

# Математика и механика.

## Физика

УДК 517

### ЛОКАЛЬНЫЙ $d$ -ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ДРОБНОГО АНАЛИЗА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет

E-mail: vachurikov@list.ru

*Вводится локальный  $d$ -оператор дифференцирования и интегрирования любых конечных вещественных порядков, который является обобщением операций дифференцирования и интегрирования стандартного анализа. Обсуждается возможность построения на основе  $d$ -оператора дробного анализа. Получены частные случаи  $d$ -оператора нецелочисленных и целочисленных порядков.*

#### Ключевые слова:

*анализ, дробный анализ нецелочисленных порядков, дробный анализ целочисленных порядков,  $d$ -оператор, оператор Адамара, логарифмические случаи.*

#### Key words:

*Fractional analysis, fractional analysis nonintegral order, fractional analysis integer order,  $d$ -operator, operator Hadamar, logarithmic events.*

#### Введение

Дробный анализ является обобщением стандартного анализа на случай дифференцирования и интегрирования любых конечных вещественных порядков. Развитие дробного анализа основывается, прежде всего, на операторах дифференцирования и интегрирования (или дробного *интегродифференцирования*) любых конечных вещественных порядков.

Большинство введённых ранее операторов дробного интегродифференцирования являются интегральными преобразованиями [1–3], определёнными в рамках стандартного анализа и относятся к нелокальным теориям. Этими интегральными преобразованиями заменяются операторы дифференцирования и интегрирования стандартного анализа. Замена нелокальными операторами обобщает локальные операции дифференцирования и интегрирования стандартного анализа в рамках самого стандартного анализа.

Стандартный анализ в своей основе является локальной теорией, поэтому строить его обобщения было бы логично на основе локальных операторов дифференцирования и интегрирования любых конечных вещественных порядков. При этом очень важно, чтобы в частном случае вводимый локальный оператор давал бы операторы дифферен-

цирования и интегрирования стандартного анализа (*принцип соответствия*) [4].

Попытки построения локального дробного анализа раньше уже предпринимались, например, на основе оператора Адамара [5, 6]. На этом пути был получен ряд положительных результатов, но выявились также и недостатки, которые касались, прежде всего, самого оператора Адамара.

Дальнейшее развитие локального дробного анализа в данном направлении возможно при замене оператора Адамара, на другой локальный оператор, лишенный его недостатков, но с сохранением всего положительного, что было сделано на основе оператора Адамара.

Для устранения недостатков оператора Адамара и были предприняты попытки сформулировать новый оператор дробного интегродифференцирования, который был назван  $d$ -оператором [4]. Во всех этих случаях получались операторы, которые тоже не были лишены недостатков.

В данной работе вводится  $d$ -оператор, в котором удалось устранить недостатки оператора Адамара и недостатки предыдущих версий  $d$ -оператора.

Строго говоря,  $d$ -оператор постулируется на основе ряда обоснованных предположений, часть из которых приведена в [4].

### Определение $d$ -оператора

**Определение.** Оператор  $d^{\pm s}x$  будем называть  $d$ -оператором дифференцирования и интегрирования дробного порядка  $s \geq 0$ , действующим над множеством степенных функций  $x^q$ ;  $s, x, q \in \mathbb{R}$ ;  $|s|, |q| = \text{const} < \infty$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} d^{-s}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)} x^{q-s}; q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ d^s x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)} x^{q+s} + C_s(x); \\ \left\{ \begin{array}{l} q \neq -1, -2, -3, \dots; s \notin \mathbb{N}; \\ q = -1, -2, -3, \dots; s \in \mathbb{N}; s < |q|; \end{array} \right. \\ d^{-s}x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(-s-n+1)} x^{-n-s}; \\ n \in \mathbb{N}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ d^s x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(s-n+1)} x^{-n+s} + C_s(x); \\ n \in \mathbb{N}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ d^1 x : x^{-1} = \ln |x| + C_1; C_1 = \text{const}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $C_s(x)$  и  $C_1$  – соответственно полиномы интегрирования дробного порядков  $s$  и 1. Производная порядка  $s$  от полинома интегрирования порядка  $s$  равна нулю,

$$d^{-s}x : C_s(x) = 0.$$

*Первое* равенство в  $d$ -операторе (1) определяет дробное дифференцирование порядка  $s \leq 0$  при отсутствии полюсов у гамма-функции в числителе коэффициента оператора. Дополнительные условия исключают случаи дифференцирования в «полюсах», которые учтены в *третьем* равенстве.

