

УДК 539.37

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАБОТОК И ТОПОЛОГИИ ИХ УКРЕПЛЕНИЯ

Павлов Сергей Петрович¹,
ppsar@yandex.ru

Крысько Вадим Анатольевич¹,
tak@san.ru

Бодягина Ксения Сергеевна¹,
bodksen@mail.ru

¹ Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина,
Россия, 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77.

Актуальность. При проведении горных работ и образовании горных выработок, происходит изменение естественного напряженно-деформированного состояния окружающего выработку массива. В результате изменяется деформированное и напряженное состояние массивов породы в окрестности выработки, что может привести к ее обрушению. Эти напряжения существенно зависят от формы поперечного сечения выработки и вида дополнительных укреплений свода штольни. Таким образом, возможность предсказывать эти процессы, а тем более управлять ими, создавая оптимальные формы и виды укрепления сводов, может снизить вероятность разрушения штольни и повысить их надежность.

Цель работы: моделирование и оптимизация формы выработок в виде длинных тоннелей, которые можно считать находящимися в условиях плоского деформированного состояния; проектирование оптимальной топологии несущей конструкции вокруг выработки для оптимальных форм сводов, воспринимающей основные нагрузки как от собственного веса, так и от веса вышележащей породы.

Методы. Для математического моделирования поведения выработки используются методы конечных и граничных элементов для задач механики твердого деформируемого тела и методы оптимизации формы упругих тел, разработанные авторами. Для задач укрепления свода штолен применяется метод топологической оптимизации.

Результаты. Созданы алгоритмы и программы оптимизации формы и топологической оптимизации для плоской задачи теории упругости. На примере модельной задачи показаны возможности оптимизации формы свода выработки и ее оптимального внешнего укрепления стальной конструкцией с целью снижения максимального касательного напряжения (критерий Треска), что позволило снизить эти напряжения на порядок.

Ключевые слова:

Оптимизация формы упругого тела, топологическая оптимизация, критерий Треска, методы конечных и граничных элементов, оптимальная форма сводов тоннелей.

Введение

При проектировании формы поперечного сечения тоннелей, сводов штолен и выработок в массиве породы возникают задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в окрестности их границы с целью устранения причин их разрушения. В большинстве задач такого рода для протяженных выработок применяется модель плоского деформированного состояния механики твердого деформируемого тела [1–3].

Обычно прочность ненарушенной скальной породы значительно превышает прочность установленной крепи в выработке. Поэтому при проходке выработок необходимо, прежде всего, стремиться к сохранению первоначального состояния горной породы и к укреплению слабых участков окружающего массива, чтобы не допустить чрезмерных деформаций, разуплотнения и потери несущей способности примыкающей к выработке несущей части породы. Кроме того, для повышения устойчивости сооружения необходимо так укрепить окружающую породу, чтобы она сама смогла выполнять роль строительного материала и основной

несущей конструкции, т. е. создать несущий породный свод, воспринимающий основные нагрузки как от собственного веса, так и от веса вышележащей породы. В этом случае внутренняя облицовка имеет второстепенное значение, лишь повышая устойчивость породного свода. Вопросы и технологии укрепления породного слоя рассмотрены в работах [2, 4–6].

При моделировании НДС в задачах геомеханики в последнее время широко применяются численные методы, такие как метод конечных элементов [7] и метод граничных элементов [8].

Наибольшее влияние на величину концентрации напряжений оказывает форма поперечного сечения свода выработки [2]. Задачи оптимизации формы рассмотрены в [9], где выведены необходимые условия оптимальности для задач оптимизации формы для функционалов произвольного вида. В [10, 11] рассматривается математическое моделирование и оптимизация формы в задачах термоупругости для плоского деформированного состояния. Эти результаты могут быть использованы для оптимизации формы выработок по критерию

минимума максимального касательного напряжения на несущем породном слое.

Вторым способом повышения устойчивости выработок к разрушению, как уже было сказано выше, является создание вокруг них некоторой несущей конструкции с целью снижения концентрации напряжений на границе полости. Подобная задача может быть решена методами топологической оптимизации [12]. Топологическая оптимизация позволяет перераспределить усиливающий материал по массиву породы оптимальным по заданному критерию способом при заданном количестве этого материала. Этот метод получил свое развитие в последние годы [13–18] и широко применяется для проектирования армирующих элементов в упругих структурах.

