

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЧЕЕК ОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.А. Хамухин

Томский политехнический университет

E-mail: aaxtpu@tpu.ru

Рассмотрено применение ячеек однородной структуры для параллельного синхронного вычисления непрерывного вейвлет-преобразования. Показана возможность реализации функционального наполнения ячейки независимо от вида используемого вейвлета. Представлены результаты моделирования матрицы ячеек размером 16×64 для тестового входного сигнала, состоящего из двух гармонических колебаний разной частоты.

Ключевые слова:

Ячейка однородной вычислительной структуры, параллельные вычисления, непрерывное вейвлет-преобразование, математическая модель.

Key words:

Cell of homogeneous computing structure, parallel computation, continuous wavelet transform, mathematical model.

Введение

Методология однородных вычислительных структур (ОВС), разработанная в нашей стране Э.В. Евреиновым с 60-х по 80-е гг. прошлого века [1], при существенном увеличении количества транзисторов на кристалле становится вновь предметом внимания разработчиков [2, 3]. Если в качестве базовой вычислительной ячейки используется микропроцессор, то это позволяет легко перенастраивать ОВС на решение разных задач, но не дает такого увеличения производительности, которое можно ожидать от аппаратной реализации ячейки.

Можно выделить достаточно широкий класс задач, для которых затраты на аппаратную реализацию будут оправданы, если требуемое увеличение производительности будет достигнуто. Так, для решения дифференциальных уравнений в частных производных разработана схема вычислительной ячейки [4], показана возможность реконфигурирования ОВС, состоящей из таких ячеек [5], с помощью математического моделирования продемонстрировано увеличение производительности на порядок [6].

Объект и цель исследования

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) отличается от решения дифференциальных уравнений в частных производных, поэтому прямое использование разработанных ячеек однородной структуры невозможно. Но, используя методику разработки ячейки для решения дифференциальных уравнений в частных производных, можно аналогично разработать и ячейку однородной структуры для НВП, что и является объектом нашего исследования.

Целью исследования является найти математически обоснованный переход от известного математического описания непрерывного вейвлет-преобразования к системе уравнений, содержащих элементы, известные как математические описания функциональных блоков ячеек однородной струк-

туры (интегратор, сумматор, масштабный интегратор и др.).

Пример построения объекта

Непрерывное вейвлет-преобразование при вычислении на цифровой технике требует дискретизации и потому не является строго непрерывным. Но этот термин сохраняется, чтобы отличать его от дискретного вейвлет-преобразования, которое основано на децимации сигнала после каждой пары фильтров высокой и низкой частоты [7]. Иногда для большей точности НВП называют дискретным вейвлет-преобразованием с произвольным шагом дискретизации [8].

Непрерывное вейвлет-преобразование произвольного входного сигнала $S(t)$ описывается уравнением:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \Psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

где $W(a, b)$ – искомая функция; t – время; b – сдвиг по времени; a – масштаб по времени (обратно пропорциональный частоте сигнала); $\Psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$ – не-

которая функция с определенными свойствами (вейвлет).

Для оцифрованного с равномерным шагом сигнала, имеющего конечные пределы по времени, интеграл в уравнении (1) аппроксимируется конечной суммой:

$$W(a_j, b_k) = \frac{1}{\sqrt{a_j}} \sum_{i=0}^n S(t_i) \Psi \left(\frac{t_i - b_k}{a_j} \right) \Delta t, \quad (2)$$

где i, j, k – индексы по времени t , по масштабу a , по сдвигу по времени b ; n – количество шагов по времени; Δt – шаг по времени; $S(t_i)$ – оцифрованный входной сигнал $S(t)$ (данные).

