ОБРАТНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КУБОИДА

К.Н. Яценко, К.В. Слюсарский, Ю.Я. Раков
Томский политехнический университет
ЭНИН, АТЭС

Введение

Теплопроводность вещества является распространенным явлением и существенно влияет на различные аспекты технологических процессов: от расчетов надежности до определения тепловых потоков [1]. Значение коэффициента теплопроводности определяет поведение вещества при теплопроводности и критически важно для его корректного описания [2]. Существующие экспериментальные процедуры для его определения обычно зависят от коэффициента теплопроводности, который сложно замерить прямыми методами. Это привносит существенную погрешность в определяемое значение коэффициента теплопроводности [3]. Для устранения влияния данного явления на точность измерений, они реализуются в вакууме.

Для определения эксплуатационных параметров процедуры измерения веществ с значением коэффициента теплопроводности в диапазоне 0,04-5 Вт/(м К) была сформулирована и исследована модель теплопереноса.

Физическая модель теплопереноса

Объектом испытаний являлся куб с тремя измерениями LX, LY и LZ. Он нагревается тепловым потоком с одной стороны (с верхней грани), а отводится тепло в окружающую среду при помощи радиации. Температура окружающей среды постоянна и равна T_{oc} .

При моделировании интегральная степень черноты ε и коэффициент абсорбции поверхности образца A считались постоянными, а также коэффициент теплопроводности не зависящим от температуры λ [4].

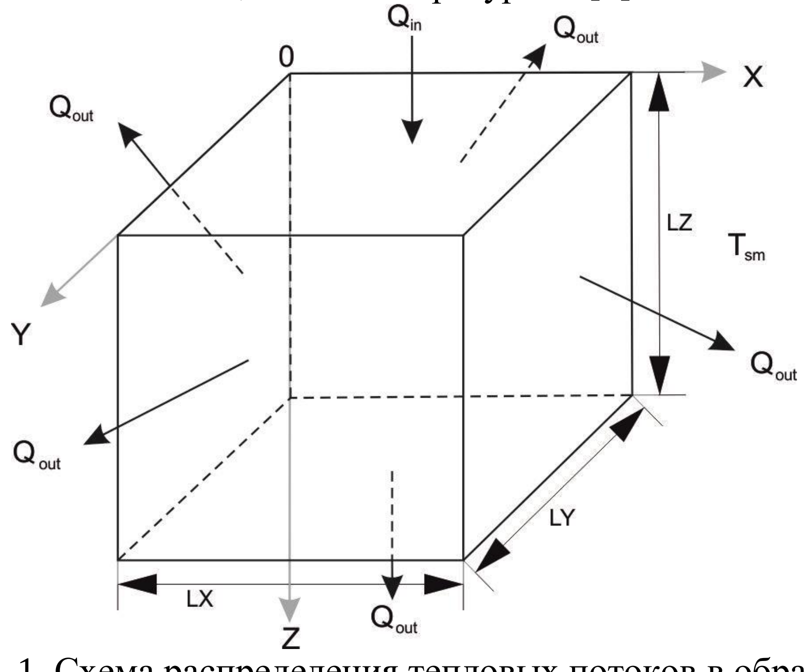

Рис. 1. Схема распределения тепловых потоков в образце.

Математическая модель и методы решения

Постановка математической модели обратной задачи теплопроводности в безразмерном виде для кубоида включает в себя уравнение теплопроводности (1), нелинейные граничные условия (2 – 7) и критерий оптимизации (8):

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}+\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{z}^2}=0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=0}=\pi_1\cdot(\tilde{T}^4_{\tilde{z}=0}-\tilde{T}^4_{oc})-1 \tag{2}$$

$$-\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}}\right)_{\tilde{z}=1}=\pi_1\cdot(\tilde{T}^4_{\tilde{z}=1}-\tilde{T}^4_{oc}) \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}\right)_{\pi_2=0}=\pi_1\cdot(\tilde{T}^4_{\tilde{x}=0}-\tilde{T}^4_{oc}) \tag{4}$$