Целью работы является моделирование напряженно-деформированного состояния выработок в виде длинных тоннелей с поперечным сечением различной формы, которые можно считать находящимися в условиях плоского деформированного состояния, оптимизация формы свода выработки и получение оптимальной несущей конструкции вокруг выработки, воспринимающей основные нагрузки как от собственного веса, так и от веса вышележащей породы.

Постановка задачи

Геомеханические процессы, связанные с сооружением выработок в горном массиве, проявляются только в некоторой ограниченной окрестности области массива, содержащей выработку. Поэтому при постановке задачи рассматривается не весь массив, а некоторая ограниченная область, границы которой выбираются таким образом, чтобы исследуемые механические напряжения в этой области мало отличались от напряжений в бесконечном массиве.

Расчетную схему представим в виде горизонтального туннеля бесконечной длины, в ограниченной области тяжелого массива породы в окрестности туннеля, то есть нагруженного гравитационными силами, которые обозначены вертикальными стрелками. Внешняя граница массива Γ_1 свободна от нагрузки. Внутренняя граница туннеля Γ_3 также свободна от нагрузок. Нижняя граница Γ_2 массива закреплена к грунту.

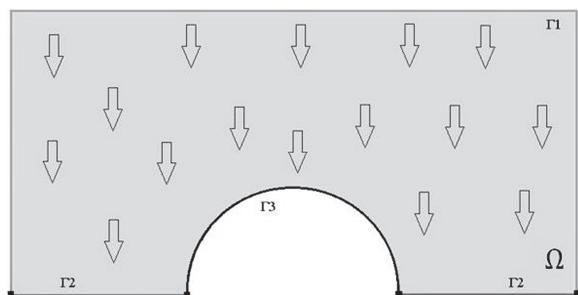


Рис. 1. Исходная форма туннеля и расчетная схема

Fig. 1. Original form of a tunnel and design scheme

Оптимизация формы. Требуется минимизировать величину максимального касательного напряжения

$$\tau = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{2} + 2\sigma_{12}^2}, \quad (1)$$

где σ_{ij} – напряжения в области Ω , за счет изменения формы полости при условии, что площадь поперечного сечения конструкции не превосходит заданной величины. За исходную выбрана конструкция, показанная на рис. 1.

Так как положение точки, в которой достигается максимум функции $\tau(\mathbf{x}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$, неизвестно, то задача сводится к минимизации функционала:

$$J_c = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \tau(\mathbf{x}, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}) = \|\tau\|_c. \quad (2)$$

Для локальных функционалов такого типа разработаны приближенные методы редукции к задачам с интегральными функционалами. Один из них [19] основан на близости нормы в пространстве непрерывных функций $\|\tau\|_c$ норме на пространстве L^q функций, интегрируемых с q -й степенью при достаточно больших значениях q . Учитывая это, можно приближенно заменить (2) функционалом

$$J_q = \left(\frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} |\tau|^q d\Omega \right)^{1/q}, \quad (3)$$

где $m(\Omega)$ – мера множества Ω . Там же дана оценка точности такого приближения.

Без потери общности функционал цели (2), с учетом (3), может быть взят в виде

$$J = \int_{\Omega} \tau_{\max}^{2q} d\Omega, \quad (4)$$

где q – заданное достаточно большое число. Изопараметрическое ограничение имеет вид

$$\int_{\Omega} d\Omega - A \leq 0, \quad (5)$$

где A – площадь поперечного сечения исходной конструкции.

Конструкция находится в плоском деформированном состоянии, и функции отклика должны удовлетворять соотношениям Коши, уравнениям состояния и равновесия

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (6)$$

$$\sigma_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}(\varepsilon_{11} + \nu_1 \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}),$$

$$\sigma_{12} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \varepsilon_{12}, \quad (7)$$

где

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad (8)$$

а также соответствующим граничным условиям. Задача (6)–(8) решается методом граничных элементов, что позволяет с большей точностью вычи-

снять значения напряжений на границе свода выработки Γ_3 .