Если принять начальный момент времени нулевым, а сдвиг по времени равным шагу по времени (что соответствует наибольшей разрешающей спо-

собности НВП), то уравнение (2) можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 &W(a_j, b_1) = \\
 &= \frac{\Delta t}{\sqrt{a_j}} \left[\begin{aligned} &S(0)\Psi\left(\frac{0}{a_j}\right) + S(\Delta t)\Psi\left(\frac{\Delta t}{a_j}\right) + \\ &+ S(2\Delta t)\Psi\left(\frac{2\Delta t}{a_j}\right) + \dots + S(n\Delta t)\Psi\left(\frac{n\Delta t}{a_j}\right) \end{aligned} \right]; \\
 &W(a_j, b_2) = \\
 &= \frac{\Delta t}{\sqrt{a_j}} \left[\begin{aligned} &S(0)\Psi\left(\frac{\Delta t}{a_j}\right) + S(\Delta t)\Psi\left(\frac{2\Delta t}{a_j}\right) + \\ &+ S(2\Delta t)\Psi\left(\frac{3\Delta t}{a_j}\right) + \dots \end{aligned} \right]; \\
 &W(a_j, b_3) = \\
 &= \frac{\Delta t}{\sqrt{a_j}} \left[\begin{aligned} &S(0)\Psi\left(\frac{2\Delta t}{a_j}\right) + S(\Delta t)\Psi\left(\frac{3\Delta t}{a_j}\right) + \\ &+ S(2\Delta t)\Psi\left(\frac{4\Delta t}{a_j}\right) + \dots \end{aligned} \right]; \\
 &\dots \\
 &W(a_j, b_k) = \\
 &= \frac{\Delta t}{\sqrt{a_j}} \left\{ \begin{aligned} &S(0)\Psi\left[\frac{(k-1)\Delta t}{a_j}\right] + S(\Delta t)\Psi\left[\frac{k\Delta t}{a_j}\right] + \\ &+ S(2\Delta t)\Psi\left[\frac{(k+1)\Delta t}{a_j}\right] + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

в которой количество уравнений равно количеству сдвигов по времени. Очевидно, что все выражения, на которые должны умножаться данные $S(i\Delta t)$, могут быть вычислены заранее и занесены в виде коэффициентов для блока умножения создаваемой ячейки. Систему уравнений (3) можно записать в виде итерационной формулы по индексу i :

$$\begin{aligned}
 &W^{i+1}(a_j, b_k) = \\
 &= W^i(a_j, b_k) + S(i\Delta t) \left\{ \frac{\Delta t}{\sqrt{a_j}} \Psi \left[\frac{(i+k-1)\Delta t}{a_j} \right] \right\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

или

$$W^{i+1}(a_j, b_k) = W^i(a_j, b_k) + S(i\Delta t)P_{i,j,k}, \quad (5)$$

где

$$P_{i,j,k} = \left\{ \frac{\Delta t}{\sqrt{a_j}} \Psi \left[\frac{(i+k-1)\Delta t}{a_j} \right] \right\}. \quad (6)$$

Формула (5) легко реализуется с помощью цифрового и масштабного интеграторов, применяемых в ячейках однородной структуры. Коэффициенты (6) определяются только видом выбранного материнского вейвлета, не зависят от результатов

текущих вычислений, поэтому могут быть заранее подготовлены и записаны в регистры ячейки.

Следовательно, объединяя упомянутые функциональные блоки в одну вычислительную ячейку, можно вычислить одну точку двумерного массива дискретизированного вейвлет-преобразования, соответствующего точному преобразованию с погрешностью, зависящей от шага дискретизации Δt .

Объединяя далее такие ячейки в однородную вычислительную структуру (матрицу) размером $J \times K$, где J – максимальное количество масштабов по времени, K – максимальное количество сдвигов по времени, можно получать дискретизированное непрерывное вейвлет-преобразование данных в полном объеме.

Еще одна составляющая погрешности вычисления НВП определяется разрядностью представления всех указанных переменных в ячейках однородной структуры, которая легко может масштабироваться в зависимости от поставленной задачи и требуемой точности расчета.

