ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Чиркова Е.М., Простакишина Е.А., Винокурова Г.Ф.
Томский политехнический университет
emc1@tpu.ru, eap40@tpu.ru, ving8@mail.ru

Введение

Поверхность можно представить, как общую часть двух смежных областей пространства. В начертательной геометрии поверхность определяется как совокупность последовательных положений линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону. Каркасом задают сложные поверхности технических объектов, таких как обшивки самолетов, автомобилей, судов, лопатки турбин, насосов. Каркасные поверхности задают на чертеже проекциями элементов каркаса. Каркас таких поверхностей называется дискретным. При конструировании каркасных поверхностей возникает необходимость заранее задавать в координатной плоскости непрерывные однопараметрические семейства линий. Однопараметрическое семейство кривых, обладает свойством: через каждую точку некоторой области плоскости XOY проходит, одна кривая семейства [1].

Кривые высших порядков

Однопараметрические множества кривых можно конструировать и из кривых высших порядков путем изменения параметров, входящих в их уравнения. Кривая, известная под названием верзиеры, задается уравнением (1). Примем величину a за переменный параметр. Получим (рис. 1, а) однопараметрическое множество верзиер.

$$y(a^2+x^2)=a^3 \quad (1)$$

Кривая Никомеда задается уравнением (2). Изменяя в уравнении конхоиды величину параметра l, получаем при постоянном a семейство конхоид (рис. 1, б).

$$(x^2+y^2)(x-a)^2-l^2x^2=0 \quad (2)$$

Кривая, известная под названием «бисквит», задается уравнением (3). Приняв величину a за переменный параметр, получим множество кривых типа «бисквит» (рис.1, в).

$$x^4+y^4=a(x^2+y^2) \qquad (3)$$

Кривая псевдоквадрата имеет уравнение (4). Это четырехпараметрическая кривая. Приняв величину a за переменный параметр, получим семейство псевдоквадратов (рис. 1, г). Приняв в уравнении (5) за переменную величину a, получим семейство пятипараметрических кривых шестого порядка (рис. 1, д). Приняв в том же уравнении за переменную величину параметра c, получим другое семейство тех же кривых шестого порядка (рис. 1, е).

$$x^4+y^4=a^4 \ (4)$$

$$(x^2+y^2)=\left[c+a\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\right]^2 \qquad (5)$$

Кривая, известная под названием овала Кассини, имеет уравнение (6). Это пятипараметрическая кривая четвертого порядка. Положив c постоянным, а a – переменным, получим однопараметрическое семейство овалов Кассини (рис. 1, ж).

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4 \quad (6)$$

Лемниската Бута задается уравнением (7). При постоянном a и переменном c получаем соответствующее семейство (рис. 1, з).

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+c^2y^2 \qquad (7)$$

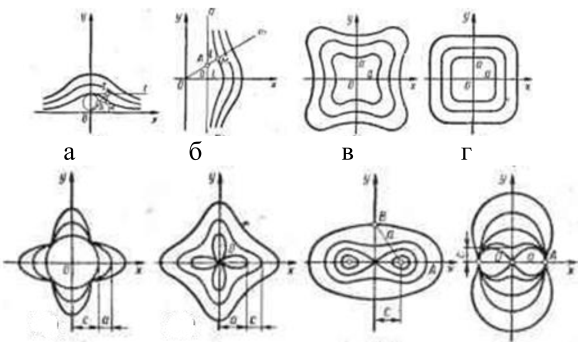


Рис. 1. Однопараметрическое семейство кривых высших порядков

Однопараметрические семейства обводов

Обводом называется кривая, составленная из нескольких дуг кривых различных уравнений. Как правило, это – многопараметрические кривые. Существуют способы задания единых уравнений обводов, основанные на операции модулирования независимых переменных и их функций. Задав обвод его уравнением, мы можем, как и в обычном случае, изменять какой-нибудь его параметр, получая при этом семейство обводов.

Множество квадратов. Известно, что уравнению (8) соответствует квадрат с вершинами, расположенными в точках $A\ (a,0)$; $B\ (0,a)$; $C\ (-a,0)$ и $D\ (0,-a)$.

$$|y|+|x|=a \qquad (8)$$

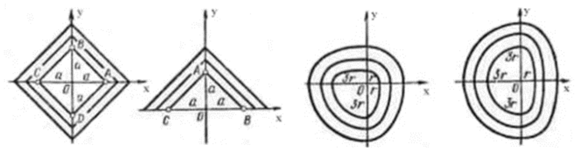
Если в уравнении квадрата придавать параметру a различные значения, мы получим семейство квадратов (рис. 2). Возьмем треугольник, его уравнение (9)

$$[y + |y| + 2|x| - 2a]\big[|y| + |x| - a + \big||x| - a\big|\big] = 0 \quad (9)$$

Если в этом уравнении изменять непрерывно параметр a, то получим однопараметрическое множество прямоугольных равнобедренных треугольников ABC с перекрывающимися основаниями AC, (рис. 3).

