КАРКАСНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ЗАВИСИМЫХ СЕЧЕНИЙ

Долотов А.Е., Шмакова Э.С., Долотова Р.Г.
Томский политехнический университет
ess35@tpu.ru, dolot63@mail.ru

Введение

Чертеж является одним из средств общения людей в их производственной деятельности, дает возможность наглядного моделирования элементов пространства в их взаимодействии и движении, он содержит информацию о технологии изготовления изделий разной сложности. При решении отдельной геометрической задачи часто встает вопрос выбора метода решения задачи. В основе построения чертежей лежат две первичные операции проективной геометрии – проектирование и сечение [1].

Задание поверхности каркасом

Если поверхность задана каркасом, то это значит, что задан ее непрерывный каркас. В этом случае через любую точку проходит линия каркаса, и, следовательно, можно выделить все точки пространства, принадлежащие рассматриваемой поверхности и относительно любой точки пространства решить вопрос – принадлежит она данной поверхности, или нет. Исходя из этого, поверхность может нести на себе сколько угодно различных каркасов. Поэтому задавать одну и ту же поверхность можно различными каркасами или их сочетанием. Закон каркаса должен формулировать такие геометрические зависимости и условия, которые, выступая в роли параметров, давали бы возможность выделять из параметрического множества определенных линий однопараметрическое множество этих линий.

Конструирование поверхностей зависимых сечений

Каркасные поверхности зависимых сечений, это поверхности, образуемые не конгруэнтными плоскими кривыми одного и того же однопараметрического семейства. Алгоритмическая последовательность этапов конструирования таких поверхностей совпадает с алгоритмической последовательностью этапов конструирования поверхностей конгруэнтных сечений. Отличие имеется только на втором этапе, когда вместо размножения заданной в плоскости *ZX* кривой, последняя кривая размножается в однопараметрическое семейство не конгруэнтных кривых. Частные виды поверхностей зависимых сечений получаются с одной стороны за счет способов задания исходных однопараметрических семейств, с другой стороны – за счет различных способов выбора векторов параллельного переноса [2].

Частные виды поверхностей зависимых сечений

Непрерывно-топографические поверхности – это поверхности, которые несут на себе непрерывное множество линий уровня: горизонталей, профильных сечений или фронтальных сечений. Поверхность определяется заданием одного семейства линий уровня. Конструировать ее можно следующим образом. В одной из координатных плоскостей, например в плоскости *ZX*, задают однопараметрическое семейство Φ_2 кривых l_2^i (1):

$$z = f(x, p^i) \quad (1)$$

В пространстве выбирают некоторую кривую $m(m_2)$, расположенную в плоскости μ, параллельной плоскости *XY.* При таком задании кривая m будет иметь уравнения $Y=\varphi(z);\ x=a$, и будет проецироваться на плоскость *ZX* в прямую m_2, уравнение, которой имеет вид x=a. Заметим, что через каждую точку M_2^i прямой m_2 будет проходить единственная кривая l_2^i семейства Φ_2. Последнее дает возможность установить некоторое взаимно однозначное соответствие между параметрами p^i кривых i^i и координатами z^i точек M_2^i, в силу чего за параметры кривых i^i можно принимать величины z^i.

Введем в рассмотрение множества векторов параллельного переноса $\overrightarrow{r^i} = M_2^i M^i$, где M^i точка кривой m, которая проецируется в точку M_2^i. Запишем векторы $\overrightarrow{r^i}$ в координатной форме (2):

$$\overrightarrow{r^i}\{0, \varphi(z^i), 0\} \quad (2)$$

Распределим кривые i^i семейства Φ_2 в пространстве путем параллельного переноса на векторы $\overrightarrow{r^i}$ в линии уровня i^i непрерывно-топографической поверхности Φ_2. Параметрические уравнения каркаса линий уровня поверхности Ф будут иметь вид (3):

$$z = f(x, p^i); y = \varphi(z^i) \quad (3)$$

где z^i – некоторая функция от p^i, т.е. $z^i = F(p^i)$.

Если векторы $\overrightarrow{r^i}\{0, \varphi(z^i), 0\}$ сложить с векторами $\overrightarrow{r^i}\{\varphi_1(z^i), 0, \varphi_3(z^i)\}$, то уравнение поверхности Ф запишется (4):

$$z - \varphi_3(z^i) = f[x - \varphi_1(z^i), p^i]; y = \varphi(z^i) \quad (4)$$

На рис. 1 приведено изображение непрерывно-топографической поверхности Ф с тремя раструбами, получаемой путем распределения кривых однопараметрического семейства линий (рис. 2) в линии уровня этой поверхности [3].

