

УДК 621.314.2:632

## ВОПРОСЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМОГО В СИСТЕМАХ ЭЛЕКТРОПИТАНИЯ, РАБОТАЮЩИХ НА ОСНОВЕ ВОЗОБНОВЛЯЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ

**Диксон Роберт Кристофер<sup>1</sup>,**  
robert\_dixon@mail.ru

**Михальченко Геннадий Яковлевич<sup>2</sup>,**  
kpe-tusur@yandex.ru

**Михальченко Сергей Геннадьевич<sup>3</sup>,**  
msg@ie-tusur.ru

**Русскин Виктор Александрович<sup>3</sup>,**  
vrsskn@gmail.com

**Семёнов Сергей Михайлович<sup>3</sup>,**  
ssm@tpu.ru

<sup>1</sup> Отдел энергетики ЮНЕСКО зоны Карибского бассейна, Ямайка, JMAKN04, Кингстон, Доминика Драйв, 25.

<sup>2</sup> Томский университет систем управления и радиоэлектроники, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40.

<sup>3</sup> Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

*Возобновляемые источники энергии, например фотогальванические элементы и ветрогенераторы, привлекают к себе все большее внимание в связи с дефицитом энергии и истощением запасов ее источников. Устройства такого типа, как правило, дают на выходе низкие величины напряжения. Так, элементарный фотогальванический источник электропитания, на основе p-n перехода, из кремния выдает ЭДС порядка 0,7 В, а на основе германия – 0,4 В. При этом возможности последовательного наращивания выходного потенциала ограничены в связи с необходимостью увеличения параллельных ветвей фотопластин. Решение этой проблемы привело к созданию систем электропитания на основе импульсных преобразователей повышающего типа для электростанций, работающих на основе возобновляемых георесурсов.*

*Актуальной является задача по улучшению показателей работы этого вида преобразователей. В частности, для определения устойчивости и исследования динамики в математических моделях установок силовой электроники широкое распространение находит метод Якоби. При создании систем электропитания различного назначения использование матрицы Якоби повышает их энергетические показатели. При этом применение функции Пуанкаре для итерационного отображения метода Якоби дает возможность изучения режимов работы преобразователя для конкретных точек после изменения параметров системы. Таким образом, матрица Якоби, являясь безразмерной величиной, позволяет линеаризовать характеристику в фиксированных точках для их анализа. Следовательно, частичное дифференцирование нелинейной структуры является одним из направлений получения конкретных значений, являющихся характеристическим мультипликатором системы – собственными значениями матрицы.*

*Все исследования проводились на примере двухфазного повышающего преобразователя напряжения (ДППН) с частотно-импульсной модуляцией. Особенность этой работы заключается в использовании матрицы Якоби для линеаризации нелинейных систем при исследовании динамики, с целью нахождения устойчивых и неустойчивых зон функционирования преобразователей энергии. Такой математический подход увеличивает эффективность и надежность преобразователя напряжения путем идентификации аномальных динамических режимов работы в устройстве, тем самым снижая потери энергии, т. е. повышается энергоэффективность системы электропитания.*

**Цель:** разработать альтернативный метод линеаризации с помощью матрицы Якоби для анализа устойчивости работы различных преобразователей. Схема исследуемого преобразователя предполагает накопление энергии в индуктивных элементах для отключения при нулевом токе или нулевом напряжении. Результаты будут представлены в виде отображения Пуанкаре через метод Ньютона–Рафсона–Якоби.

**Методы:** обзор технических публикаций относительно необходимости использования матриц Якоби для определения устойчивости различных преобразователей. Алгоритм управления двухфазного импульсного преобразователя смоделирован в среде программного обеспечения LTSpice и MATLAB. Анализ соответствующих характеристик ДППН включает в себя методы Якоби и Ньютона–Рафсона. Последний имеет достаточно быструю сходимость и высокую степень точности дискретных значений. Это показано ниже в режимах хаоса и бифуркации.

**Результаты.** Полученные характеристические мультипликаторы определяют режимы работы системы управления ДППН, разработанным на основе двухфазного импульсного преобразователя. Это позволяет выявить те параметры системы, при которых она функционирует в нормальных или аномальных состояниях, тем самым дает возможность отделить одни режимы функционирования от других, и таким образом повысить надёжность и КПД системы.

### **Ключевые слова:**

Характеристические мультипликаторы, матрица Якоби, отображение Пуанкаре, анализ устойчивости, нелинейная динамическая система, метод Ньютона–Рафсона.

### Введение

Технические решения, направленные на получение экологически чистой энергии, с каждым годом приобретают всё большую значимость в связи с увеличивающимся загрязнением окружающей среды. Помимо этого растёт дефицит энергии, что также привлекает внимание к возобновляемым источникам энергии. Применение различных устройств, имеющих отношение к альтернативной энергетике, таких как солнечные батареи или ветрогенераторы, приводит к необходимости разработки импульсных преобразователей постоянного напряжения, надёжно функционирующих в требуемыми энергетическими показателями в широком диапазоне входных напряжений и токов, управляющих воздействий и нагрузок. Преобразователи такого типа обычно используются для согласования уровней тока и напряжения между источником энергии и нагрузкой. Современное положение вещей, диктуемое требованиями высокой энергоэффективности, предполагает применение различных алгоритмов поиска точки максимальной мощности, позволяющих расширить диапазон работы преобразователя по входным и управляющим воздействиям, а также нагрузке. Этот факт требует исследования динамики разрабатываемого устройства, поскольку такие системы являются импульсно-модуляционными, с присущим им эффектом бифуркации [1–9].

### Математическая модель двухфазного повышающего преобразователя напряжения

В силовой электронике импульсно-модуляционные системы описываются как кусочно-линейные структуры, нелинейность которых определяется разрывными функциями, описывающими сигналы обратной связи.

Эти сигналы определяют моменты коммутации силовых ключей. Их переключение изменяет топологию схемы преобразователя. При каждом состоянии ключей схема может быть смоделирована аналитически как линейная цепь, и это означает, что устройство описывается кусочно-линейной системой уравнений. Подобные динамические изменения структуры часто приводятся в соответствующих публикациях. Таким образом, данный процесс связан с анализом устойчивости вышеприведенных устройств с использованием матрицы Якоби. Эти матрицы играют важную роль в изучении динамических систем [10, 11]. Матрица Якоби позволяет анализировать динамические процессы в малой окрестности точки или орбиты равновесия (устойчивой или неустойчивой).

Как правило, использование этого метода заключается в изучении бифуркационных явлений, которые могут произойти в преобразователях напряжения. В работе представлены необходимые математические выражения, позволяющие вычислить матрицу Якоби. Предположим, что дана точка равновесия

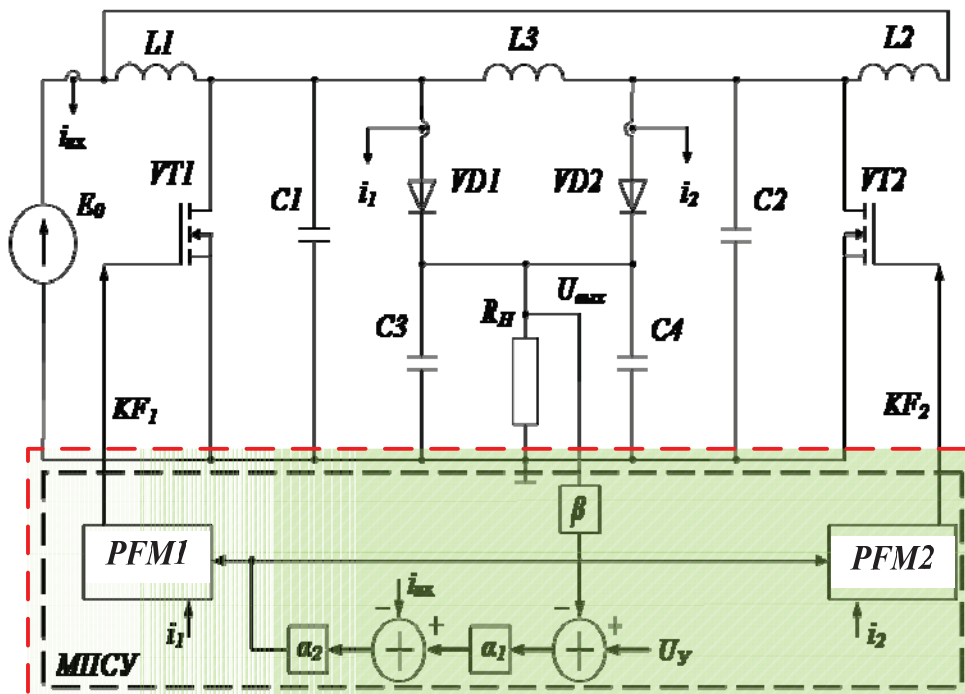


Рис. 1. Принципиальная схема двухфазного повышающего преобразователя с частотно-импульсной модуляцией