Общее выражение для анализа чувствительности функционала цели и ограничений, основанное на слабой формулировке задачи термоупругости и позволяющее учитывать одновременное изменение в процессе оптимизации как температурных, так и деформационных полей, получено в [9]. Оно позволяет получать значения производных для функционалов общего вида в более широких функциональных пространствах, когда все решения краевых задач удовлетворяют лишь вариационным уравнениям или неравенствам.

Для поставленной выше задачи выражение для производной функционала (4) и ограничения (5) по параметру трансформирования области приведено в [10]. Там же получено условие оптимальности формы выработки в виде

$$\left(\frac{\sigma_{\tau\tau}^2}{2}\right)^q + \sigma_{\tau\tau} \varepsilon_{\tau\tau}^* = \text{const.}$$

Здесь $\sigma_{\tau\tau}$ – касательные напряжения на границе выработки; $\varepsilon_{\tau\tau}^*$ – сопряженные касательные деформации, которые получаются после решения соответствующей плоской задачи теории упругости [10] методом граничных элементов.

Топологическая оптимизация элементов укрепления свода. Требуется минимизировать величину максимального касательного напряжения (1) на границе выработки посредством распределения дополнительных укрепляющих элементов в грунте, окружающем выработку.

Оптимизация топологии несущей конструкции вокруг выработки заключается в поиске наилучшего распределения усиливающего материала для достижения максимального снижения напряжений на границе выработки. В методе топологической оптимизации, изложенном в работе [12], модуль Юнга является функцией плотности материала, тензор напряжений считается функцией от модуля Юнга E_0 армирующего материала и искусственно введенной плотности $\rho(x)$, которая выступает в качестве переменной управления в задаче оптимизации:

$$E(x) = \rho(x)^p E_0, \quad x \in \Omega.$$

Показатель степени $p \geq 1$ является фактором штрафа, и увеличение p приводит к более четкому решению. При $\rho(x)=1$ вся область полностью заполнена армирующим материалом. Таким образом, необходимо найти

$$\min_{\rho(x)} \int_{\Gamma_3} \tau_{\max}^{2q} ds, \quad (9)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \gamma A, \\ 0 &< \delta \leq \rho(x) \leq 1, \end{aligned} \quad (10)$$

где γ – процент экономии армирующего материала.

Для получения численного решения в каждой точке массива плотность не должна исчезать полностью, поэтому в последнем неравенстве положим $\delta=10^{-5}$. Это позволит избежать сингулярности начальной матрицы жесткости при решении задачи оптимизации.

Для решения задачи оптимизации (9), (10), при вычислениях с помощью градиентных методов, основной задачей является анализ чувствительности, вычисление производных по проектным переменным. Предположим, что рассматриваемая область массива разбита на конечные элементы и каждому элементу присваивается переменная плотность ρ_i ($i=1, n$). При этом элементы матрицы жесткости связаны с переменной плотностью степенным законом

$$K_i = \rho_i^p \bar{K}_i,$$

где $\bar{K}_i$ обозначает номинальную матрицу жесткости элемента i для $\rho_i=1$. Показатель степени p является фактором штрафа, который обычно выбирают равным $p=4$ или $p=5$.

Таким образом, глобальная матрица жесткости примет следующий вид

$$K = \sum_{i=1}^n L_i^T K_i L_i = \sum_{i=1}^n L_i^T \rho_i^p \bar{K}_i L_i.$$

Предположим, что вектор внешних нагрузок не зависит от переменной плотности, тогда уравнение системы конечных элементов для рассматриваемой области примет вид

$$KU = F. \quad (11)$$

В топологической оптимизации мы, как правило, работаем с умеренным числом ограничений, поэтому наиболее эффективным способом вычисления производных является использование метода сопряженных переменных [20], где производные для смещений не вычисляются в явном виде. Для минимизации перепишем функционал $J(x)$ из (4), добавив к нему нулевое, в силу (11), слагаемое

$$J(x) = J(x) - \tilde{U}^T (KU - F),$$

где $\tilde{U}$ – произвольный вектор узловых смещений. Исходя из этого, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x)}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial J(x)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \rho_i} - \tilde{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U - \tilde{U}^T K \frac{\partial U}{\partial \rho_i} = \\ &= -\tilde{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U + \left(\frac{\partial J(x)}{\partial U} - \tilde{U}^T K \right) \frac{\partial U}{\partial \rho_i}. \end{aligned}$$