*Второе* равенство определяет дробное интегрирование порядка  $s \geq 0$ , при отсутствии полюсов у гамма-функции в числителе коэффициента оператора. Первые дополнительные условия в данном равенстве исключают случаи интегрирования в «полюсах», которые учитываются *четвёртым* равенством. Вторые дополнительные условия исключают интегрирование в логарифмических случаях.

*Третье* и *четвёртое* равенства определяют дифференцирование и интегрирование «в полюсах», когда показатели степени степенных функций имеют отрицательные целочисленные значения.

*Пятое* равенство определяет интегрирование в логарифмическом случае, как в стандартном анализе.

Выражение для  $d$ -оператора (1) записано в развёрнутом виде и является достаточно громоздким, но его можно выразить более компактно, если производные и интегралы для рассматриваемых случаев записать одним равенством

$$\left\{ \begin{array}{l} d^{\pm s}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q \pm s + 1)} x^{q \pm s} + C_s(x); \\ \left\{ \begin{array}{l} q \neq -1, -2, -3, \dots; s \leq 0; \\ q \neq -1, -2, -3, \dots; s \notin \mathbb{N}; \\ q = -1, -2, -3, \dots; s \in \mathbb{N}; s < |q|; \end{array} \right. \\ d^{\pm s}x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\pm s - n + 1)} x^{-n \pm s} + C_s(x); \\ n \in \mathbb{N}; s \neq 0, 1, 2, 3, \dots; \\ d^1 x : x^{-1} = \ln |x| + C_1; C_1 = \text{const}; \\ C_0(x) = C_{-s}(x) = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Последнее, *четвёртое* равенство в данном представлении  $d$ -оператора явно указывает на то, что полиномы интегрирования для операции дифференцирования (порядки  $-s$ ) и в случае нулевого порядка (единичный оператор) всегда равны нулю.

Предложенный  $d$ -оператор является существенно преобразованным оператором Адамара [5, 6], который соответствует *первому* равенству и *второму* равенству в (1), но без учёта дополнительных условий в данных равенствах налагаемых на показатели степенных функций и порядка дифференцирования и интегрирования (1).

В операторе Адамара отсутствует возможность дифференцировать и интегрировать, когда в числителе коэффициента оператора гамма-функция имеет полюс или когда не учтены логарифмические случаи. Это не позволяет на основе оператора Адамара построить полноценный дробный анализ удовлетворяющий принципу соответствия.

В данной версии  $d$ -оператора учтены все возможные особые случаи дифференцирования и интегрирования степенных функций. Возникающие полюса у гамма-функций в числителях коэффициентов  $d$ -оператора заменяются вычетами в соответствующих полюсах, при условии, что в знаменателе у гамма-функций полюса не появляются одновременно с полюсами в числителе. Также учтены все возможные варианты логарифмических случаев при интегрировании.

Учёт логарифмических случаев и отсутствие полюсов в числителях коэффициентов в  $d$ -операторе, делает его значительно более привлекательным, чем оператор Адамара, для систематического и непротиворечивого построения полноценного локального дробного анализа. Кроме того, для  $d$ -оператора выполняется принцип соответствия, согласно которому в частном случае, когда порядки дифференцирования и интегрирования равны 1,  $d$ -оператор даёт операторы интегрирования и дифференцирования стандартного анализа.

### Частные случаи $d$ -оператора

Рассмотрим два наиболее важных случая  $d$ -оператора (1).

Целочисленные и нецелочисленные порядки интегриродифференцирования  $d$ -оператора (1) приводят к качественно различным следствиям, поэтому имеет смысл рассмотреть отдельно эти случаи  $d$ -оператора.