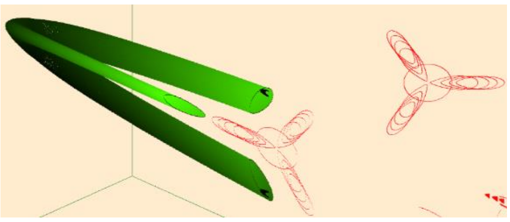

Рис. 1. Непрерывно-топографическая поверхность с тремя раструбами

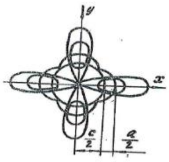

Рис. 2. Однопараметрическое семейство линий уровня

Поверхности с подобными сечениями, это поверхность, несущая на себе однопараметрическое множество подобных сечений.

Рис. 3. Поверхность с подобными сечениями

Конструируют такую поверхность следующим образом. В координатной плоскости, например *ZX*, задаем однопараметрическое семейство Ф центрально-подобных кривых $\overline{i^i}$ с центром подобия в начале координат. Уравнение кривых $\overline{\overline{i^i}}$ может быть записано следующим образом:

$$Zk=f(kx), \quad (5)$$

где k – переменный параметр, представляющий собой коэффициент подобия.

Повернем вокруг оси Z каждую из кривых $\overline{\overline{i^i}}$ на угол t^i, величина которого является функцией от соответствующего значения параметра k^i. Получим поверхность $\overline{\Phi}$ подобных сечений $\overline{\overline{i^i}}$. Запишем параметрические уравнения каркаса поверхности $\overline{\Phi}$ (6):

$$kz = f(k\sqrt{x^2+y^2}) \quad (6)$$

где $t=\varphi(k)$

Теперь, в зависимости от закона задания векторов $\overrightarrow{r^i}$ параллельного переноса сечений $\overrightarrow{i^i}$ поверхности $\overline{\Phi}$, будем получать различные поверхности Ф подобных сечений i^i.

Поверхности пучковых каркасов подобных сечений. Возьмем в качестве носителя пучка плоскостей прямую, перпендикулярную плоскости *XY* и проходящую через точку $M(x_0 y_0)$.

Тогда уравнение (7) пучка плоскостей запишется так:

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad (7)$$

где *m* – переменный параметр.

Зададим далее плоскости *XY* кривую *n* с уравнением *y=F(x)*. В пересечении кривой *n* с плоскостями пучка получим точки N^i, каждая из которых будет конечной точкой вектора переноса сечения $\overrightarrow{i^i}$ поверхности $\overline{\Phi}$ в сечение i^i поверхности Ф. Очевидно, что точки N^i будут иметь своими координатами величины $\overline{x}$ и $\overline{y}$, получаемые в результате совместного решения уравнений (8):

$$y=F(x),\ y - y_0 = m(x - x_0), \quad (8)$$

Величина $\overline{x}$ будет корнем уравнения $F(x) - mz + mx_0 - y_0 = 0$, а величина $\overline{y}$ будет определяться из равенства $\overline{y} = F(\overline{x})$. Задаемся векторами параллельного переноса $\overrightarrow{i^i}\{\overline{x}, \overline{y}, 0\}$, координаты которого являются функциями переменного параметра [4]. Параметрические уравнения каркаса поверхности Ф можно записать следующим образом (9):

$$kz = f(k\sqrt{(x \quad + y)^2 + (y-\overline{y})^2}$$

$$(y-\overline{y}) = (tg[\varphi(k)])(x-\overline{x}) \quad (9)$$

Выводы

Таким образом, если каркас задан аналитически – системой уравнений, то можно перейти к графическому заданию, вычертив на чертеже ряд линий каркаса, как графики определенных функций. Однопараметрические семейства кривых второго порядка можно использовать для построения каркасной поверхности, определителем которой служит некоторый дискретный каркас.

Литература

1.Топоногов В.А. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. В.А. Топоногов. – Издательство «Физматкига». – М. 2012 г.

2.Савелов А.А. Плоские кривые / Под ред. А.П. Нордена. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960.

3.Математическая энциклопедия (в 5-и томах). – М.: Советская энциклопедия, 1982.

4.Филиппов В.А. Основы геометрии поверхностей оболочек пространственных конструкций. В.А. Филиппов. – Издательство «Физматкига». – М. 2009 г.