Это равенство, в свою очередь, может быть записано в виде

$$\frac{\partial J(x)}{\partial \rho_i} = -\tilde{U}^T \frac{\partial K}{\partial \rho_i} U, \quad (12)$$

когда $\tilde{U}^T$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\tilde{F}^T - \tilde{U}^T K = 0, \quad (13)$$

где $\tilde{F}^T = \partial J(x) / \partial U$.

Чувствительность функционала (4) к изменению плотности на основании равенств (12), (13) может быть теперь вычислена следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} &= -\tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} = \\ &= -(\tilde{\mathbf{F}}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{L}_T^i) p \rho_i^{p-1} \bar{\mathbf{K}}_i (\mathbf{L}_i \mathbf{U}) = \\ &= -(\mathbf{L}_i \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{F}})^T p \rho_i^{p-1} \bar{\mathbf{K}}_i (\mathbf{L}_i \mathbf{U}).\end{aligned}$$

После упрощения приведенное выше выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \rho_i} &= -\tilde{\mathbf{U}}_i^T p \frac{\mathbf{K}_i}{\rho_i} \mathbf{U}_i = \\ &= -\frac{p}{\rho_i} (\tilde{\mathbf{U}}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i) = -\frac{p}{\rho_i} (\tilde{\mathbf{F}}_i^T \mathbf{U}_i),\end{aligned}\quad (14)$$

в котором $\tilde{\mathbf{F}}_i$ и $\mathbf{U}_i$ обозначают сопряженный вектор силы и вектор смещения на конечном элементе i . Производная функционала цели (14) имеет простой вид, легко вычисляется и очень выгодно реализует возможность топологической оптимизации в любой системе конечных элементов.

Численные результаты

При проектировании формы выработки сначала была решена задача оптимизации ее формы (4), (5) методом проекции градиента. Для решения упругой задачи (6)–(8) использовался метод граничных элементов. В результате была получена форма свода выработки, показанная на рис. 2. Безразмерные значения касательных напряжений в этом случае являются постоянными по границе свода и равны 10,81. В качестве конкурирующих форм выработки были рассмотрены еще три неоптимальные в этих условиях нагружения и обычно используемые формы свода: а) полуокруг с площадью поперечного сечения 0,5; б) эллипс с отношением горизонтальной полуоси к вертикальной полуоси 3/2 с той же площадью; в) эллипс с отношением горизонтальной полуоси к вертикальной полуоси 2/3.

Для этих форм максимальные значения касательных напряжений равны: а) 16,57 для полуокруга, б) 18,07 для эллипса, в) 15,64 для эллипса. Таким образом, для свода с оптимальной формой касательные напряжения имеют значения в 1,5 и более раз ниже, чем для остальных форм.

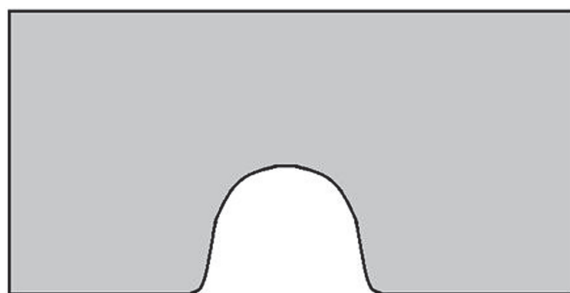


Рис. 2. Оптимальная форма свода выработки

Fig. 2. Optimal shape of excavation arch

Для укрепления окружающей породы и создания дополнительного несущего укрепления свода выработки, воспринимающего основные нагрузки от веса вышележащей породы, используем метод топологической оптимизации (10)–(12) совместно с методом конечных элементов. Площадь армирующей конструкции возьмем равной $\gamma=0,1$, а в качестве армирующего материала выберем сталь. На рис. 3 представлены оптимальные топологии укрепления свода для трех классических форм выработки: а) полуокруга, б) эллипса и в) эллипса соответственно. Здесь темным цветом выделены стальные укрепляющие конструкции, а светлым – естественные породы.