Таким образом, вычисление непрерывного вейвлет-преобразования дискретизированного входного сигнала распределяется между синхронно параллельно работающими ячейками однородной структуры. На вход каждой ячейки синхронно подаются оцифрованные данные, подлежащие НВП, которые умножаются на заранее подготовленные коэффициенты (6), хранящиеся в каждой ячейке. Результат накапливается в цифровом интеграторе с учетом (4). Каждая ячейка матрицы дает одно значение дискретизированного непрерывного вейвлет-преобразования $W(a_j, b_k)$, поэтому вся однородная структура ячеек размером $J \times K$ даст полный спектр значений НВП с погрешностью, зависящей от шага дискретизации и разрядности регистров ячеек. Параллельность и синхронность работы всех ячеек однородной структуры являются залогом достижения максимальной производительности при прочих равных условиях.

Результаты моделирования

Математическая модель (1)–(6) была реализована с помощью MS Excel в таблице размером 16×64 , что соответствовало однородной вычислительной структуре (матрице) того же размера ($J \times K$). В каждой клетке таблицы MS Excel производилось независимое от соседних клеток вычисление одного значения НВП по формуле (5). Таким образом, моделировалась параллельность и синхронность работы ячеек ОВС. Для коэффициентов (6) использовался материнский вейвлет, известный под названием «мексиканская шляпа» (рис. 1), который является второй производной функции Гаусса и описывается уравнением

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \left[e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2} \right) \right], \quad (7)$$

где $x=(t-b)/a$; σ – параметр, позволяющий изменять масштаб вейвлета в соответствии с видом входного сигнала.

