_2[\pi(2) + \int_0^{s_0} p_2(s)ds + \int_{s_0}^{\infty} p_3(s)ds]. \qquad (6)$$

Переходя в (6) к безразмерным величинам $\omega=\mu/\lambda$, $x_0=\lambda s_0$, учитывая (1) и (2), запишем функцию потерь (6) в виде:

$$\tilde{L}(x_0) = D_1 \tilde{E}(x_0) + D_2 \tilde{K}(x_0), \qquad (7)$$

где при $\omega \neq 1$

$$\tilde{E}(x_0) = \frac{e^{(1-\omega)x_0}}{\omega \bar{m}} \left[\frac{(1-2\omega)\omega}{1-\omega} (e^{(\omega-1)x_0} - 1) - \omega x_0 + \frac{1-\omega}{1-2\omega} \right];$$

$$\tilde{K}(x_0) = \frac{(1-\omega) e^{(1-\omega)x_0}}{\omega \bar{m}},$$

$$\bar{m} = \omega(2\omega - 1) - e^{(1-\omega)x_0},$$

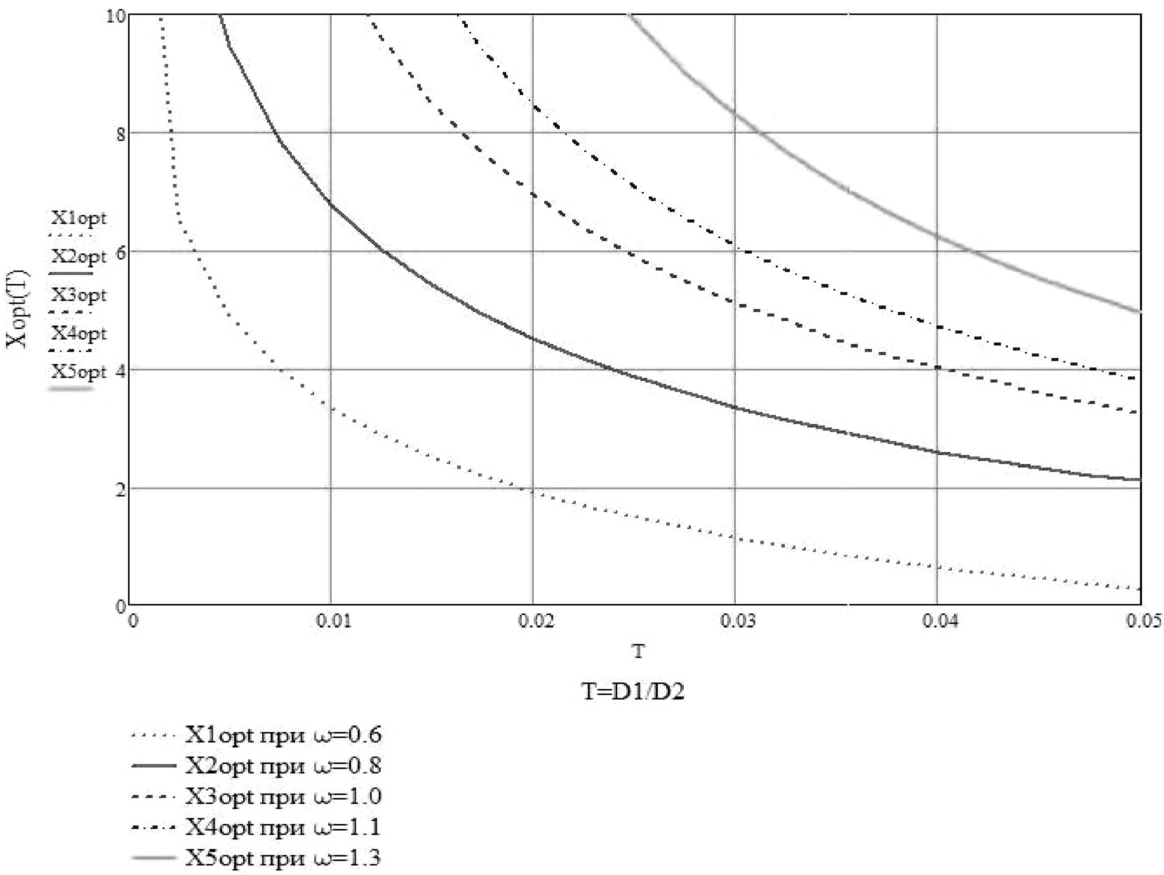

Рисунок. *График функциональной зависимости x_0^{opt} от T*

а при ω=1

$$\tilde{E}(x_0)=\frac{x_0^2+4x_0+2}{2(1+x_0)},$$

$$\tilde{K}(x_0)=\frac{1}{1+x_0}.$$

Аналитически решить задачу нахождения оптимального момента включения резервного прибора, x_0^{opt}, который минимизирует функцию потерь (7), удалось только для значения ω=1. Если ω=1, D_1/D_2<1, то

$$x_0^{opt}=-1+\sqrt{\frac{2D_2}{D_1}-1}.$$

Для значений $\omega\neq1$ задача оптимизации рассматриваемой УСМО решена численно. На рисунке приведены графики зависимости x_0^{opt} от отношения $T=D_1/D_2$ при некоторых значениях ω.

Численные расчеты показали, что, если T<<1, то $x_0^{opt}\to\infty$, т. е. функция потерь (7) достигает минимума, если работает только один прибор. Проведенные в работе расчеты при различных значениях параметров показали, что, если $T\to1$, то $x_0^{opt}\to0$, т. е. (7) достигает минимального значения, если все время работают оба прибора, как основной, так и резервный.

Выводы

1. Изучена безгистерезисная стратегия управления однотипным, симметричным резервным прибором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Получен явный вид функции потерь при различных значениях входных параметров.
2. Проведена оптимизация системы при учете потерь на ожидание и амортизацию. Для частного случая, когда потери от ожидания линейно зависят от числа заявок в системе, а ω=1, задача нахождения оптимального момента включения резервного прибора, решена аналитически. Для значения параметра $\omega\neq1$ задача оптимизации рассматриваемой управляемой системы массового обслуживания решена численно.