**Нецелочисленные порядки.** Если в  $d$ -операторе (1) порядки дробного дифференцирования и дробного интегрирования всегда являются нецелочисленными, тогда в нём полностью отсутствуют логарифмические случаи, возникающие при интегрировании степенных отрицательных целочисленных порядков (пятое равенство в (1)). Исключив логарифмические случаи из рассмотрения, получим более простое выражение для  $d$ -оператора, который будем называть  *$d$ -оператором нецелочисленных порядков*

$$\left\{ \begin{array}{l} d^{-s}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)} x^{q-s}; \\ s \neq 0, 1, 2, \dots; q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ d^s x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)} x^{q+s} + C_s(x); \\ s \neq 0, 1, 2, \dots; q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ d^{-s}x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(-s-n+1)} x^{-n-s}; \\ s \neq 0, 1, 2, \dots; n \in \mathbb{N}; \\ d^s x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(s-n+1)} x^{-n+s} + C_s(x); \\ s \neq 0, 1, 2, \dots; n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Полиномами интегрирования для не целочисленных порядков интегрирования будут являться

$$\text{ряды } C_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+s}; a_n = \text{const} \quad [4].$$

**Целочисленные порядки.** Третье и четвёртое равенства  $d$ -оператора (1) определяют дифференцирование и интегрирование только для нецелочисленных порядков, поэтому для целочисленных порядков они теряют смысл.

Все возможные производные и неопределённые интегралы целочисленных порядков определяются первым, вторым и пятым равенствами (1).

В результате можно записать частный случай  $d$ -оператора, который будем называть  *$d$ -оператором целочисленных порядков*

$$\left\{ \begin{array}{l} d^{-m}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)} x^{q-m}; \\ m = 0, 1, 2, \dots; q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ d^m x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)} x^{q+m} + C_m(x); \\ m = 0, 1, 2, \dots; \begin{cases} q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ q = -1, -2, -3, \dots; m < |q|; \end{cases} \\ d^1 x : x^{-1} = \ln|x| + C_1; C_1 = \text{const}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Полиномами интегрирования для целочисленных порядков интегрирования будут полиномы

$$C_m(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i; a_i = \text{const} \quad [4].$$

Для  $d$ -оператора целочисленных порядков имеются особые частные случаи, связанные с одновременным появлением полюсов у гамма-функций в числителях и знаменателях коэффициентов  $d$ -оператора, а при интегрировании степенных функций могут возникать логарифмические случаи. Все эти особые случаи возникают при действии оператора на степенные функции с отрицательными целочисленными порядками. Распишем более подробно  $d$ -оператор целочисленных порядков с учётом этих особых случаев. В результате получим более громоздкое выражение для  $d$ -оператора, в котором эти случаи выглядят более понятно и наглядно.

Так первое равенство (1), отвечающее за дифференцирование целочисленных порядков распадается на случаи, когда равенство сохраняется и на особые случаи, которые исключаются из данного равенства путём наложения условий на порядки дифференцирования и показатели степени в степенных функциях.

Особые случаи соответствуют дифференцированию степенных функций целочисленных отрицательных порядков в «полюсах». Остальные случаи дифференцирования не являются особыми.

В первом случае в числителе коэффициента  $d$ -оператора значение гамма-функции попадает в полюс. В этом случае бесконечное значение в гамма-функции заменяется вычетом в соответствующем полюсе. Во втором случае полюса у гамма-функций появляются одновременно в числителе и в знаменателе коэффициента  $d$ -оператора. В этом случае полюса сокращаются, а результат получается конечным.

Пятое равенство для целочисленных порядков интегриродифференцирования описывает случай интегрирования в самом простом из логарифмических случаев.

В дальнейшем для более подробного рассмотрения целочисленных порядков дифференцирования и интегрирования нужно использовать алгебраические соотношения, которые просто выводятся из  $d$ -оператора целочисленных порядков [4].

**Теорема 1.** Любой  $d$ -оператор дифференцирования или интегрирования целочисленного порядка  $m$  можно разложить соответственно на произведение  $m$  операторов производных или интегралов первого порядка

$$\begin{aligned} d^{-n}x : f(x) &= \underbrace{d^{-1}x : d^{-1}x : \dots d^{-1}x}_n : f(x) \equiv \\ &\equiv \underbrace{\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}}_n f(x). \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} d^n x : f(x) &= d^n x : f(x) = \underbrace{d^1 x : d^1 x : \dots d^1 x}_n : f(x) \equiv \\ &\equiv \underbrace{\int f(x) dx}_n \dots \underbrace{\int f(x) dx}_n \dots \underbrace{\int f(x) dx}_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Обратное утверждение тоже верно.