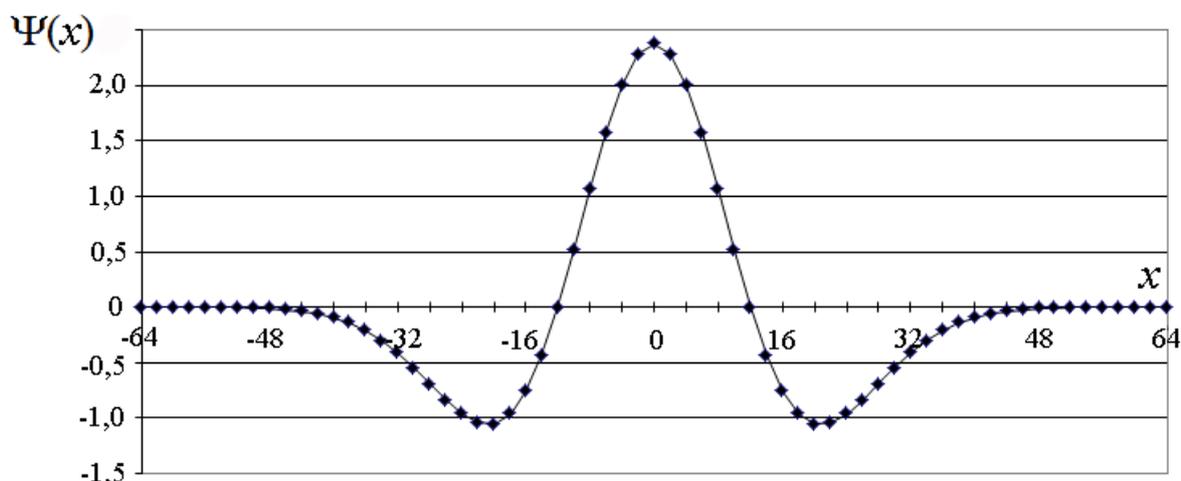


Рис. 1. Вид дискретизированного вейвлета (7): $a=6$, $b=0$, $\sigma=256$

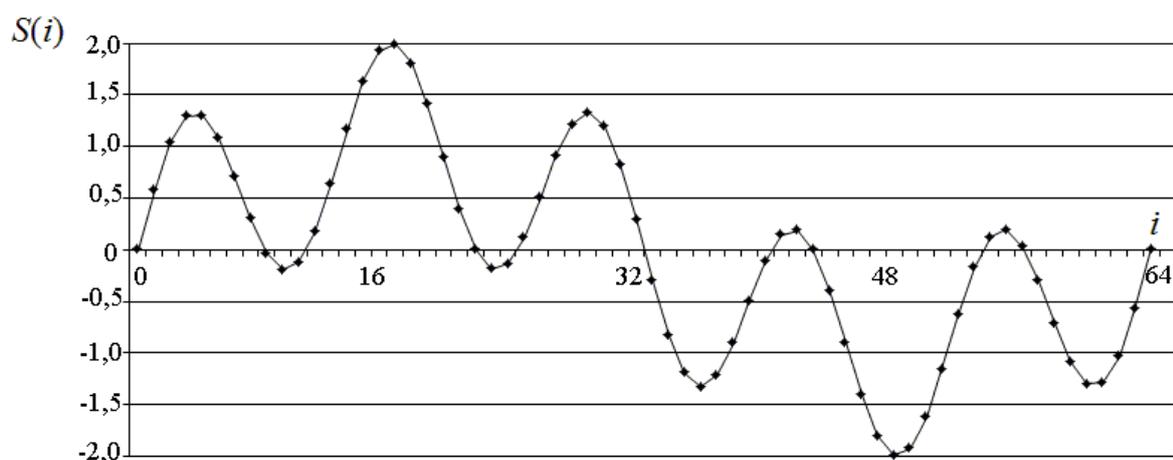


Рис. 2. Вид дискретизированного тестового входного сигнала (8): $A_1=A_2=1$; $\omega=0,627$; $\Delta t=1$

В качестве тестового входного сигнала использовалась часто применяемая для тестирования вейвлет-преобразований функция

$$S(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(5\omega t), \quad (8)$$

представляющая собой сумму двух гармонических колебаний с частотами ω и 5ω . Вид дискретизированного входного сигнала, для которого выполнялось НВП с помощью описанной выше модели, представлен на рис. 2.

Параметры вейвлета при моделировании НВП изменялись в пределах a от 1 до 16, b от 1 до 57. Количество отсчетов тестового входного сигнала $n=64$. Полученное в результате компьютерного моделирования однородной вычислительной структуры непрерывное вейвлет-преобразование $W(a,b)$ входного сигнала $S(t)$ представлено на рис. 3 в виде поверхности в трехмерном пространстве и на рис. 4 в виде проекции линий равного уровня на плоскость (a, b) .

На рис. 5 представлены сечения полученного НВП на разных временных масштабах, хорошо показывающие составляющие частоты тестового входного сигнала.

Исследования математической модели ячейки однородной структуры для вычисления НВП проводились для различных наборов параметров a , b , n , A_1 , A_2 , J , K , ω , σ . От выбора соотношения этих параметров работоспособность созданной модели не зависела, но наглядность полученных результатов была разной. На рисунках, представленных выше, приведены результаты моделирования для одного набора параметров. По графикам видно полное совпадение расчетных данных с результатами, представленными в первоисточнике [7].

Выводы

Показано, что для параллельного вычисления непрерывного вейвлет-преобразования после соответствующей доработки возможно применение ячеек, аналогичных ячейкам однородной структуры для решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Функциональное наполнение ячейки однородной структуры для непрерывного вейвлет-преобразования можно реализовать независимым от вида используемого вейвлета, который рассчитывается заранее для всего диапазона масштабов и сдвигов