$$-\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}}\right)_{\pi_2}=\pi_1\cdot(\tilde{T}^4_{\pi_2}-\tilde{T}^4_{oc}) \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}}\right)_{\pi_3=0}=\pi_1\cdot(\tilde{T}^4_{\tilde{y}=0}-\tilde{T}^4_{oc}) \tag{6}$$

$$-\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{y}}\right)_{\pi_3}=\pi_1\cdot(\tilde{T}^4_{\pi_3}-\tilde{T}^4_{oc}) \tag{7}$$

$$\left|\pi_4-\int_{\tilde{F}}\left[\tilde{T}^4_{\tilde{z}=1}-\tilde{T}^4_{oc}\right]\partial\tilde{F}\right|\to \min \tag{8}$$

Здесь $\pi_1=\frac{\varepsilon\sigma\cdot LZ^4\cdot q_F^3A^3}{\lambda^4}$, $\pi_2=\frac{LX}{LZ}$, $\pi_3=\frac{LY}{LZ}$, $\pi_4=\frac{Q_{LZ}\lambda^4}{\varepsilon\sigma q_F^4A^4\cdot LZ^6}$; $\tilde{T}=T\Big/\left(\frac{q_F A\cdot LZ}{\lambda}\right)$, $\tilde{T}_{oc}=T_{oc}\Big/\left(\frac{q_F A\cdot LZ}{\lambda}\right)$, $\tilde{F}=\frac{F}{LZ^2}$, $\tilde{x}=\frac{X}{LZ},\tilde{y}=\frac{Y}{LZ},\tilde{z}=\frac{Z}{LZ}$; Q_{LZ} – интегральный тепловой поток с нижней поверхности образца.

Из постановки математической модели обратной задачи теплопроводности следует, что решение получается путем решения прямой проблемы теплопроводности с различными значениями коэффициента теплопроводности. Итерационная процедура прекращается при достижении минимума искомой функции (уравнение 8).

Численные методы используются для решения нелинейной задачи и получения набора значений коэффициента теплопроводности. Для решения использовался метод конечных разностей.

Конечно-разностные аналоги дифференциальных уравнений решались методами простой итерации и последовательной релаксации (ускоренным методом Лейбманна).

Метод дихотомии использовался для определения коэффициента теплопроводности в обратной задаче [5].

Результаты и обсуждение

Рисунок 2 – 5 иллюстрирует зависимость между безразмерными параметрами $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ для определения геометрических размеров образца и физических свойств эксперимента. Коэффициент теплопроводности необходимо определять в определенном диапазоне данных параметров.

Значение π_1 должно находиться в диапазоне значений 0,001 – 0,01 при относительном размере образца $\pi_2 = \pi_3$ в диапазоне значений от 1 до 10. В таком случае, значение градиента температур в образце не превысит 100 К и применение математической модели (1 – 8) становится возможным.

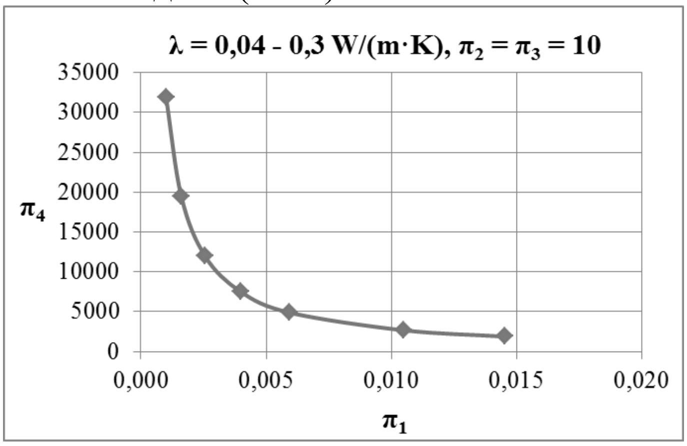

Рис. 2. Зависимость между π_4 и π_1.