**Теорема 2.** Произведение  $n$  операторов интегрирования (дифференцирования) первого порядка равносильно  $d$ -оператору интегрирования (дифференцирования) порядка  $n$ .

Заметим, что для  $d$ -оператора нецелочисленных порядков теоремы 1 и 2 в общем случае не верны.

Теперь рассмотрим частные случаи внешней алгебры  $d$ -оператора целочисленных порядков, т. е. для случаев, когда  $d$ -оператор действует на степенные функции.

Дифференцирование целочисленных порядков степенных функций с целым отрицательным показателем

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m};$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots; m \in \mathbb{N}.$$

Эту формулу легко упростить, используя (5) и свойство гамма-функции

$$\Gamma(\alpha - m) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - m)} =$$

$$= \frac{(-1)^m \Gamma(\alpha)}{(1 - \alpha)(2 - \alpha) \dots (m - \alpha)}.$$

Заменив  $\alpha$  на  $-n+1$ , получим

$$\Gamma(-n+1-m) = \frac{\Gamma(-n+1)}{(-n)(-n-1) \dots (-n+1-m)} =$$

$$= \frac{(-1)^m \Gamma(-n+1)}{n(n+1) \dots (n-1+m)}.$$

Подставив это выражение в рассматриваемую формулу дифференцирования, получим

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m} =$$

$$= \frac{(-1)^m n(n+1) \dots (n-1+m) \Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+1)} x^{-n-m} =$$

$$= (-1)^m n(n+1) \dots (n-1+m) x^{-n-m};$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots; m \in \mathbb{N}.$$

Данную формулу можно представить иначе, если переписать гамма-функции через факториалы

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m} =$$

$$= \frac{(-1)^m (n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-m-n}. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае, если полюсы одновременно образуются в числителе и в знаменателе коэффициента  $d$ -оператора, данную формулу можно записать другим способом, заменив бесконечности в полюсах соответствующими вычетами

$$d^{-m}x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-n-m} =$$

$$= \frac{\text{Res}_{1-n} \Gamma(-n+1)}{\text{Res}_{1-n-m} \Gamma(1-m-n)} x^{-n-m} = \frac{(-1)^{n-1} (n+m-1)!}{(n-1)! (-1)^{n+m-1}} x^{m-n} =$$

$$= \frac{(-1)^m (n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-n-m}; n = 0, 1, 2, 3, \dots; m \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) совпадают, что является аргументом в пользу замены полюсов соответствующими вычетами.

**Интегрирование целочисленных порядков степенных функций с целочисленной отрицательной степенью.** В случае, когда интегралы целочисленных порядков  $m$  берутся от степенных функций с целочисленным отрицательным показателем  $-n$ , но  $m < n$ , тогда задача полностью решается также при интегрировании в рамках стандартного анализа в силу разложимости оператора интегрирования целочисленного порядка  $m$  на  $m$  операторов первого порядка (6). Тогда получим формулу

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^m}{(n-1)(n-2) \dots (n-m)} x^{m-n} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x); \quad (9)$$

Данную формулу можно получить, как и в случае дифференцирования, если у гамма-функции снова заменить соответствующими вычетами бесконечности в полюсах

$$d^m x : x^{-n} = \frac{\Gamma(-n+1)}{\Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) =$$

$$= \frac{\text{Res}_{1-n} \Gamma(-n+1)}{\text{Res}_{1-n+m} \Gamma(-n+m+1)} x^{m-n} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} (n-m-1)!}{(n-1)! (-1)^{n-m-1}} x^{m-n} + C_m(x) =$$

$$= \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x); m < n; m, n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Полученные формулы (9) и (10) совпали с формулами стандартного анализа, что подтверждает выбранные способы устранения бесконечностей.

**Целочисленное интегрирование в логарифмических случаях.** При интегрировании целочисленных порядков  $m$  степенных функций с целочисленным отрицательным показателем степени  $-n$  возникают логарифмические случаи, причём должно выполняться условие  $m \geq n$ . Всего имеется бесконечное счётное множество логарифмических случаев.

Рассмотрим более подробно логарифмические случаи.