Fig. 1. Diagram of two-phase boost DC-DC PFM converter circuit

**Таблица 1.** Матрицы состояния для соответствующих коммутационных функций

**Table 1.** State matrices for appropriate switching functions

Матрицы состояния State matrix		Выходные матрицы Output matrix	$VT_1$	$VT_2$	$VD_1$	$VD_2$
$\mathbf{A}_1 =$	$\begin{bmatrix} -\frac{R+R_0}{L_1} & -\frac{R_0}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_0}{L_2} & -\frac{R+R_0}{L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & 0 & 0 & -\frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_H C_{c1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{c2}} & \frac{1}{C_{c2}} & 0 & -\frac{1}{R_H C_{c2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_\Phi} & \frac{1}{C_\Phi} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_H C_\Phi} \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{E_0}{L_1} \\ \frac{E_0}{L_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$K_{r1}=1$	$K_{r2}=0$	$K_{D1}=0$	$K_{D2}=1$
$\mathbf{A}_2 =$	$\begin{bmatrix} -\frac{R+R_0}{L_1} & -\frac{R_0}{L_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{R_0}{L_2} & -\frac{R+R_0}{L_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{c1}} & \frac{1}{C_{c1}} & 0 & -\frac{1}{R_H C_{c1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{c2}} & \frac{1}{C_{c2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_H C_{c2}} & 0 \\ \frac{1}{C_\Phi} & \frac{1}{C_\Phi} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_H C_\Phi} \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_1$	$K_{r1}=0$	$K_{r2}=0$	$K_{D1}=1$	$K_{D2}=1$
$\mathbf{A}_3 =$	$\begin{bmatrix} -\frac{R+R_0}{L_1} & -\frac{R_0}{L_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{R_0}{L_2} & -\frac{R+R_0}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{L_3} & 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \\ \frac{1}{C_{c1}} & 0 & -\frac{1}{C_{c1}} & -\frac{1}{R_H C_{c1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_H C_{c2}} & 0 \\ \frac{1}{C_\Phi} & 0 & -\frac{1}{C_\Phi} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_H C_\Phi} \end{bmatrix}$	$\mathbf{B}_3=\mathbf{B}_1$	$K_{r1}=0$	$K_{r2}=1$	$K_{D1}=1$	$K_{D2}=0$
$\mathbf{A}_4=\mathbf{A}_2$		$\mathbf{B}_4=\mathbf{B}_1$	$K_{r1}=0$	$K_{r2}=0$	$K_{D1}=1$	$K_{D2}=1$

$\mathbf{X}(nT)=\mathbf{X}$ . Матрица Якоби в точке равновесия может быть записана следующим образом

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k, \mathbf{P}^m), \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}_k = [\mathbf{i}_{L1}, \mathbf{i}_{L2}, \mathbf{i}_{L3}, \mathbf{U}_{C1}, \mathbf{U}_{C2}, \mathbf{U}_{C3}]^T$  – входные параметры;  $\mathbf{P}^m = \{U_y, E_0, R_H, \alpha_1, \alpha_2, \tau_k\}$  – чей индекс обозначает значение  $\mathbf{X}_k$  в начале цикла  $k$ , то есть,

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(kT).$$

Двухфазный повышающий преобразователь (ДППН) содержит шесть реактивных элементов (три дросселя и три конденсатора), два диода и ак-

тивную нагрузку (рис. 1). Поскольку конденсаторы  $C_3$  и  $C_4$  включены параллельно, при написании математических выражений полагаем, что  $C=C_3+C_4$ . В табл. 1 показаны состояния параметров принципиальной схемы. Когда ДППН работает в непрерывном режиме, четыре силовых ключа могут быть описаны системами уравнений (2) и (3).

Функция переключения  $K_{F1,2}(U_{\text{вых}}, U_y, t)$  определяет тип частотно-импульсной модуляции и способ регулирования необходимых параметров. Проводилось большое количество исследований рабо-

ты системы в режиме непрерывного тока [1–5]. При этом вводится допущение, что ток в соответствующих цепях  $VD-R-L-C$  никогда не падает до нуля. В данном исследовании представлена самая простейшая модель с функцией переключения диодов  $VD_1$  и  $VD_2$  и транзисторов  $VT_1$  и  $VT_2$ , находящиеся в противофазе. Эта коммутационная функция может быть описана двойным скаляром  $K_{F1,2}$ ;

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_i(K_{F1}, K_{F2})\mathbf{X} + \mathbf{B}E_0. \quad (2)$$

В зависимости от состояния коммутирующих элементов, описываемых функциями  $K_{F1}$ ,  $K_{F2}$ ,  $K_{D1}$ ,  $K_{D2}$ , матрица  $\mathbf{A}_i$  системы принимает различные значения  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, (\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_2)$ .

В табл. 1 показаны топологии схемы (рис. 1) для каждого режима работы преобразователя при соответствующем состоянии коммутационных функций  $K_{F1}$  и  $K_{F2}$ .

Во многих практических задачах недостаточно изучать только непрерывные токи. Как показано в [12–16], динамика в режиме прерывистых токов и поведение системы в целом принципиально отличаются качественно и количественно. В этой связи необходимо рассматривать динамические процессы в зоне прерывистых токов. Таким образом, при частотно-импульсной модуляции вектор переключательной функции  $K_{F1,2}(U_c, U_y, t) = f(KF_{VT1,2}, KF_{VD1,2})$  независим от состояния диодов  $VD_1, VD_2$  и транзисторов  $VT_1, VT_2$ .

На рис. 2 представлены диаграммы переключения транзисторов при частотно-импульсной модуляции (ЧИМ).

Частотно-импульсная модуляция включает в себя изменение длины паузы ( $\Delta\tau_k = var$ ), где  $var$  – это минимальное значение  $2d + \rho$ , для  $k=1, 2, \dots$  при постоянной длительности импульса ( $d = const$  и  $\rho = const$ ). Формирование алгоритма работы ключевых элементов при ЧИМ обычно реализуется генератором линейно-возрастающего напряжения, об-

разую коммутационные функции, определяющие частоту следования импульсов [7].

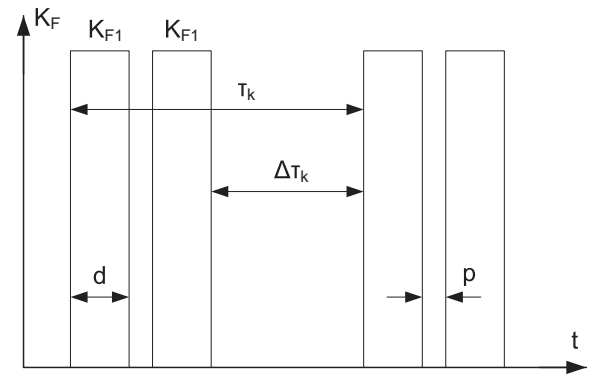


Рис. 2. Временные диаграммы работы частотно-импульсной модуляции

Fig. 2. Diagram of pulse-frequency modulation time

На рис. 3 приведены временные диаграммы токов ( $i_{L1}, i_{L2}, i_{L3}$ ) дросселей, сигнала ошибки ( $U_{OШ}(X, t)$ ) и последовательности переключения транзисторов при ЧИМ в ДППН.

