

УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕДУРЫ ПОЖИЗНЕННОЙ РЕНТЫ

А.А. Назаров, И.А. Ананина

Томский государственный университет

E-mail: ananinaia@sibmail.com

Построена математическая модель финансовых потоков компании, заключающей договоры пожизненной ренты с населением, в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом линий и фаз обслуживания. Исследование потоков этой системы с применением метода предельной декомпозиции, в конечном итоге позволило рассчитать целесообразную величину рентных платежей, удовлетворяющую обе стороны договора.

Ключевые слова:

Система массового обслуживания с неограниченным числом линий и фаз, потоки обращений, метод предельной декомпозиции, пожизненная рента.

Key words:

Queueing system with unlimited number of lines and phases, streams of references, a method of limiting decomposition, a life annuity.

Введение

Одной из основных задач экономико-математического моделирования является исследование финансовых потоков, обладающих существенной нерегулярностью по величине и во времени. Наиболее адекватными математическими моделями этих потоков являются случайные потоки однородных событий [1], интенсивно исследуемые в теории массового обслуживания [2] — науке, возникшей из потребностей анализа сетей связи [3]. Такие потоки требуют существенного обобщения и развития методов их исследования применительно к экономико-математическим моделям.

Инструмент ренты, в особенности пожизненной, играет в настоящее время очень серьезную роль, так как многие престарелые люди, заключая договоры ренты, пытаются обеспечить свою жизнь.

Целью данной работы является исследование основных финансовых потоков в процедуре пожизненной ренты, с точки зрения фирмы, осуществляющей таким образом коммерческую деятельность.

Финансовые потоки в процедуре пожизненной ренты определяются тремя потоками рассматриваемой математической модели: входящим потоком владельцев недвижимости, желающих заключить договоры пожизненной ренты, потоком моментов окончания фаз обслуживания, когда происходит выплата рентных платежей и потоком моментов окончания договоров пожизненной ренты.

В данной работе предложена математическая модель процедуры формирования указанных потоков в виде системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом линий и бесконечным числом фаз обслуживания в каждой линии [4].

Математическая модель процедуры пожизненной ренты

В качестве математической модели процедуры пожизненной ренты рассмотрим систему массового обслуживания (рис. 1) с неограниченным числом линий и бесконечным числом фаз обслуживания в каждой линии.

На вход системы поступает пуассоновский поток заявок (владельцев недвижимости, желающих заключить договоры пожизненной ренты) с интенсивностью λ . Заявка входящего потока, поступившая в систему, занимает одну из свободных линий (клиент заключает договор пожизненной ренты). Линия считается свободной, если свободны все ее фазы обслуживания. Обслуживание заявки выполняется последовательно на каждой фазе — временных периодах, определяемых договором для регулярной выплаты ренты (ежемесячно). Будем полагать, что продолжительность обслуживания на каждой фазе случайная (в частности детерминированная) с функцией распределения $B(x)$.

Завершив обслуживание на k -й фазе, заявка с вероятностью $1-r_k$ покидает систему, а с вероятностью r_k переходит для обслуживания на следующую $(k+1)$ -ю фазу. Вероятности r_k определяются функцией дожития [5] в виде:

$$r_k = S(k)/S(k-1), \quad (1)$$

где $S(k)$ — функция дожития, то есть вероятность, что человек доживет до возраста, определяемого номером k рассматриваемой фазы обслуживания, а $S(0)=1$.

Рассмотрим случайные процессы, формируемые математической моделью, определяющие основные финансовые потоки процедуры пожизненной ренты: $v(t)$ — число заявок входящего потока, поступивших в систему за время t , $m(t)$ — число заявок, завершивших обслуживание и покинувших систему за время t , $n(t)$ — число фаз, завершенных всеми заявками за время t .

Найдем совместную производящую функцию трехмерного случайного процесса $\{v(t), n(t), m(t)\}$

$$H(x, y, z, t) = M\{x^{v(t)} y^{n(t)} z^{m(t)}\}.$$

Метод предельной декомпозиции

Пуассоновский входящий поток рассматриваемой СМО разделим по полиномиальной схеме с равными вероятностями на N независимых пуассоновских потоков с интенсивностями λ/N . Для заявок каждого из потоков определим единствен-