Максимальные значения касательных напряжений после оптимального укрепления для классических форм выработки равны: а) 2,37 для полуокруга, б) 2,83 для эллипса, в) 2,02 для эллипса. То есть еще примерно на порядок ниже, чем без укрепления свода.



Рис. 4. Топология оптимального укрепления для оптимальной формы свода

Fig. 4. Topology of optimal strengthening for optimal arch shape

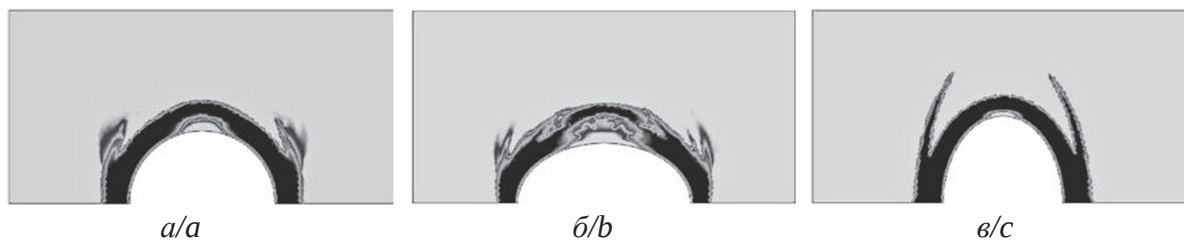


Рис. 3. Оптимальные топологии укрепления свода стальными конструкциями

Fig. 3. Optimal topologies of strengthening arches with steel structures

Оптимальная топология укрепления свода для выработки оптимальной формы, полученной на шаге оптимизации формы, показана на рис. 4. Максимальное значение касательного напряжения после оптимального укрепления для свода этой формы составляет 1,41. То есть еще примерно в 2 раза меньше, чем для классических форм выработок.

Заключение

Использование методов оптимизации при проектировании формы сводов подземных выработок позволяет понизить коэффициент концентрации

напряжений с 44 до 67 % в зависимости от первоначально используемой формы. Дополнительное укрепление массива породы стальной топологически оптимальной конструкцией даже при незначительном количестве используемого для укрепления материала позволяет дополнительно еще снизить концентрацию примерно на порядок. Таким образом, показана возможность оптимального проектирования формы свода выработки и ее оптимального внешнего укрепления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ гранта № 16-11-10138.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баклашов И.В. Геомеханика: в 2 т. Т. 1. Основы геомеханики. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2004. – 208 с.
2. Геомеханика: в 2 т. Т. 2. Геомеханические процессы / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия, А.Н. Шашенко, В.Н. Борисов. – М.: Изд-во Московского государственного горного университета, 2004. – 249 с.
3. Руководство по проектированию подземных выработок и расчету крепи (К СНиП II-94-80). – М.: Стройиздат, 1983. – 272 с.
4. Сыркин П.С., Мартыненко И.А., Данилкин М.С. Шахтное и подземное строительство. Технология строительства горизонтальных и наклонных выработок. – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2002. – 430 с.
5. Каретников В.Н., Клейменов В.Б., Нуждихин А.Г. Крепление капитальных и подготовительных горных выработок: справочник. – М.: Недра, 1989. – 571 с.
6. СНиП II-94-80. Строительные нормы и правила. Нормы проектирования. Подземные горные выработки. – М.: Стройиздат, 1982. – 30 с.
7. Фадеев Б.А. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 235 с.
8. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 236 с.
9. Павлов С.П., Крысько В.А. Оптимизация формы термоупругих тел. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. – 160 с.
10. Павлов С.П., Жигалов М.В. Математическое моделирование и оптимизация формы в одной плоской задаче теории упругости // Вестник СГТУ. – 2011. – № 4 (59). – Вып. 1. – С. 69–75.
11. Павлов, С.П., Жигалов, М.В. Управление внешней границей изолирующего слоя нагретой полости // Известия вузов. Машиностроение. – 2005. – № 7. – С. 3–12.
12. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology Optimization. Theory, Methods and Applications. – Berlin: Springer, 2003. – 370 p.
13. Topology Optimization Design of Automotive Engine Bracket / Po Wu, Qihua Ma, Yiping Luo, Chao Tao // Energy and Power Engineering. – 2016. – № 8. – P. 230–235.
14. Ji-Hong Zhu, Kai-Ke Yang, Wei-Hong Zhang. Backbone cup – a structure design competition based on topology optimization and 3D printing // Int. J. Simul. Multisci. Des. Optim. – 2016. – V. 7. – № A1. – P. 1–6.
15. Huang X., Xie Y.M. Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2010. – 223 p.
16. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches. A comparative review // Structural and Multidisciplinary Optimization. – December 2013. – V. 48. – Iss. 6. – P. 1031–1055.
17. Rozvany George I.N., Lewiński T. Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics. – New York: Springer Science & Business Media, 2014. – 471 p.
18. Saurabh B., Naman J., Anadi M. Topological Optimization of 3D Structures by Optimality Criteria using ANSYS // International J. for Research in Emerging Science and Technology. – 2015. – V. 2. – Iss. 2. – P. 30–35.
19. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. – М.: Наука, 1980. – 255 с.
20. Akash D., Anadi M. Topology Optimization of Bridge Structures Using Optimality Criteria Method // International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET). – May 2015. – V. 3. – Iss. 5. – P. 1034–1038.