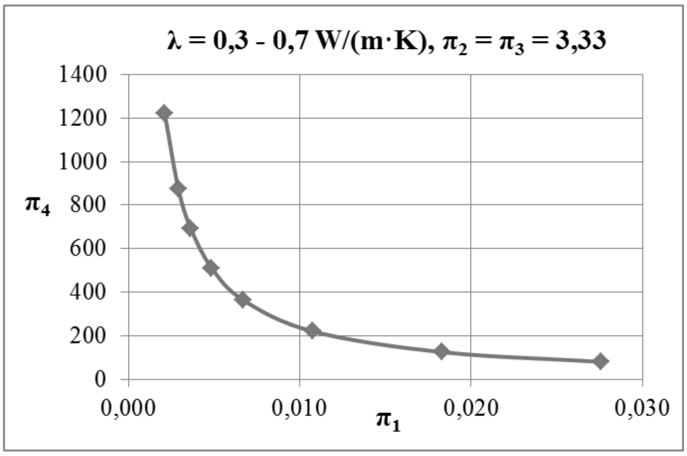

Рис. 3. Зависимость между π_4 и π_1.

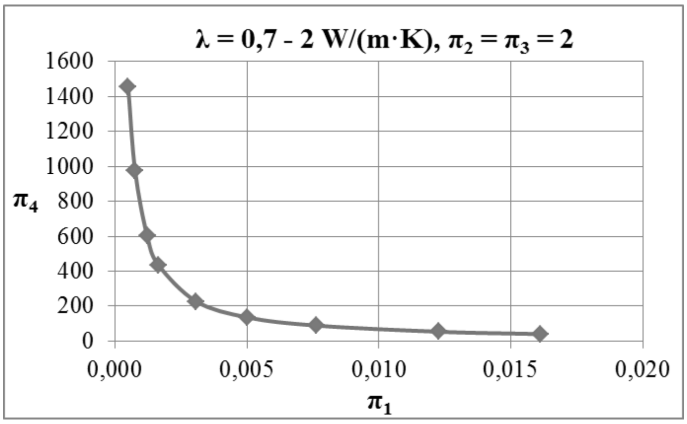

Рис. 4. Зависимость между π_4 и π_1.

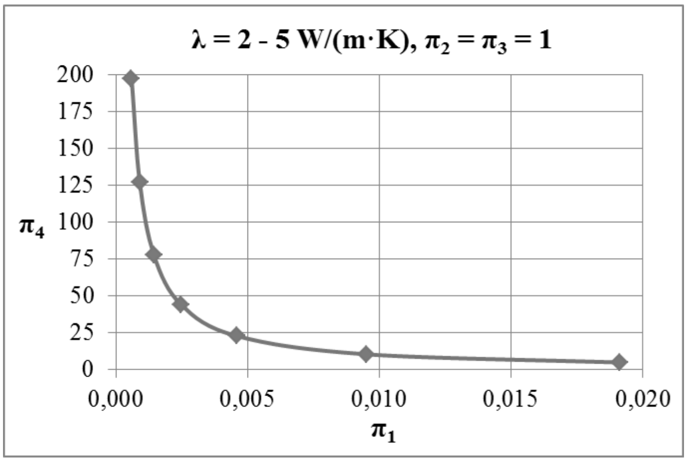

Рис. 5. Зависимость между π_4 и π_1.

Заключение

Физико-математическая модель для определения коэффициента теплопроводности была сформулирована для образца кубической формы. Оптимальные параметры размера образца и теплового потока были определены в диапазоне значений λ 0,04-5 Вт/(м К).

ЛИТЕРАТУРА:

1. K.V. Slyusarskiy, M.K. Bejsekov, J.V. Marysheva, Y.J. Rakov, MATEC Web Conf **37** 01053 (2015)
2. T.E. Shoup, *Applied numerical methods for microcomputers* (Moskow: Higher School, 1984)
3. E.P. Mikhalev, Yu. Ya. Rakov, 9 Int Sci Pract Conf Stud Post-Grad Young Sci **1** 56-58 (2003)
4. A.S. Zavorin, A.V. Kuzmin, Y.Y. Rakov, *Methods for determination the condensed matter thermal conductivity: tutorial* (Tomsk: Publishing house TPU, 2009)
5. D.D. McCracken, W.S. Dorn, *Numerical methods and Fortran programming with application in engineering and science* (Business Machines Corporation: Wiley international edition, 1965)