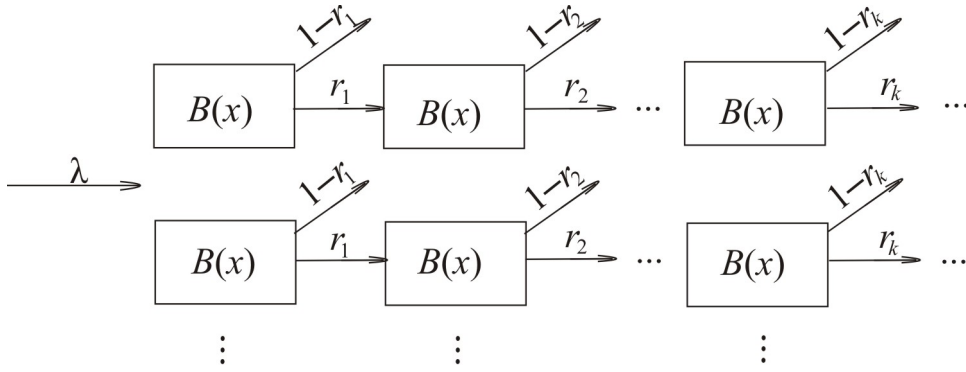


Рис. 1. СМО с неограниченным числом фаз и линий

ную соответствующую линию обслуживания и будем рассматривать однолинейную СМО с отказами в обслуживании для тех заявок, которые поступили на периодах занятости линии. Линия считается занятой, если занята одна из ее фаз обслуживания. Следовательно, формируется N независимо функционирующих однолинейных систем обслуживания, исследование которых гораздо проще, чем исследование исходной системы с неограниченным числом линий. Таким образом реализуется идея метода декомпозиции. В связи с возможностью отказов в обслуживании, суммарные характеристики совокупности N независимых однолинейных систем не эквивалентны соответствующим характеристикам исходной системы с неограниченным числом линий. Этот недостаток устраняется предельным переходом в суммарных характеристиках при $N \rightarrow \infty$. В этом заключается идея метода предельной декомпозиции.

Реализуем сказанное для нахождения производящей функции $H(x, y, z, t)$.

Исследование однолинейной системы с отказами

Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с отказами (рис. 2).

Для этой системы рассмотрим аналогично трехмерный случайный процесс $\{v(t, N), n(t, N), m(t, N)\}$. Для марковизации этого процесса определим еще две компоненты: $k(t)$ – номер фазы, занятой в линии в момент времени t . Если $k(t)=0$, то линия свободна; $u(t)$ – длина интервала от момента t до момента окончания обслуживания на текущей фазе.

Очевидно, что пятимерный случайный процесс $\{k(t), u(t), v(t, N), n(t, N), m(t, N)\}$ является марковским, поэтому для его распределения вероятностей $P_0(v, n, m, t, N) = P\{k(t)=0, v(t, N)=v, n(t, N)=n, m(t, N)=m\}$,

$$P_k(v, n, m, u, t, N) = P\{k(t)=k, v(t, N)=v, n(t, N)=n, m(t, N)=m, u(t) < u\}$$

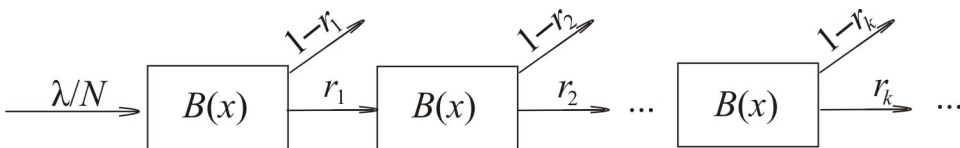


Рис. 2. Однолинейная СМО с неограниченным числом фаз

получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0(v, n, m, t, N)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N} P_0(v, n, m, t, N) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial P_k(v, n, m-1, 0, t, N)}{\partial u} (1-r_k), \\ \frac{\partial P_1(v, n, m, u, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial P_1(v, n, m, u, t, N)}{\partial u} - \\ &- \frac{\partial P_1(v, n, m, 0, t, N)}{\partial u} + P_0(v-1, n, m, t, N) \frac{\lambda}{N} B(u), \\ \frac{\partial P_k(v, n, m, u, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial P_k(v, n, m, u, t, N)}{\partial u} - \\ &- \frac{\partial P_k(v, n, m, 0, t, N)}{\partial u} + \\ &+ \frac{\partial P_{k-1}(v, n-1, m, 0, t, N)}{\partial u} r_{k-1} B(u). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^v y^n z^m P_0(v, n, m, t, N) &= H_0(x, y, z, t, N), \\ \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x^v y^n z^m P_k(v, n, m, u, t, N) &= H_k(x, y, z, u, t, N) \end{aligned}$$