Уравнению (10) соответствует замкнутый обвод, составленный из дуг. Если в уравнении обвода изменять параметр r, то мы получим однопараметрическое семейство замкнутых обводов (рис.4).

$$(2x + |x|)^2 + (2y + |y|)^2 = 9r^2 \qquad (10)$$



а б в г

Рис. 2. Однопараметрическое семейство обводов квадратов и эллипсов

Переменному параметру r будет соответствовать множество незамкнутых обводов уравнение (11) (рис. 3, а):

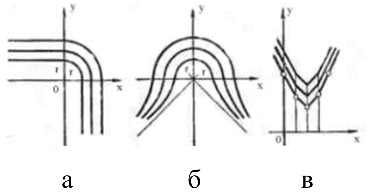
$$x^2 + y|y| = r^2 \qquad (11)$$

при $y \geq 0$ – дуга полуокружности $x^2 + y^2 = r^2$;
при $y < 0$ – две дуги гипербол $x^2 - y^2 = r^2$.

При изменении значений параметра r, уравнение (12), (рис. 3, б) получаем семейство подобных обводов с центром подобия в начале координат.

$$y - b = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \text{ при } b = 0 \quad (12)$$

Если изменять значения параметра b, получим семейство параллельно-смещаемых обводов (рис. 3, в).



а б в

Рис. 3. Однопараметрическое семейство незамкнутых обводов

Возьмем два квадрата: один с уравнением (13) и уравнением (14)

$$|x| + |y| = \mathrm{I} \qquad (13)$$

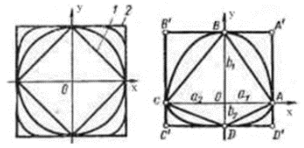
$$\big||x| - |y|\big| + |x| + |y| = 2 \qquad (14)$$

Кривая с уравнением (15) при переменном p пробегающем значения $1 < p < \infty$, занимает всевозможные промежуточные положения между указанными выше квадратами и при $p \to \mathrm{I}$ стремится к первому квадрату, а при $p \to \infty$ стремится ко второму квадрату. При $p = 2$ получаем окружность, при $p = 4$ – псевдоквадрат (рис. 4, а). Введя в рассмотрение величины уравнение (15), (16) можно показать, что уравнению (13) соответствует четырехугольник, уравнению (14) соответствует прямоугольник,

$$|\bar{x}| = \frac{a_2 - a_1}{2a_1a_2}x + \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2}|x|, \qquad (15)$$

$$|\bar{y}| = \frac{b_2 - b_1}{2b_1b_2}y + \frac{b_1 + b_2}{2b_1b_2}|y|, \qquad (16)$$

Уравнению (17) при переменном p, пробегающим значения $\infty > p > \mathrm{I}$ соответствуют кривые, расположенные между четырехугольником и прямоугольником. При $p \to \mathrm{I}$ кривая приближается к четырехугольнику $ABCD$, при $p \to \infty$ кривая приближается к прямоугольнику $A'B'C'D'$. При $p = 2$ получаем обвод, составленный из четырех дуг различных эллипсов (рис. 4, б).



а б

Рис. 4. Однопараметрическое семейство обводов псевдоквадратов

Выводы

Таким образом, если каркас задан аналитически – системой уравнений, то можно перейти к графическому заданию, вычертив на чертеже ряд линий каркаса, как графики определенных функций. Однопараметрические семейства кривых второго порядка можно использовать для построения каркасной поверхности, определителем которой служит некоторый дискретный каркас.

Литература

1. Курдюмов В.И. Курс начертательной геометрии. Ортогональные проекции. – СПб, 1985.
2. Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. В.А. Топоногов. – Издательство «Физматкига». – М. 2012 г.
3. Филиппов В.А. Основы геометрии поверхностей оболочек пространственных конструкций. В.А. Филиппов. – Издательство «Физматкига». – М. 2009 г.
4. Математическая энциклопедия (в 5-и томах). – М.: Советская энциклопедия, 1982.
5. Савелов А.А. Плоские кривые / Под ред. А.П. Нордена. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960