Если  $n$  раз проинтегрировать функцию с показателем степени  $-n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то легко получить формулу, которая обобщает *пятое* равенство  $d$ -оператора (1):

$$\underbrace{\int \dots \int}_n x^{-n} \underbrace{dx dx \dots dx}_n \equiv \int x^{-n} d^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln |x| + C_n(x). \quad (11)$$

Используя выбранные обозначения, формула (11) в обозначениях дробного анализа будет записываться

$$d^n x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln |x| + C_n(x). \quad (12)$$

Но случаями, когда  $d^n x : x^{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), логарифмические случаи полностью не исчерпываются. Рассмотрим интегралы целочисленных порядков  $m$  от степенных функций с целочисленным отрицательным показателем  $-n$  и  $m > n$ . Эти случаи тоже можно рассмотреть в рамках стандартного анализа с учётом (12).

$$\begin{aligned} d^m x : x^{-n} &= d^{m-n} x : d^n x : x^{-n} = \\ &= d^{m-n} x : \left( \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln |x| \right) + C_n(x) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} d^{m-n} x : \ln |x| + C_n(x); \quad m > n; m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (13)$$

В данной формуле необходимо найти интегралы порядков  $m-n$ :

$$d^{m-n} x : \ln |x|.$$

Данные интегралы можно получить в рамках стандартного анализа.

В случаях, когда порядки интегрирования будут 1, 2, 3 и 4, получим

$$\begin{aligned} d^1 x : \ln |x| &= x \ln |x| - x + C_1; \quad C_1 = \text{const}; \\ d^2 x : \ln |x| &= \frac{1}{2} x^2 \ln |x| - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C_2(x); \\ d^3 x : \ln |x| &= \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 \ln |x| - \frac{1}{3^2} x^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2^2 \cdot 3} x^3 - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + C_3(x) \\ d^4 x : \ln |x| &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 \ln |x| - \frac{1}{4^2} x^4 - \\ &\quad - \frac{1}{3^2 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + C_4(x). \end{aligned}$$

Общую формулу для  $k$  интегрирований первого порядка натурального логарифма легко получить, обобщив данную последовательность интегралов:

$$d^k x : \ln |x| = \frac{1}{k!} x^k \left( \ln |x| - \sum_{l=1}^k \frac{(k-l)!}{k-l+1} \right) + C_k(x); \quad k, l \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим общую формулу интегрирования для рассматриваемых случаев  $m \geq n$ ;  $n, m, l \in \mathbb{N}$ :

$$d^m x : x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(m-n)!} \times x^{m-n} \left( \ln |x| - \sum_{l=1}^{m-n} \frac{(m-n-l)!}{m-n-l+1} \right) + C_m(x). \quad (15)$$

Для частного случая, когда  $m=n$  будет справедлива формула интегрирования (11). В частном случае, когда  $m=1$ , а  $n=1$ , получим формулу стандартного анализа, *пятое* равенство в (1).

Описанные случаи интегрирования являются *логарифмическими*. Целое число  $m-n+1$  будем называть *порядком логарифма*.

Используя *первое*, *второе* и *третье* равенства из (4) для степенных функций с показателями степени не равными целым отрицательным числам и полученные соотношения (7), (9), (12), (14) и (15) в случае отрицательных целочисленных порядков степенных функций, окончательно запишем  $d$ -оператор целочисленных порядков в развёрнутом виде, который эквивалентен выражению (4)

$$\left\{ \begin{aligned} d^{-m} x : x^q &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)} x^{q-m}; \quad m=0,1,2,\dots; \\ &\quad q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ d^{-m} x : x^{-n} &= \frac{(-1)^m (n+m-1)!}{(n-1)!} x^{-m-n}; \quad n \in \mathbb{N}; \quad m=0,1,2,\dots; \\ d^m x : x^q &= \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)} x^{q+m} + C_m(x); \quad m=0,1,2,\dots; \\ &\quad q \neq -1, -2, -3, \dots; \\ d^m x : x^{-n} &= \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{(n-1)!} x^{m-n} + C_m(x); \quad m=0,1,2,\dots; \\ &\quad n \in \mathbb{N}; \quad m < n; \\ d^1 x : x^{-1} &= \ln |x| + C_1; \\ d^n x : x^{-n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \ln |x| + C_n(x); \quad n \in \mathbb{N}; \\ d^k x : \ln |x| &= \frac{1}{k!} x^k \left( \ln |x| - \sum_{l=1}^k \frac{(k-l)!}{k-l+1} \right) + C_k(x); \\ &\quad k, l \in \mathbb{N}; \\ d^m x : x^{-n} &= \\ &= \frac{(-1)^{n-1} x^{m-n}}{(n-1)!(m-n)!} \left( \ln |x| - \sum_{l=1}^{m-n} \frac{(m-n-l)!}{m-n-l+1} \right) + C_m(x); \\ &\quad m \geq n; m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Здесь *первое* и *второе* равенства является следствием *первого* равенства (1). *Третье* и *четвёртое* равенства являются частными случаями *второго* равенства (1). *Пятое*, *шестое*, *седьмое* и *восьмое* равенства более подробно описывают все возможные логарифмические случаи при целочисленном интегрировании. *Шестое*, *седьмое* и *восьмое* являются следствием *второго* и *пятого* равенств (1). *Восьмое* равенство наиболее общее и описывает все возможные логарифмические случаи, а *пятое*, *шестое* и *седьмое* являются важными частными случаями *восьмого* равенства.