из системы (2) получим систему уравнений для функций $H_0(x, y, z, t, N)$ и $H_k(x, y, z, u, t, N)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0(x, y, z, t, N)}{\partial t} &= -\frac{\lambda}{N} H_0(x, y, z, t, N) + \\ &+ z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial H_k(x, y, z, 0, t, N)}{\partial u} (1-r_k), \\ \frac{\partial H_1(x, y, z, u, t, N)}{\partial t} &= \frac{\partial H_1(x, y, z, u, t, N)}{\partial u} - \\ &- \frac{\partial H_1(x, y, z, 0, t, N)}{\partial u} + x H_0(x, y, z, t, N) \frac{\lambda}{N} B(u), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_k(x, y, z, u, t, N)}{\partial t} = \frac{\partial H_k(x, y, z, u, t, N)}{\partial u} - \frac{\partial H_k(x, y, z, 0, t, N)}{\partial u} + y \frac{\partial H_{k-1}(x, y, z, 0, t, N)}{\partial u} r_{k-1} B(u).$$

Так как в начальный момент времени $t=0$ исходная СМО с неограниченным числом линий свободна, то свободна каждая линия, поэтому начальные условия для решения $H_0(x, y, z, t, N)$, $H_k(x, y, z, u, t, N)$ системы (3) определим в виде

$$H_0(x, y, z, 0, N) \equiv 1, H_k(x, y, z, u, 0, N) \equiv 0. \quad (4)$$

Найдя решение задачи Коши (3,4), определим маргинальную производящую функцию трехмерного процесса $\{v(t, N), n(t, N), m(t, N)\}$

$$H(x, y, z, t, N) = M\{x^{v(t, N)} y^{n(t, N)} z^{m(t, N)}\} = H_0(x, y, z, t, N) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x, y, z, u, t, N). \quad (5)$$

Для различных однолинейных СМО процессы $\{v(t, N), n(t, N), m(t, N)\}$ стохастически независимы и одинаково распределены. Соответствующие суммарные процессы для совокупности N однолинейных СМО являются суммами независимых и одинаково распределенных случайных процессов для однолинейных СМО. Поэтому производящую функцию $H(x, y, z, t)$ для процессов исходной системы с неограниченным числом линий запишем в виде

$$H(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} H^N(x, y, z, t, N). \quad (6)$$

Решение системы (3) найдем в виде

$$H_0(x, y, z, t, N) = 1 + \frac{1}{N} F_0(x, y, z, t) + o(N^{-2}),$$

$$H_k(x, y, z, u, t, N) = \frac{1}{N} F_1(x, y, z, u, t) + o(N^{-2}). \quad (7)$$

Тогда для функций $F_0(x, y, z, t)$ и $F_k(x, y, z, u, t)$ задачу (3,4) запишем следующим образом:

$$\frac{\partial F_0(x, y, z, t)}{\partial t} = -\lambda + z \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x, y, z, t) (1 - r_k),$$

$$\frac{\partial F_1(x, y, z, u, t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x, y, z, u, t)}{\partial u} = -h_1(x, y, z, t) + x \lambda B(u),$$

$$\frac{\partial F_k(x, y, z, u, t)}{\partial t} - \frac{\partial F_k(x, y, z, u, t)}{\partial u} = -h_k(x, y, z, t) + y h_{k-1}(x, y, z, t) r_{k-1} B(u), \quad (8)$$

$$F_0(x, y, z, 0) \equiv 0, F_k(x, y, z, u, 0) \equiv 0.$$

$$\text{где } h_k(x, y, z, t) = \frac{\partial F_k(x, y, z, 0, t)}{\partial u}.$$

Нетрудно показать, что решение этой системы имеет вид

$$F_0(x, y, z, t) = -\lambda t + z \sum_{k=1}^{\infty} (1 - r_k) \int_0^t h_k(x, y, z, s) ds,$$

$$F_1(x, y, z, u, t) = \lambda x \int_0^t \{B(u + t - s) - B(s)\} ds, \quad (9)$$

$$F_k(x, y, z, u, t) =$$

$$= \int_0^t \{-h_k(x, y, z, s) + y r_{k-1} h_{k-1}(x, y, z, s) B(u + t - s)\} ds,$$