Четыре вентиля периодически изменяют своё состояние и при математическом моделировании работы схемы предполагается, что цепь первый раз переключается в момент времени

$$(k-1)\tau_k \leq t < (k-1+d)\tau_k;$$

второй раз

$$(k-1+d)\tau_k \leq t < (k-1+d+\rho)\tau_k;$$

третий

$$(k-1+d+\rho)\tau_k \leq t < (k-1+d+\rho+d)\tau_k;$$

четвертый

$$(k-1+d+\rho+d)\tau_k \leq t < k\tau_k,$$

где  $k$  – целое;  $d$  – постоянная временных импульсов;  $\rho$  – время паузы (постоянная величина);  $\tau_k$  – пауза между импульсами  $K_{F1}$  и  $K_{F2}$  (переменная величина).

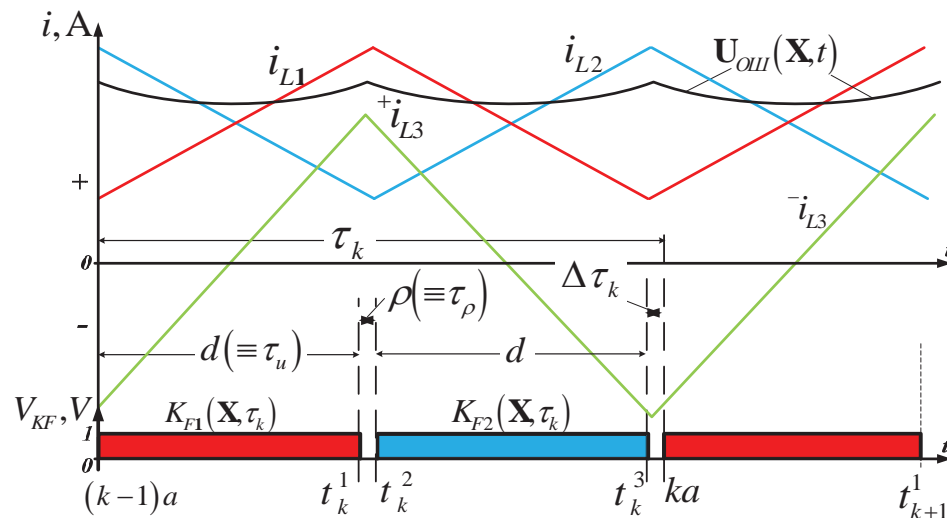


Рис. 3. Временные диаграммы тока в дросселях  $i_{L1}, i_{L2}, i_{L3}$ ,  $K_{F1}$  и  $K_{F2}$  с функцией обратной связи  $U_{OШ}$

Fig. 3. Time diagrams of inductors  $i_{L1}, i_{L2}, i_{L3}$  currents, switching functions  $K_{F1}, K_{F2}$  and feedback function

Точные уравнения для ДППН, представленные в табл. 1, могут рассматриваться как переменные структуры, которые переключаются в зависимости от состояния диодов и транзисторов. При этом повышающий преобразователь работает в режиме непрерывных токов и может быть описан следующей системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{cases} A_1\mathbf{X} + B, \rightarrow K_{F1} = 1, \\ K_{F2} = 0 \rightarrow (k-1)\tau_k \leq t < (k-1+d)\tau_k; \\ A_2\mathbf{X} + B, \rightarrow K_{F1} = 0, \\ K_{F2} = 0 \rightarrow (k-1+d)\tau_k \leq t < (k-1+d+\rho)\tau_k; \\ A_3\mathbf{X} + B, \rightarrow K_{F1} = 0, \\ K_{F2} = \\ = 1 \rightarrow (k-1+d+\rho)\tau_k \leq t < (k-1+d+\rho+d)\tau_k; \\ A_4\mathbf{X} + B, \rightarrow K_{F1} = 0, \\ K_{F2} = 0 \rightarrow (k-1+d+\rho+d)\tau_k \leq t < k\tau_k, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mathbf{X}$  обозначает вектор состояния цепи, т. е.  $\mathbf{X}_k = [i_{L1}, i_{L2}, i_{L3}, U_{C1}, U_{C2}, U_C]^T$ . Когда значение коммутационной функции перемещается через четыре состояния, решение системы (3) может быть получено аналитически или численно [5]. Поэтапное моделирование волновых форм возможно с использованием кусочной модели переключения. Характеристические мультипликаторы итеративной функции  $f(\cdot)$  являются корнями  $\lambda$  характеристического уравнения. Устойчивости точек равновесия ДППН зависят от траектории погрешности системы и определяются величиной собственных значений системы в них. Оценка точки равновесия решается с помощью следующего выражения

$$\det[\lambda E - J_G(\mathbf{X})] = 0. \quad (4)$$

При этом для характеристического уравнения должны выполняться условия, при которых хотя бы один мультипликатор

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \det[\lambda E - J_G(\mathbf{X})] \rightarrow -\infty,$$

а остальные ограничены.

В результате для этого мультипликатора справедливо утверждение:

$$\det[-J_G(\mathbf{X})] > 0. \quad (5)$$

Следовательно, для выражения (5) существует момент времени, начиная с которого по крайней мере один реальный корень  $\lambda$  отрицательный, таким образом, уравнение (4) удовлетворено условиям устойчивости.

#### Устойчивость точки равновесия и бифуркация Хопфа

Матрица Якоби  $J_G(\mathbf{X})$  системы строится в точках равновесия таким образом, что  $J_G(\mathbf{X})$  является матрицей, состоящей из итеративных функций  $f(\cdot)$ , рассчитанных в окрестностях  $\mathbf{X}$ . Для повышающих преобразователей с обратной связью по напряжению  $f(\cdot)$  может быть записана как

$$\mathbf{X}_{k+1} = \begin{bmatrix} f_1(i_{1,k}, i_{2,k}, i_{3,k}, U_{C1,k}, U_{C2,k}, U_{C,k}, \mathbf{P}^m) \\ \dots \\ f_6(i_{1,k}, i_{2,k}, i_{3,k}, U_{C1,k}, U_{C2,k}, U_{C,k}, \mathbf{P}^m) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Тогда на основании уравнения (6) система (1) принимает форму

$$\begin{bmatrix} i_{L1,k+1} \\ i_{L2,k+1} \\ i_{L3,k+1} \\ U_{C1,k+1} \\ U_{C2,k+1} \\ U_{C,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(\Delta\tau_k) & f_{12}(\Delta\tau_k) & f_{13}(\Delta\tau_k) & f_{14}(\Delta\tau_k) & f_{15}(\Delta\tau_k) & f_{16}(\Delta\tau_k) \\ f_{21}(\Delta\tau_k) & f_{22}(\Delta\tau_k) & f_{23}(\Delta\tau_k) & f_{24}(\Delta\tau_k) & f_{25}(\Delta\tau_k) & f_{26}(\Delta\tau_k) \\ f_{31}(\Delta\tau_k) & f_{32}(\Delta\tau_k) & f_{33}(\Delta\tau_k) & f_{34}(\Delta\tau_k) & f_{35}(\Delta\tau_k) & f_{36}(\Delta\tau_k) \\ f_{41}(\Delta\tau_k) & f_{42}(\Delta\tau_k) & f_{43}(\Delta\tau_k) & f_{44}(\Delta\tau_k) & f_{45}(\Delta\tau_k) & f_{46}(\Delta\tau_k) \\ f_{51}(\Delta\tau_k) & f_{52}(\Delta\tau_k) & f_{53}(\Delta\tau_k) & f_{54}(\Delta\tau_k) & f_{55}(\Delta\tau_k) & f_{56}(\Delta\tau_k) \\ f_{61}(\Delta\tau_k) & f_{62}(\Delta\tau_k) & f_{63}(\Delta\tau_k) & f_{64}(\Delta\tau_k) & f_{65}(\Delta\tau_k) & f_{66}(\Delta\tau_k) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{L1,k} \\ i_{L2,k} \\ i_{L3,k} \\ U_{C1,k} \\ U_{C2,k} \\ U_{C,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E. \quad (7)$$