3. Полученные результаты могут быть использованы при оптимизации систем, где важна не длина очереди, а время ожидания заявок в очереди.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко И.Н. О СМО со скоростью обслуживания, зависящей от числа требований в системе, и периодическим отключением каналов // Проблемы передачи информации. – 1971. – Вып. 7. – № 2. – С. 106–111.
2. Поттосина С.А. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания, функционирующая в случайной среде // В кн.: Управляемые системы массового обслуживания / под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во ТГУ, 1984. – С. 100–105.
3. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.
4. Горцев А.М., Катаева С.С. Оптимизация гистерезисного управления резервным каналом в вычислительной системе с двумя ЭВМ // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1990. – Вып. 7. – С. 3–8.
5. Зиновьева Л.И., Терпугов А.Ф. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 1. – С. 27–30.
6. Зиновьева Л.И. Система массового обслуживания с гистерезисом и резервным прибором, управляемым временем ожидания // В кн.: Математическая статистика и ее приложения / под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во ТГУ, 1980. – № 6. – С. 152–164.
7. Самочернова Л. И. Оптимизация системы массового обслуживания с переменной интенсивностью зависящей от времени ожидания // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 178–182.
8. Исследование двух однолинейных СМО с интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания / Самочернова Л.И.; Том. политехн. ун-т. – Томск, 2009. – 9 с. – Библиогр: 7 назв. – Рус. – Деп. в ВИНИТИ 29.10.2009, № 659 – В 2009.
9. Самочернова Л.И. Оптимизация системы массового обслуживания с резервным прибором с управлением, зависящим от времени ожидания // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5. – С. 94–97.
10. Самочернова Л.И. Переходной режим работы двухуровневой СМО // Дни науки: Сб. матер. научно-практ. конф. преподавателей и студентов. Вып. 8. Ч. 2 / Отв. ред. А.А. Маслак. – Славянск на Кубани: Издательский центр СГПИ, 2009. – С. 62–68.

Поступила 21.09.2010 г.