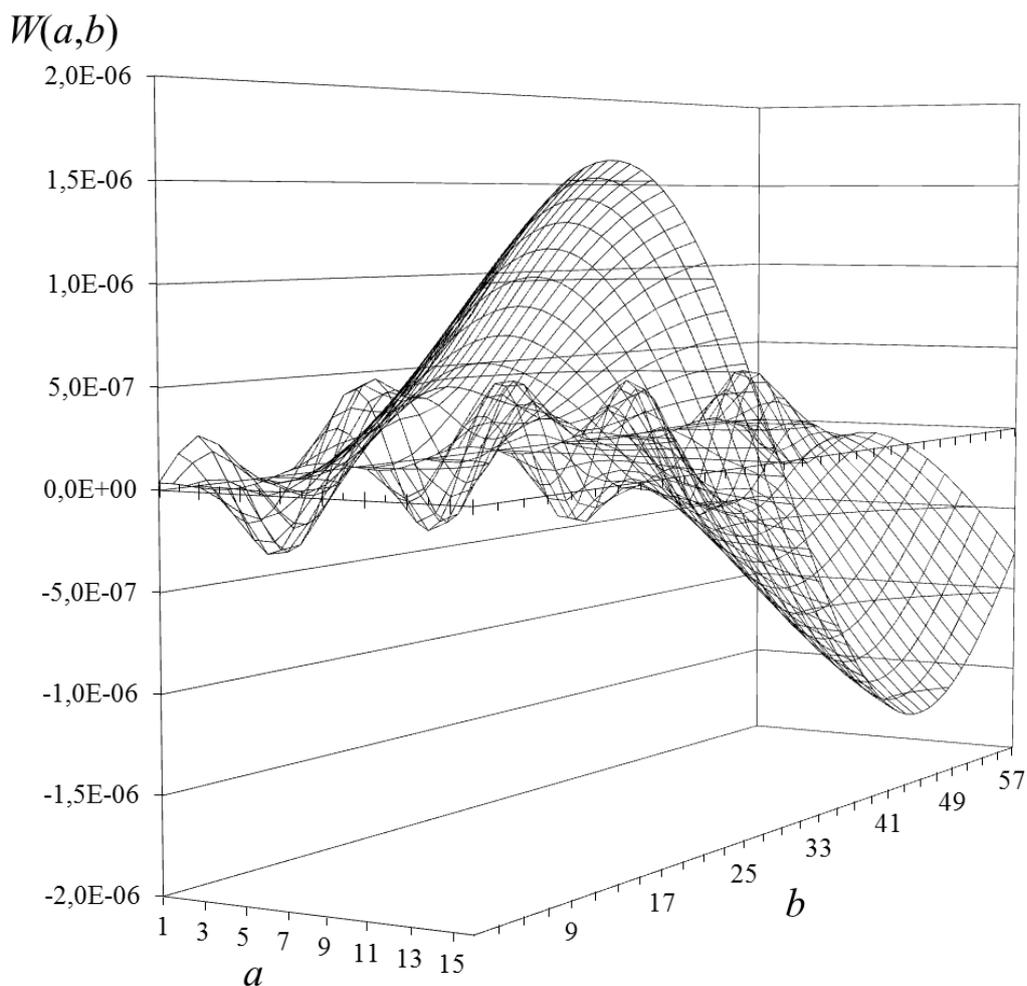


Рис. 3. Результат моделирования непрерывного вейвлет-преобразования тестового входного сигнала (8) с помощью формул ОВС (4)–(6) на вейвлете (7)

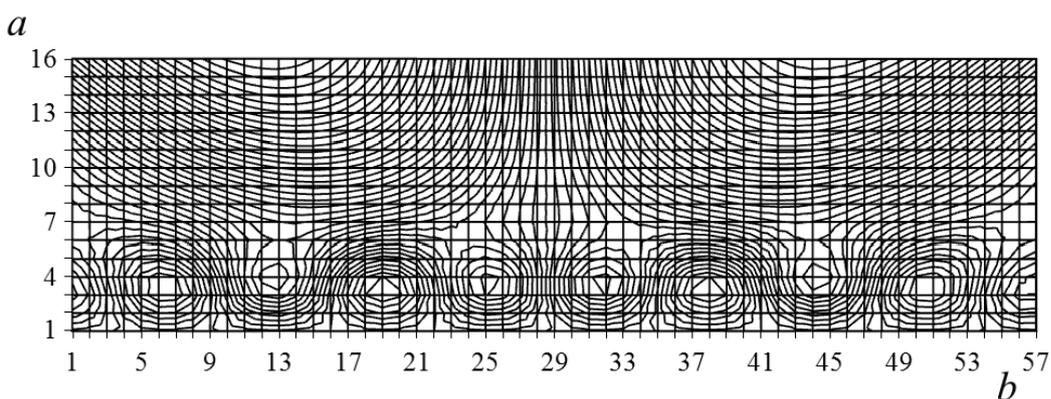


Рис. 4. Проекция непрерывного вейвлет-преобразования $W(a,b)$, полученного с помощью формул ОВС (4)–(6) на плоскость (a,b)

по времени и в виде коэффициентов хранится и используется в регистрах соответствующих ячеек.