Итеративная функция  $f(\cdot)$  в режиме  $A_1$  записывается аналогично (8), для  $i=1,2,3,4,5,6$ :

$$f_1(\cdot) = f_{11}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{12}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + g_1(\Delta\tau_k)E_0,$$

$$f_2(\cdot) = f_{21}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{22}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{26}(\Delta\tau_k)U_{C,k} + g_2(\Delta\tau_k)E_0,$$

$$f_3(\cdot) = f_{33}(\Delta\tau_k)i_{3,k} + f_{36}(\Delta\tau_k)U_{C,k},$$

$$f_4(\cdot) = f_{44}(\Delta\tau_k)U_{C1,k},$$

$$f_5(\cdot) = f_{52}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{53}(\Delta\tau_k)i_{3,k} + f_{55}(\Delta\tau_k)U_{C2,k},$$

$$f_6(\cdot) = f_{62}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{63}(\Delta\tau_k)i_{3,k} + f_{66}(\Delta\tau_k)U_{C,k}. \quad (8)$$

Итеративная функция  $f(\cdot)$  модели в режиме  $A_2=A_4$  может быть записана как

$$f_1(\cdot) = f_{11}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{12}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{16}(\Delta\tau_k)U_{C,k} + g_1(\Delta\tau_k)E_0,$$

$$f_2(\cdot) = f_{21}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{22}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{26}(\Delta\tau_k)U_{C,k} + g_2(\Delta\tau_k)E_0,$$

$$f_3(\cdot) = f_{33}(\Delta\tau_k)i_{3,k},$$

$$f_4(\cdot) = f_{41}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{42}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{44}(\Delta\tau_k)U_{C1,k},$$

$$f_5(\cdot) = f_{51}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{52}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{55}(\Delta\tau_k)U_{C2,k},$$

$$f_6(\cdot) = f_{61}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{62}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{66}(\Delta\tau_k)U_{C,k}. \quad (9)$$

Третья итеративная функция  $f(\cdot)$  модели в режиме  $A_3$  записывается следующим образом:

$$f_1(\cdot) = f_{11}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{12}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + f_{16}(\Delta\tau_k)U_{C,k} + g_1(\Delta\tau_k)E_0;$$

$$f_2(\cdot) = f_{21}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{22}(\Delta\tau_k)i_{2,k} + g_2(\Delta\tau_k)E_0;$$

$$\begin{aligned} f_3(\cdot) &= f_{33}(\Delta\tau_k)i_{3,k} + f_{36}(\Delta\tau_k)U_{C,k}; \\ f_4(\cdot) &= f_{52}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{53}(\Delta\tau_k)i_{3,k} + f_{44}(\Delta\tau_k)U_{C1,k}; \\ f_5(\cdot) &= f_{55}(\Delta\tau_k)U_{C2,k}; \\ f_6(\cdot) &= f_{62}(\Delta\tau_k)i_{1,k} + f_{63}(\Delta\tau_k)i_{3,k} + f_{66}(\Delta\tau_k)U_{C,k}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Delta\tau_k$  вычисляется из уравнения, описывающего закон управления ЧИМ, представленного ниже

$$\Delta\tau_k = \theta\tau_k^{\max} - 2d - \rho, \quad (11)$$

где  $\tau_k^{\min} \leq \tau_k \leq \tau_k^{\max}$ .

Определение  $\Delta\tau_k$  необходимо для того, чтобы моделировать закон управления в зависимости от состояния обратной связи (режим контроля напряжения или тока) для расчета каждого интервала переходного и устойчивого состояния преобразователя напряжения. Закон управления может быть представлен следующим образом

$$U_{\text{опп}i_k^2}(\mathbf{X}, t) = \alpha_2\alpha_1(U_y - \beta\mathbf{U}_k^C) - \alpha_2R_o(i_k^1 + i_k^2). \quad (12)$$

Итеративное уравнение, приведенное ниже, является функцией от  $\tau_k$

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= f(\tau_k); \\ \tau_{k+1} &= \Delta\tau_k = \theta\tau_k - (d + \rho + d), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tau_k$  имеет начальное значение, которое находится из уравнения (11):

$$\theta = (\varpi)^{-\text{sign}(\sigma+1)},$$

величина параметра  $\varpi=20$  получена подбором из эксперимента.

Регулирование параметров при использовании частотной модуляции для двухфазного повышающего преобразователя напряжения контролируется величиной паузы  $\tau_k$ . Таким образом, рабочий период системы рассчитывается исходя из условий (11) и вычисляется по нижеприведённым выражениям:

$$\tau_k^{\min} = 2(d + \rho) \text{ и } \tau_k^{\max} = \varpi(d + \rho);$$

$$\sigma = (1 - e^{-U_{\text{опп}}(\mathbf{X}, \tau_k)}),$$

где  $\sigma$  определяется как  $0 < \sigma < 1$ .

Для одноциклового режима (при условии, что  $X(\tau_k)=X_0$ ) уравнение записывается следующим образом [14]:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k^\Delta(\tau_k) &= \\ &= \mathbf{e}^{A_1(k\tau_k - t_k^3)} \cdot \mathbf{e}^{A_3(t_k^3 - t_k^2)} \cdot \mathbf{e}^{A_2(t_k^2 - t_k^1)} \cdot \mathbf{e}^{A_1(t_k^1 - t_k^0)} \cdot \mathbf{X}_0 + \\ &+ \mathbf{e}^{A_4(k\tau_k - t_k^3)} \cdot \mathbf{e}^{A_3(t_k^3 - t_k^2)} \cdot \mathbf{e}^{A_2(t_k^2 - t_k^1)} \cdot \mathbf{V}_k^0(t - t_k^0) + \\ &+ \mathbf{e}^{A_4(k\tau_k - t_k^3)} \cdot \mathbf{e}^{A_3(t_k^3 - t_k^2)} \cdot \mathbf{V}_k^1(t - t_k^1) + \\ &+ \mathbf{e}^{A_4(k\tau_k - t_k^3)} \cdot \mathbf{V}_k^2(t_k^3 - t_k^2) + \mathbf{V}_k^3(k\tau_k - t_k^3). \end{aligned} \quad (14)$$

Его периодические решения могут быть записаны как

$$\begin{aligned} f(\tau_k) &= \Phi(\tau_k) \left[ \begin{aligned} &\Phi(d) \cdot \Phi(\rho) \cdot \Phi(d) \cdot \mathbf{X}_0 + \\ &+ \Phi(d) \cdot \Phi(\rho) \cdot \mathbf{V}_u^0(d) + \\ &+ \Phi(d) \cdot \mathbf{V}_\rho^1(\rho) + \mathbf{V}_u^2(d) \end{aligned} \right] + \\ &+ \mathbf{V}_{\tau_k}^3(\tau_k) - \mathbf{X}_k(\tau_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, находится алгоритм управления исходя из выражений (13), (14):

$$\begin{aligned} U_{\text{опп}}(X, \tau_k) &= \\ &= \begin{cases} U_{\text{опп}} \rightarrow^+ U_{\text{опп}}^{\uparrow}, & 0 < \sigma < 1, \text{ for } \Phi(\tau_k) > 0; \\ U_{\text{опп}} \rightarrow 0, & \sigma = 1, \text{ for } \Phi(\tau_k) = 0; \\ U_{\text{опп}} \rightarrow^- U_{\text{опп}}^{\downarrow}, & \sigma < 0, \text{ for } \Phi(\tau_k) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Для участка  $\tau_k: \tau_k^{\min} \leq \tau_k \leq \tau_k^{\max}$  в любой момент времени для нормальной работы  $\Delta\tau_k$  записывается как

$$\tau_k = \Delta\tau_k + 2d + \rho.$$

В уравнениях (15) и (16) метод подстановки используется для упрощения вычислений.