В представлении (16)  $d$ -оператора целочисленных порядков явно выделены особые случаи, что

делает его более громоздким, чем в представлении (4), но при этом более удобным для вычислений.

В частном случае из  $d$ -оператора целочисленных порядков (4) (или (16)) легко получить для порядка  $s=1$  формулы дифференцирования и интегрирования степенных функций из стандартного анализа, что подтверждает принцип соответствия

$$d^{-1}x : x^q \equiv \frac{d}{dx} x^q = qx^{q-1};$$

$$d^1x : x^q \equiv \int x^q dx = \frac{1}{q+1} x^{q+1} + C_1;$$

$$d^1x : x^{-1} \equiv \int x^{-1} dx = \ln |x| + C_1.$$

В результате  $d$ -оператор (1) (или (2)) распадается на  $d$ -оператор нецелочисленных порядков (3) и  $d$ -оператор целочисленных порядков (4) (или (16)). Каждый из этих операторов лежит в основе двух основных направлений дробного анализа, а именно, *дробного анализа нецелочисленных порядков* и *дробного анализа целочисленных порядков*. Эти направления качественно отличаются друг от друга и требуют отдельного и глубокого рассмотрения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. — Минск: Наука и техника, 1987. — 687 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
4. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе  $d$ -оператора. — Томск: Изд-во ТПУ, 2010. — 118 с.
5. Hadamar J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor // J. math. pures et appl. — 1892. — V. 8. — Ser. 4. — P. 101–186.
6. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. — 2008. — Т. 312. — № 2. — С. 16–20.

Поступила 17.12.2010 г.

УДК 519.213;519.23

## УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИОННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

В.И. Денисов, В.С. Тимофеев

Новосибирский государственный технический университет  
E-mail: netsc@rambler.ru

*Работа посвящена задаче оценивания параметров регрессионных уравнений. Используя устойчивые распределения, авторы предлагают новый алгоритм, обеспечивающий максимально правдоподобное оценивание даже в ситуациях, когда распределение случайных ошибок имеет большую дисперсию. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили работоспособность разработанного алгоритма и позволили дать ряд рекомендаций о практическом использовании.*

#### Ключевые слова:

Регрессия, метод максимального правдоподобия, устойчивые распределения, характеристическая функция, преобразование Фурье.

#### Key words:

Regression, maximum likelihood method, stable distributions, characteristic function, fourier transformation.

Устойчивые распределения упоминаются еще в работах П. Леви, датированных 1925 г. Они вводятся как предельные (имеется в виду сходимость по распределению) для суммы одинаково распределенных случайных величин. Наиболее известным представителем данного семейства является нормальное распределение. На нем основано целое множество методов прикладного статистического анализа. В частности, классическая теория регрессионного анализа предполагает существование достаточно большого числа малых случайных величин, интерпретируемых как разного рода

ошибки, присущих рассматриваемой ситуации. При этом в центральной предельной теореме [1] утверждается, что при некоторых дополнительных предположениях сумма этих ошибок есть нормально-распределенная величина.

Однако практически реализуемые распределения далеко не всегда являются нормальными, что неоднократно отмечалось разными авторами. Тем не менее предположение о существовании определенного числа одинаково распределенных составляющих может оставаться верным. Именно в таком случае следует обратиться к устойчивым ра-