Поступила 21.11.2016 г.

Информация об авторах

Павлов С.П., доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования Физико-технического факультета Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

Крысько В.А., доктор технических наук, профессор кафедры математики и моделирования Физико-технического факультета Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

Бодягина К.С., магистрант физико-технического факультета Саратовского государственного технического университета им. Ю.А. Гагарина.

UDC 539.37

ON THE ISSUE OF OPTIMIZING THE SHAPE OF GEOLOGICAL EXCAVATIONS AND TOPOLOGY OF THEIR STRENGTHENING

Sergey P. Pavlov¹,
pspsar@yandex.ru

Vadim A. Krysko¹,
tak@san.ru

Xenia S. Bodyagina¹,
bodksen@mail.ru

¹ Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin,
77, Polytekhnicheskaya street, Saratov, 410054, Russia.

Relevance. At mining and formation of excavation, the array natural stress-strain state, surrounding the extraction, changes. The result is the deformation of the rock and redistribution of stresses around the excavation, which could lead to its collapse. These stresses strongly depend on the shape of the cross section of the development and type of additional fortifications of the vault gallery. Thus, the ability to predict these processes, and especially to control them, developing optimal forms and types of arches strengthening, may reduce the probability of a tunnel destruction and increase their reliability.

The aim of the work is modeling and shape optimization of excavations in the form of long tunnels that can be considered under plane strain state; design of optimal topology of the supporting structure around the excavation for optimal form of arches, perceiving the main load of its own weight and the weight of the overlying rocks.

Methods. For mathematical modeling of the excavation behavior the authors have used the methods of finite and boundary elements for problems in mechanics of deformable body and the methods of elastic bodies forms optimization developed by the authors. For strengthening the arch of tunnels the method of topological optimization was used.

Results. The authors developed the algorithms and programs of optimization of shape and topology optimization for a planar problem of elasticity theory. By the example of the model problem the authors demonstrate the possibility of optimizing the arch shape of the excavation and its optimal external strengthening with the steel structure for reducing the maximum shear stress (criterion Cod), thus decreasing these stresses.

Key words:

Optimization of elastic body shape, topological optimization, Tresca criterion, method of finite and boundary elements, optimal form of a tunnel vaults.

The work was supported by the Grant RSF no. 16–11–10138.