Моделирование матрицы ячеек размером 16×64 показало соответствие известным ре-

зультатам непрерывного вейвлет-преобразования тестового входного сигнала, состоящего из двух гармонических колебаний разной частоты.

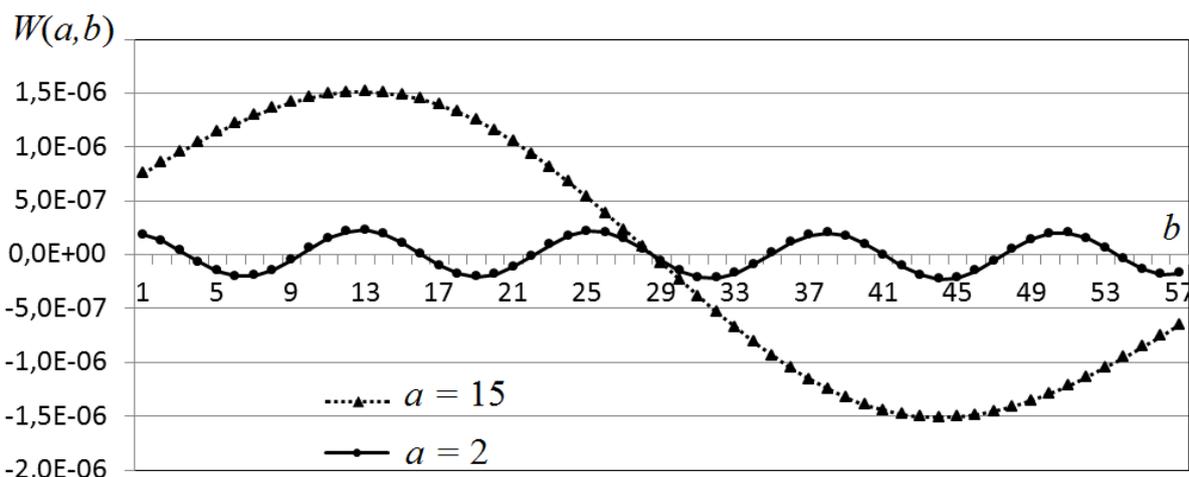


Рис. 5. Сечения полученного непрерывного вейвлет-преобразования тестового входного сигнала на разных временных масштабах

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евреинов Э.В. Однородные вычислительные системы, структуры и среды. – М.: Радио и связь, 1981. – 208 с.
2. Каляев И.А., Левин И.И., Семерников Е.А., Шмойлов В.И. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры. – Ростов на Дону: ЮНЦ РАН, 2008. – 393 с. 2010. URL: <http://parallel.ru/FPGA/papers/rmvs.pdf> (дата обращения: 21.08.2010).
3. Giefers H., Platzner M. A Many-Core Implementation Based on the Reconfigurable Mesh Model // IEEE Xplore DIGITAL LIBRARY. 2010. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/defdeny.jsp?url=http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp%3Ftp%3D%26amp%3D4380623&denyReason=-134&argument=4380623&productsMatched=null> (дата обращения: 21.08.2010).
4. Ячейка однородной структуры для решения дифференциальных уравнений в частных производных: пат. 2359322 Рос. Федерация. № 2007141832/09; заявл. 12.11.2007; опубл. 20.06.2009, Бюл. № 17. – 6 с.
5. Хамухин А.А. Реконфигурирование однородной вычислительной структуры с непрограммируемыми ячейками для решения дифференциальных уравнений в частных производных // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5. – С. 68–72.
6. Хамухин А.А. Ячеечная модель устройства для решения дифференциальных уравнений в частных производных // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5. – С. 62–67.
7. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразования. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.
8. Способ и устройство быстрого вычисления дискретного вейвлет-преобразования сигнала с произвольным шагом дискретизации масштабных коэффициентов: пат. 2246132 Рос. Федерация. № 2003100794/09; заявл. 09.01.2003; опубл. 10.02.2005, Бюл. № 4. – 20 с.

Поступила 01.09.2010 г.