Введем обозначения:

$$f(\tau_k) = \Psi \cdot \mathbf{X}_0 + \Omega - \mathbf{X}_k(\tau_k) = 0;$$

$$\Psi = \Phi(\tau_k) \times \Phi(d) \times \Phi(\rho) \times \Phi(d)$$

и для

$$\Omega = \mathbf{v} \times \mathbf{V}_u^0(d) + \delta \times \mathbf{V}_\rho^1(\rho) + \Delta \times \mathbf{V}_u^2(d) + \mathbf{V}_{\tau_k}^3(\tau_k);$$

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \Phi(\tau_k) \times \Phi(d) \times \Phi(\rho); \\ \delta = \Phi(\tau_k) \times \Phi(d); \\ \Delta = \Phi(\tau_k). \end{cases}$$

Тогда, выражение (15) представляется стробоскопическим сопоставлением следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_6 &= \prod_{i=6}^1 (\Psi^{(4i-3)})[\mathbf{X}_0] + \\ &+ \prod_{i=6}^2 (\Psi^{(4i-3)})[\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{V}_u^0 + \mathbf{v}^{(1)}\mathbf{V}_\rho^0 + \Delta^{(1)}\mathbf{V}_u^0 + \mathbf{V}_\Delta^0] + \\ &+ \prod_{i=6}^3 (\Psi^{(4i-3)})[\mathbf{v}^{(5)}\mathbf{V}_u^1 + \delta^{(5)}\mathbf{V}_\rho^1 + \Delta^{(5)}\mathbf{V}_u^1 + \mathbf{V}_\Delta^1] + \\ &+ \prod_{i=6}^4 (\Psi^{(4i-3)})[\mathbf{v}^{(9)}\mathbf{V}_u^2 + \delta^{(9)}\mathbf{V}_\rho^2 + \Delta^{(9)}\mathbf{V}_u^2 + \mathbf{V}_\Delta^2] + \\ &+ \prod_{i=6}^5 (\Psi^{(4i-3)})[\mathbf{v}^{(13)}\mathbf{V}_u^3 + \delta^{(13)}\mathbf{V}_\rho^3 + \Delta^{(13)}\mathbf{V}_u^3 + \mathbf{V}_\Delta^3] + \\ &+ \prod_{i=6}^6 (\Psi^{(4i-3)})[\mathbf{v}^{(17)}\mathbf{V}_u^4 + \delta^{(17)}\mathbf{V}_\rho^4 + \Delta^{(17)}\mathbf{V}_u^4 + \mathbf{V}_\Delta^4] + \\ &+ \mathbf{v}^{(21)}\mathbf{V}_u^5 + \delta^{(21)}\mathbf{V}_\rho^5 + \Delta^{(21)}\mathbf{V}_u^5 + \mathbf{V}_\Delta^5. \\ \Omega_{m-1}^{4m-3} &\equiv \mathbf{v}^{(4m-3)}\mathbf{V}_u^{(m-1)} + \delta^{(4m-3)}\mathbf{V}_\rho^{(m-1)} + \\ &+ \Delta^{(4m-3)}\mathbf{V}_u^{(m-1)} + \mathbf{V}_\Delta^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Может быть выполнена другая подстановка, т. е. шестая итерация записывается:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_6 &= \prod_{i=1}^6 (\Psi^{(4(6-i)+1)})\mathbf{X}_0^0 + \\ &+ \prod_{i=2}^6 (\Psi^{(4(6-i)+5)})\Omega_0^1 + \prod_{i=3}^6 \Psi^{(4(6-i)+9)}\Omega_1^5 + \\ &+ \prod_{i=4}^6 (\Psi^{(4(6-i)+13)})\Omega_2^9 + \prod_{i=5}^6 \Psi^{(4(6-i)+17)}\Omega_3^{13} + \\ &+ \prod_{i=6}^6 (\Psi^{(4(6-i)+21)})\Omega_4^{17} + \Omega_5^{21}. \end{aligned}$$

Итоговое уравнение в  $k$ -й итерации получается путем суммирования для  $n=k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k = & \prod_{i=1}^k (\Psi^{(4(k-i)+1)}) \mathbf{X}_0 + \prod_{i=2}^k (\Psi^{(4(k-i)+5)}) \Omega_0^1 + \\ & + \prod_{i=3}^k (\Psi^{(4(k-i)+9)}) \Omega_1^5 + \prod_{i=4}^k (\Psi^{(4(k-i)+13)}) \Omega_2^9 + \\ & + \prod_{i=5}^k (\Psi^{(4(k-i)+17)}) \Omega_3^{13} + \prod_{i=6}^k (\Psi^{(4(k-i)+21)}) \Omega_4^{17} + \dots + \\ & + \prod_{i=k}^k (\Psi^{(4(2k-i)-3)}) \Omega_{k-2}^{4k-7} + \Omega_{k-1}^{4k-3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сумма, представленная в выражении (17), позволяет получить зависимость

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m = & \prod_{i=1}^m (\Psi^{(4(m-i)+1)}) [\mathbf{X}_0] + \\ & + \sum_{j=1}^m \left( \prod_{i=j+1}^{m+1} (\Psi^{(4(m-i+j)+5)}) \right) \Omega_{i-1}^{4i-3} + \Omega_m^{4m+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $k=m$ .

При  $k=m$  для периодического сигнала  $\mathbf{X}_m(mT) = \mathbf{X}_0(0)$  получим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 = & \left( \mathbf{E} - \prod_{i=1}^m (\Psi^{(4(m-i)+1)}) \right)^{-1} \times \\ & \times \left( \sum_{j=1}^m \left( \prod_{i=j+1}^{m+1} (\Psi^{(4(m-i+j)+5)}) \right) \Omega_{i-1}^{4i-3} + \Omega_m^{4m+1} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив (19) в (18) вместо  $\mathbf{X}_0$ , вычисляем значения  $m$  для вектора переменных состояния  $\mathbf{X}(t)$  во время переключения через периоды  $\tau_k$ ,  $k=1 \dots m$ . Таким образом, нахождение  $m$ -цикла, выраженное в виде стробоскопического сопоставления, представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k = & \prod_{i=1}^k (\Psi^{(4(k-i)+1)}) \times \\ & \times \left[ \left( \mathbf{E} - \prod_{i=1}^m (\Psi^{(4(k-i)+1)}) \right)^{-1} \times \right. \\ & \times \left. \left( \sum_{j=1}^m \left( \prod_{i=j+1}^{m+1} (\Psi^{(4(m-i+j)+5)}) \right) \times \Omega_{i-1}^{4i-3} + \Omega_m^{4m+1} \right) \right] + \\ & + \sum_{j=1}^k \left( \prod_{i=j+1}^{k+1} (\Psi^{(4(m-i+j)+5)}) \right) \times \Omega_{j-1}^{4j-3} + \Omega_k^{4k+1}. \end{aligned}$$

Определение  $m$ -цикла представлено как стробоскопическое сопоставление, используемое для вычисления различных состояний систем через соответствующие итеративные методы (например, Ньютона-Рафсона или Гаусса-Зейделя).