REFERENCES

1. Baklashov I.V. *Geomekhanika. T.1. Osnovy geomekhaniki* [Geomechanics. V. 1. Fundamentals of geomechanics]. Moscow, Publ. house of Moscow state mining University, 2004. 208 p.
2. Baklashov I.V., Kartoziya B.A., Shashenko A.N., Borisov, N. *Geomekhanika. T. 2. Geomekhanicheskie protsessy* [Geomechanics. V. 2. Geomechanical processes]. Moscow, Publ. house of Moscow state mining University, 2004. 249 p.
3. *Rukovodstvo po proektirovaniyu podzemnykh vyrabotok i raschetu krepki (K SNiP II – 94–80)* [Guide for designing underground workings and calculation of supports (to SNiP II – 94 – 80)]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1983. 272 p.
4. Syrkin P.S., Martynenko I.A., Danilkin M.S. *Shakhtnoe i podzemnoe stroitelstvo. Tekhnologiya stroitelstva gorizontalnykh i naklonnykh vyrabotok* [Mining and underground construction. Construction technology of horizontal and inclined workings]. Novocherkassk, Shakhtinsky Institute YuRGUTU Press., 2002. 430 p.
5. Karetnikov V.N., Kleymenov V.B., Nuzhdikhin A.G. *Kreplenie kapitalnykh i podgotovitelnykh gornyykh vyrabotok: spravochnik* [Fastening capital and preparatory workings: handbook]. Moscow, Nedra Publ., 1989. 571 p.
6. *SNiP II-94–80. Stroitelnye normy i pravila. Normy proektirovaniya. Podzemnye gornye vyrabotki* [Building regulations. Design standards. Underground mining]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1982. 30 p.
7. Fadeev B.A. *Metod konechnykh elementov v geomekhanike* [Finite element method in geomechanics]. Moscow, Nedra Publ., 1987. 235 p.
8. Crouch S., Starfield A. *Metody granichnykh elementov v mekhanike tverdogo tela* [Boundary element methods in solid mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1987. 236 p.
9. Pavlov S.P., Krysko V.A. *Optimizatsiya formy termouprugikh tel* [Shape Optimization of thermoelastic bodies]. Saratov, SGTU Publ. house, 2000. 160 p.
10. Pavlov S.P., Zhigalov M.V. *Matematicheskoe modelirovaniye i optimizatsiya formy v odnoy ploskoy zadache uprugosti* [Mathematical modeling and optimization of shape in one plane problem of elasticity theory]. *Vestnik SGTU*, 2011, vol. 4 (59), no. 1, pp. 69–75.
11. Pavlov S.P., Zhigalov M.V. *Upravlenie vneshney granitse izolyuyushchego sloya nagretoy polosti* [Management of the external border of insulating layer of the heated cavity]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, 2005, no. 7, pp. 3–12.
12. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization. Theory, Methods and Applications*. Berlin, Springer, 2003. 370 p.
13. Po Wu, Qihua Ma, Yiping Luo, Chao Tao *Topology Optimization Design of Automotive Engine Bracket*. *Energy and Power Engineering*, 2016, no. 8, pp. 230–235.

14. Ji-Hong Zhu, Kai-Ke Yang, Wei-Hong Zhang. Backbone cup – a structure design competition based on topology optimization and 3D printing. *Int. J. Simul. Multisci. Des. Optim.*, 2016, vol. 7, no. A1, pp. 1–6.
15. Huang X., Xie Y.M. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2010. 223 p.
16. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches. A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, vol. 48, no. 6, pp. 1031–1055.
17. Rozvany George I.N., Lewiński T. *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. New York, Springer Science & Business Media, 2014. 471 p.
18. Saurabh B., Naman J., Anadi M. Topological Optimization of 3D Structures by Optimality Criteria using ANSYS. *International J. for Research in Emerging Science and Technology*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 30–35.
19. Banichuk N.V. *Optimizatsiya form uprugikh tel* [Optimization of forms of elastic bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 255 p.
20. Akash D., Anadi M. Topology Optimization of bridge structures using the criterion of optimality. *International journal of research in the field of applied science and engineering Technology (IJRASET)*, 2015, vol. 3, no. 5, pp. 1034–1038.

Received: 21 November 2016.

Information about the authors

Sergey P. Pavlov, Dr. Sc., professor, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin.

Vadim A. Krysko, Dr. Sc., professor, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin.

Xenia S. Bodyagina, graduate student, Saratov State Technical University named after Yu.A. Gagarin.