Здесь матрица Якоби для  $\Delta \tau_k$  из выражений (9–12) вычисляется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{2,4}(\mathbf{X}) = & \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^1} & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial U_k^C} \\ \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^1} & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial U_k^C} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial i_k^3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^1} & \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial U_k^{C1}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^1} & \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial U_k^{C2}} & 0 \\ \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^1} & \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial U_k^C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Таким образом, каждый элемент в матрице Якоби  $\left( \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} \right)$  определяется как частная производная

элементов системы из уравнения (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^1} = & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^1} = & f_{11}(\Delta \tau_k) + f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^1} + \\ & + i_k^2 f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^1} + U_k^C f'_{16}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^1} + \\ & + E_0 g'_1(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^1}; \\ \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^2} = & i_k^1 f'_{11}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^2} + f_{12}(\Delta \tau_k) + \\ & + i_k^2 f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^2} + U_k^C f'_{16}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^2} + \\ & + E_0 g'_1(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^2}; \\ \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^3} = & i_k^1 f'_{11}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^3} + i_k^2 f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^3} + \\ & + U_k^C f'_{16}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^3} + E_0 g'_1(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{di_k^3}; \\ \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial U_k^{C1}} = & i_k^1 f'_{11}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C1}} + i_k^2 f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C1}} + \\ & + U_k^C f'_{16}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C1}} + E_0 g'_1(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C1}}; \\ \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial U_k^{C2}} = & i_k^1 f'_{11}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C2}} + i_k^2 f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C2}} + \\ & + U_k^C f'_{16}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C2}} + E_0 g'_1(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^{C2}}; \\ \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial U_k^C} = & i_k^1 f'_{11}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^C} + i_k^2 f'_{12}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^C} + \\ & + U_k^C f'_{16}(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^C} + E_0 g'_1(\Delta \tau_k) \frac{d\Delta \tau_k}{dU_k^C}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Аналогичные зависимости строятся для остальных производных из уравнения (7); здесь их подробно приводить не имеет смысла:

$$f_2(\cdot) = f_{21}(\Delta\tau_k)i_k^1 + f_{22}(\Delta\tau_k)i_k^2 + f_{26}(\Delta\tau_k)U_k^C + g_2E_0;$$

$$\frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^1} = \dots; \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^2} = \dots; \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^3} = \dots;$$

$$\frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial U_k^{c1}} = \dots; \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial U_k^{c2}} = \dots; \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial U_k^C} = \dots;$$

$$f_3(\cdot) = f_{33}(\Delta\tau_k)i_k^3;$$

$$\frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial i_k^1} = \dots; \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial i_k^2} = \dots; \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial i_k^3} = \dots;$$

$$\frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial U_k^{c1}} = \dots; \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial U_k^{c2}} = \dots; \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial U_k^C} = \dots;$$

$$f_4(\cdot) = f_{41}(\Delta\tau_k)i_k^1 + f_{42}(\Delta\tau_k)i_k^2 + f_{44}(\Delta\tau_k)U_k^{c1};$$

$$\frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^1} = \dots; \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^2} = \dots; \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^3} = \dots;$$

$$\frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial U_k^{c1}} = \dots; \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial U_k^{c2}} = \dots; \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial U_k^C} = \dots;$$

$$f_5(\cdot) = f_{51}(\Delta\tau_k)i_k^1 + f_{52}(\Delta\tau_k)i_k^2 + f_{55}(\Delta\tau_k)U_k^{c2};$$

$$\frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^1} = \dots; \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^2} = \dots; \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^3} = \dots;$$

$$\frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial U_k^{c1}} = \dots; \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial U_k^{c2}} = \dots; \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial U_k^C} = \dots;$$

$$f_6(\cdot) = f_{61}(\Delta\tau_k)i_k^1 + f_{62}(\Delta\tau_k)i_k^2 + f_{66}(\Delta\tau_k)U_k^C;$$

$$\frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^1} = \dots; \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^2} = \dots; \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^3} = \dots;$$

$$\frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial U_k^{c1}} = \dots; \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial U_k^{c2}} = \dots; \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial U_k^C} = \dots$$

Характеристические мультипликаторы вычисляются через нахождение фиксированных точек, соответствующих тому или иному выходному сигналу X [13].

Любой из оговоренных выше численных методов может быть использован с целью нахождения нелинейных градиентов выражения (14) для фиксированных решений линеаризованной системы (7) через линеаризацию нелинейной динамической системы (2).

При использовании метода Ньютона нахождение фиксированной точки записывается как  $\mathbf{X} = -\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{B}$ , а её итеративное представление как

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - [\mathbf{J}(\mathbf{X}_k)]^{-1} \times \mathbf{f}(\mathbf{X}_k).$$

Итеративный процесс повторяется до тех пор, пока  $\|\mathbf{f}(\mathbf{X}_k)\| > \varepsilon$ .

Таким образом, решение характеристического уравнения (4) записывается как

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^1} & -\frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial f_1(\cdot)}{\partial U_k^C} \\ -\frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^1} & \lambda - \frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial f_2(\cdot)}{\partial U_k^C} \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{\partial f_3(\cdot)}{\partial i_k^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^1} & -\frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & \lambda - \frac{\partial f_4(\cdot)}{\partial U_k^{c1}} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^1} & -\frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & \lambda - \frac{\partial f_5(\cdot)}{\partial U_k^{c2}} & 0 \\ -\frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^1} & -\frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial i_k^2} & 0 & 0 & 0 & \lambda - \frac{\partial f_6(\cdot)}{\partial U_k^C} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_6 \\ a_7 & \lambda - a_8 & 0 & 0 & 0 & a_{12} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{15} & 0 & 0 & 0 \\ a_{19} & a_{20} & 0 & \lambda - a_{22} & 0 & 0 \\ a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & \lambda - a_{29} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{36} \end{pmatrix} = 0. \quad (20)$$

Из выражения (20) собственные значения и собственные вектора могут быть получены путем решения определителя. А это возможно, если:

$$(\lambda - a_1)(\lambda - a_8)(\lambda - a_{15})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{29})(\lambda - a_{36}) + a_2a_7(\lambda - a_{15})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{29})(\lambda - a_{36}) = 0;$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(\lambda - a_1)(\lambda - a_8) + a_2a_7 \\ &(\lambda - a_{15})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{29})(\lambda - a_{36}) \end{aligned} \right\} = 0.$$

$(\lambda - a_1)(\lambda - a_8) + a_2a_7 = 0$  формируют квадратное уравнение, где

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_1 + a_8) \pm \sqrt{(a_1 + a_8)^2 - 4(a_1a_8 + a_2a_7)}}{2(a_1 + a_8)}.$$

Если собственные числа  $\lambda_3$  до  $\lambda_6$  меньше нуля, они имеют действительные и отрицательные корни. Из этого можно сделать вывод, что система находится в стабильном состоянии и уравнение (16) может иметь действительные и мнимые корни (колебательный режим):

$$\lambda_3 = a_{15}, \lambda_4 = a_{22}, \lambda_5 = a_{29}, \lambda_6 = a_{36}.$$

### Заключение

Получены множители матрицы Якоби для анализа устойчивости ДППН с ЧИМ.

Использование матрицы Якоби позволяет исследовать проблему поиска решения кусочно-линейной системы дифференциальных уравнений путем интегрирования функций, содержащих разрывы первого рода, что является нетривиальной задачей [17–20].

Способ управления ДППН, основанный на ЧИМ, потребовал разработки математической модели. Были выведены математические выражения, описывающие принципы формирования коммутационной функции при частотной модуляции. Эти принципы были обобщены в форме вычислительного алгоритма поиска решений, в котором производится расчёт матрицы Якоби путём создания стробоскопического отображения Пуанкаре для исходной задачи.

Также реализован алгоритм анализа устойчивости найденного решения, и определены значения мультипликаторов, при которых система имеет устойчивое периодическое колебательное движение.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русскин В.А., Семенов С.М., Диксон Р.К. Исследование алгоритмов поиска точки максимальной мощности для повышающего преобразователя напряжения солнечного инвертора // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2016. – Т. 327. – № 4. – С. 78–87.
2. Диксон Р.К., Русскин В.А., Семенов С.М. Алгоритм поиска точки максимальной мощности для повышающего преобразователя с ПИ-регулятором в солнечном инверторе // Электромеханические преобразователи энергии: матер. VII Междунар. научно-техн. конф. – Томск, 2015. – Т. 1. – С. 153–157.
3. Русскин В.А., Семенов С.М., Михальченко С.Г. Исследование динамических процессов в повышающем преобразователе напряжения с жесткой и мягкой коммутацией // Промышленная энергетика. – 2015. – № 8. – С. 23–30.
4. Yilser Devrim, Levent Bilir. Performance investigation of a wind turbine-solar photovoltaic panels–fuel cell hybrid system installed at Incek region – Ankara, Turkey // Energy Conversion and Management. – 2016. – V. 126. – № 8. – P. 759–766. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S0196890416307361 (дата обращения: 11.11.2016).
5. Neng Zhang, Danny Sutanto, Kashem M. Muttaqi. A review of topologies of three-port DC–DC converters for the integration of renewable energy and energy storage system // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2016. – V. 56. – № 4. – P. 388–401. URL: sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032115013465 (дата обращения: 11.11.2016)
6. PWM-Switch Modeling of DC-DC Converters / Edwin van Dijk, Herman J.N. Spruijt, Dermot M. OrSullivan, J. Ben Klaassens // IEEE Transactions on Power Electronics. 1995. – V. 10. – № 6. – P. 659–665.
7. Двухфазный повышающий преобразователь с мягкой коммутацией транзисторов и особенности его динамических свойств / Р.К. Диксон, Ю.Н. Дементьев, Г.Я. Михальченко, С.Г. Михальченко, С.М. Семёнов // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 4. – С. 96–101.
8. An assessment on performance of DC–DC converters for renewable energy applications / S. Sivakumar, M. Jagabar Sathik, P.S. Manoj, G. Sundararajan // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2016. – V. 58. – № 5. – P. 1475–1485. URL: dx.doi.org/10.1016/j.rser.2015.12.057 (дата обращения: 11.11.16).
9. Abdullah Abusorrah, Mohammed M. Al-Hindawi, Yusuf Al-Turki. Stability of a boost converter fed from photovoltaic source // Solar Energy. – 2013. – V. 98. – № 12. – P. 458–471. URL: dx.doi.org/10.1016/j.solener.2013.09.001 (дата обращения: 11.11.16).
10. Ghada Aldahim, Hashem Oirekozek, Ziad Sakka. Impact of Inductor Resistance on the Dynamic Behaviour of a DC–DC Boost Converter Using Bifurcation and Chaos Theory // Advancements in Renewable Energy and Clean Environment: TerraGreen 13 International Conference. – 2013. – V. 36. – P. 1025–1034. URL: dx.doi.org/10.1016/j.egypro.2013.07.117 (дата обращения: 15.09.16)
11. Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterina E.A., Mosekilde E. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2001. – V. 11. – № 12. – P. 2977–3001.
12. Tse C.K. Flip Bifurcation and Chaos in Three-state Boost Switching Regulators // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1994. – V. 41. – № 1. – P. 16–23.
13. Гаврилов А. А., Михальченко Г. Я., Михальченко С. Г. Нелинейная динамика преобразователей с многофазной импульсной модуляцией // Доклады Томского университета систем управления и радиоэлектроники. – 2009. – Т. 20. – № 3. – С. 171–178.
14. Нелинейная динамика полупроводниковых преобразователей / А.В. Кобзев, Г.Я. Михальченко, А.И. Андриянов, С.Г. Михальченко. – Томск: Изд-во Томского университета систем управления и радиоэлектроники, 2007. – 294 с.
15. Михальченко Г.Я., Малаханов А.А. Математическая модель однофазного корректора коэффициента мощности // Доклады Томского университета систем управления и радиоэлектроники. – 2008. – Т. 18. – № 2. – Ч. 2. – С. 143–149.
16. High-Feedback Operation of Power Electronic Converters / Zh.T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, A.I. Andriyanov, G.Y. Mikhilchenko // Electronics. – 2013. – V. 2. – P. 113–167. URL: mdpi.com/journal/electronics (дата обращения: 15.09.16).
17. Femia N., Spagnuolo G., Vitelli M. Steady-state analysis of hard and soft switching DC-to-DC regulators // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2003. – V. 18. – № 1. – P. 51–64.
18. Combined PWM and PFM control for universal line voltage of a piezoelectric transformer off-line converter / S. Hamamura, T. Ninomiya, M. Yamamoto, M. Katsuno // IEEE Transactions on Power Electronics. – 2003. – V. 18. – № 1. – P. 270–277.
19. Prasada J.S., Obuleshb Y.P., Babu Ch.Sai. FPGA (Field Programmable Gate Array) controlled solar based zero voltage and zero current switching DC–DC converter for battery storage applications // Energy. – 2016. – V. 106. – № 6. – P. 728–742. URL: dx.doi.org/10.1016/j.energy.2016.03.002 (дата обращения: 11.11.16).
20. A highly efficient PV system using a series connection of DC–DC converter output with a photovoltaic panel / Ho-sung Kim, Jong-Hyun Kimb, Byung-Duk Min, Dong-Wook Yoo, Hee-Je Kim // Renewable Energy. – 2009. – V. 34. – № 11. – P. 2432–2436. URL: dx.doi.org/10.1016/j.renene.2009.01.011 (дата обращения: 11.11.16).

Поступила 19.12.2016 г.

## Информация об авторах

**Диксон Р.К.**, специалист отдела энергетики ЮНЕСКО зоны Карибского бассейна.

**Михальченко Г.Я.**, доктор технических наук, профессор кафедры промышленной электроники Томского Университета Систем Управления и Радиоэлектроники.

**Михальченко С.Г.**, доктор технических наук, профессор кафедры электропривода и электрооборудования Энергетического института Национального исследовательского Томского политехнического университета.

**Русскин В.А.**, магистрант Энергетического института Национального исследовательского Томского политехнического университета.

**Семёнов С.М.**, старший преподаватель кафедры электропривода и электрооборудования Энергетического института Национального исследовательского Томского политехнического университета.

UDC 621.314.2:632

## ISSUES OF LINEARIZATION OF A TWO-PHASE BOOST DC-DC CONVERTER APPLIED IN THE POWER SUPPLY SYSTEMS OPERATING ON RENEWABLE ENERGY SOURCES

**Robert C. Dixon<sup>1</sup>,**  
robert\_dixon@mail.ru

**Gennady Ya. Mikhailchenko<sup>2</sup>,**  
kpe-tusur@yandex.ru

**Sergey G. Mikhailchenko<sup>3</sup>,**  
msg@ie-tusur.ru

**Viktor A. Russkin<sup>3</sup>,**  
vrsskn@gmail.com

**Sergey M. Semenov<sup>3</sup>,**  
ssm@tpu.ru

<sup>1</sup> UNESCO Caribbean Energy Division Specialist,  
25, Dominica Drive, Kingston 5, JMAKN04, Jamaica.

<sup>2</sup> Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics,  
40, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russia.

<sup>3</sup> National Research Tomsk Polytechnic University,  
30, Lenin avenue, Tomsk, 634050, Russia.

*Renewable energy resources, for example photovoltaic elements and wind turbines, draw the increasing attention due to energy shortage and depletion of energy sources. Such energy sources usually give low voltage output. So the elementary photovoltaic electric power supply based on silicon gives about 0,7 V EMF, and based on germanium – 0,4 V. However, the possibilities of sequential accumulation of output potential are limited due to the need of increase in parallel branches of solar panels. The solution of this problem led to development of power supply systems on the basis of pulse-width boost converters.*

*There is a task on improving the efficiency of this type of converters. In particular, to determine stability and research of dynamics in mathematical models of installations of power electronics the Jacobi method is widely applied. While developing the power supply systems of different function the use of the Jacobi matrix increases their energy parameters. At the same time application of function of Poincare for iterative display of the Jacobi method makes it possible to determine the operating modes of the converter for specific points after changing the parameters of the system. Thus, Jacobi matrix, being an dimensionless size, allows linearizing the characteristic in the fixed points for their analysis. Therefore, partial differentiation of nonlinear system gives the opportunity to obtain the fixed values, being the characteristic animator of the system – eigenvalues of a matrix.*

*All the studies were carried out on the example of two-phase boost dc-dc converter with pulse frequency modulation. The peculiarity of the paper consists in use of the Jacobi matrix for linearizing non-linear systems when studying dynamics to determine steady and unstable modes of functioning of energy converters. Such mathematical approach allows increasing the efficiency and reliability of the voltage converter by identification of the abnormal dynamic operation modes in the device, reducing energy losses, i. e. increasing energy efficiency of a power supply system.*

**The aim** of the research is to develop an alternative method of linearization by using the Jacobi matrix to analyze stability of operation of various converters. The circuit of the studied converter assumes energy accumulation in inductive elements for shutdown at zero current or zero voltage. The results will be introduced in the form of display of Poincare through the Newton-Rafson-Jacobi method.

**Methods:** review of technical publications, concerned the need of using Jacobi matrixes to analyze various converters stability. The control algorithm of two-phase pulse converter is simulated in LTSpice and MATLAB. The analysis of appropriate characteristics of TPBC includes Jacobi and Newton-Rafson methods. The latter has rather fast convergence and fine precision of discrete values. It is shown below in chaos and bifurcation modes.

**Results.** The obtained eigenvalues define the operation modes of management system of TPBC, developed on the basis of the two-phase pulse converter. These results will help to reveal those parameters of the system in case of which it functions in normal or abnormal statuses, thereby will allow separating one modes of functioning from others, and thus increasing reliability and efficiency of the system.

### Key words:

*Eigenvalues, Jacobi matrix, Poincare's display, analysis of stability, non-linear dynamic system, Newton-Rafson method.*

### REFERENCES

1. Russkin V.A., Semenov S.M., Dixon R.C. Study of maximum power point tracking algorithms for boost DC-DC converter of solar inverter. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo assets Engineering*, 2016, vol. 327, no. 4, pp. 78–87. In Rus.
2. Russkin V.A., Semenov S.M., Dixon R.C. Algorithm of search of a maximum power point for boost DC-DC converter with the PI-regulator in the solar inverter. *Electromechanical Converters of Energy. Materials of the VII international scientific and technical conference*. Tomsk, 2015. Vol. 1, pp. 153–157.

3. Russkin V.A., Semenov S.M., Mikhailchenko S.G. Research of dynamic processes in the Boost DC-DC converter with hard and soft switching. *Industrial power engineering*, August 2015, vol. 8, pp. 23–30. In Rus.
4. Yilser Devrim, Levent Bilir. Performance investigation of a wind turbine–solar photovoltaic panels–fuel cell hybrid system installed at Incek region – Ankara, Turkey. *Energy Conversion and Management*, 2016, vol. 126, no. 8, pp. 759–766. Available at: [sciedirect.com/science/article/pii/S0196890416307361](http://sciedirect.com/science/article/pii/S0196890416307361) (accessed 11 November 2016)
5. Neng Zhang, Danny Sutanto, Kashem M. Muttaqi. A review of topologies of three-port DC–DC converters for the integration of renewable energy and energy storage system. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2016, vol. 56, no. 4, pp. 388–401. Available at: [sciedirect.com/science/article/pii/S1364032115013465](http://sciedirect.com/science/article/pii/S1364032115013465) (accessed 11 November 2016).
6. Van Dijk E., Spruijt Herman J.N., OrSullivan D.M., Klaasens J.B. PWM-Switch Modeling of DC-DC Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 1995, vol. 10, no. 6, pp. 659–665.
7. Dixon R.C., Dementyev Yu.N., Mikhailchenko G.Ya., Mikhailchenko S.G., Semenov S.M. Dynamic properties of a two-phase boost converter with soft-switching transistors technology. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 4, pp. 96–101. In Rus.
8. Sivakumar S., Sathik M.J., Manoj P.S., Sundararajan G. An assessment on performance of DC–DC converters for renewable energy applications. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2016, vol. 58, no. 5, pp. 1475–1485. Available at: [dx.doi.org/10.1016/j.rser.2015.12.057](http://dx.doi.org/10.1016/j.rser.2015.12.057) (accessed 11 November 2016)
9. Abdullah Abusorrah, Mohammed M. Al-Hindawi, Yusuf Al-Turki. Stability of a boost converter fed from photovoltaic source. *Solar Energy*, 2013, vol. 98, no. 12, pp. 458–471. Available at: [dx.doi.org/10.1016/j.solener.2013.09.001](http://dx.doi.org/10.1016/j.solener.2013.09.001) (accessed 11 November 2016).
10. Ghada Aldahim, Hashem Oirekozek, Ziad Sakka. Impact of Inductor Resistance on the Dynamic Behaviour of a DC–DC Boost Converter Using Bifurcation and Chaos Theory. *Advancements in Renewable Energy and Clean Environment: TerraGreen 13 International Conference*, 2013, vol. 36, pp. 1025–1034. Available at: [dx.doi.org/10.1016/j.egypro.2013.07.117](http://dx.doi.org/10.1016/j.egypro.2013.07.117) (accessed 15 September 2016).
11. Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterina E.A., Mosekilde E. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, vol. 11, no. 12, pp. 2977–3001.
12. Tse C.K. Flip Bifurcation and Chaos in Three-state Boost Switching Regulators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1994, vol. 41, no. 1, pp. 16–23.
13. Gavrilov A.A., Mikhailchenko G.Ya., Mikhailchenko S.G. Nonlinear dynamics of semiconductor power converters with multiphase modulation. *Journal TUSUR*, 2009, vol. 20, no. 3, pp. 171–178. In Rus.
14. Kobzev A.V., Mikhailchenko G.Ya., Andriyanov A.I., Mikhailchenko S.G. *Nelineynaya dinamika poluprovodnikovkh preobrazovateley* [Nonlinear dynamics of semiconductor in power electronics converters]. Tomsk, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics Press, 2007. 294 p.
15. Mikhailchenko G.Ya., Malakhanov A.A. A mathematical model of a single-phase power factor corrector. *Journal TUSUR*, 2008, vol. 18, no. 2, pp. 143–149. In Rus.
16. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Andriyanov A.I., Mikhailchenko G.Y. High-Feedback Operation of Power Electronic Converters. *Electronics*, 2013, vol. 2, pp. 113–167. Available at: [mdpi.com/journal/electronics](http://mdpi.com/journal/electronics) (accessed 15 September 2016).
17. Femia N., Spagnuolo G., Vitelli M. Steady-state analysis of hard and soft switching DC-to-DC regulators. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 51–64.
18. Hamamura S., Ninomiya T., Yamamoto M., Katsuno M. Combined PWM and PFM control for universal line voltage of a piezoelectric transformer off-line converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 270–277.
19. Prasada J.S., Obuleshb Y.P., Babu Ch.Sai. FPGA (Field Programmable Gate Array) controlled solar based zero voltage and zero current switching DC–DC converter for battery storage applications. *Energy*, 2016, vol. 106, no. 6, pp. 728–742. Available at: [dx.doi.org/10.1016/j.energy.2016.03.002](http://dx.doi.org/10.1016/j.energy.2016.03.002) (accessed 11 November 2016).
20. Ho-sung Kima, Jong-Hyun Kimb, Byung-Duk Min, Dong-Wook Yoo, Hee-Je Kim. A highly efficient PV system using a series connection of DC–DC converter output with a photovoltaic panel. *Renewable Energy*, 2009, vol. 34, no. 11, pp. 2432–2436. Available at: [dx.doi.org/10.1016/j.renene.2009.01.011](http://dx.doi.org/10.1016/j.renene.2009.01.011) (accessed 11 November 2016).

*Received: 19 December 2016.*

#### Information about the authors

**Robert C. Dixon**, expert, UNESCO Caribbean Energy Division.

**Gennady Ya. Mikhailchenko**, Dr. Sc., professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics.

**Sergey G. Mikhailchenko**, Dr. Sc., professor, National Research Tomsk Polytechnic University.

**Viktor A. Russkin**, postgraduate, National Research Tomsk Polytechnic University.

**Sergey M. Semenov**, senior teacher, National Research Tomsk Polytechnic University.