откуда получим

$$h_1(x, y, z, t) = \frac{\partial F_1(x, y, z, 0, t)}{\partial u} = \lambda x \int_0^t B'(t - s) ds = \lambda x B(t),$$

$$h_k(x, y, z, t) = \frac{\partial F_k(x, y, z, 0, t)}{\partial u} = y r_{k-1} \int_0^t h_{k-1}(x, y, z, t - \tau) dB(\tau).$$

Из этой рекуррентной процедуры получаем, что функции $h_k(x, y, z, t)$ имеют вид

$$h_1(x, y, z, t) = \lambda x B(t),$$

$$h_k(x, y, z, t) = \lambda x y^{k-1} S(k-1) B^{(k)}(t),$$

где $B^{(k)}(t)$ – k -кратная свертка распределений $B(t)$,

а $S(k)$ в силу равенства (1) имеет вид $S(k) = \prod_{i=1}^k r_i$.

Подставляя найденные для $h_k(x, y, z, t)$ выражения в (9), получим

$$F_0(x, y, z, t) = -\lambda t + z \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} (1 - r_k) y^{k-1} S(k-1) \int_0^t B(\tau) d\tau,$$

$$F_1(x, y, z, u, t) = \lambda x \int_0^t \{B(u + t - \tau) - B(\tau)\} d\tau,$$

$$F_k(x, y, z, u, t) = \lambda x y^{k-1} S(k-1) \times \int_0^t \{B^{(k-1)}(\tau) B(u + t - \tau) - B^{(k)}(\tau)\} d\tau. \quad (10)$$

Полученные равенства (10) решают поставленную задачу нахождения функций $H_0(x, y, z, t, N)$ и $H_k(x, y, z, u, t, N)$ из (8).

Исследование системы с неограниченным числом линий

Применяя равенства (7) запишем функцию $H(x, y, z, t, N)$ из (5) в виде

$$H(x, y, z, t, N) = H_0(x, y, z, t, N) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x, y, z, u, t, N) = 1 + \frac{1}{N} F(x, y, z, t) + o(N^{-2}). \quad (11)$$

Здесь функция $F(x, y, z, t)$ имеет вид

$$F(x, y, z, t) = F_0(x, y, z, t) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x, y, z, u, t).$$

Подставляя сюда выражения (10) для функций $F_k(x, y, z, t)$, получим

$$F(x, y, z, t) = (x-1)\lambda t + \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(z-1)S(k-1) + (y-z)S(k)}{y^{k-1}} \int_0^t B^{(k)}(\tau) d\tau \right\}. \quad (12)$$

Применяя равенства (6) и (11), найдем производящую функцию $H(x, y, z, t)$ трехмерного случайного процесса $\{v(t), n(t), m(t)\}$, определяющего основные финансовые потоки процедуры пожизненной ренты.

$$H(x, y, z, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{N} F(x, y, z, t) + o(N^{-2}) \right\}^N = e^{F(x, y, z, t)}.$$

Таким образом, согласно (12), функция $H(x, y, z, t)$ имеет вид

$$H(x, y, z, t) = \exp \left\{ (x-1)\lambda t + \lambda x \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(z-1)S(k-1) + (y-z)S(k)}{y^{k-1}} \int_0^t B^{(k)}(\tau) d\tau \right\} \right\}.$$

Системы с детерминированной продолжительностью фаз обслуживания

Так как в договорах пожизненной ренты продолжительность фаз обслуживания является величиной детерминированной, которую можно положить равной единице времени (месяц), то функция распределения $B(t)$ имеет вид

$$B(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Тогда для k -кратной свертки $B^{(k)}(t)$ запишем

$$B^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq k, \\ 1, & \text{если } t > k. \end{cases}$$

Поэтому для любых значений t выполняется равенство

$$\int_0^t B^{(k)}(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq k, \\ t-k, & \text{если } t > k. \end{cases}$$

При $t \geq 1$ функцию $H(x, y, z, t)$ из (9) можно записать в виде

$$H(x, y, z, t) = \exp \left\{ (x-1)\lambda t + \lambda x \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \left\{ \frac{(z-1)S(k-1) + (y-z)S(k)}{y^{k-1}} \right\} y^{k-1}(t-k) \right\}, \quad (13)$$

где $\lfloor t \rfloor$ — целая часть от числа t .

Найденное выражение (13) для производящей функции $H(x, y, z, t)$ трехмерного процесса $\{v(t), n(t), m(t)\}$ решает задачу анализа основных потоков математической модели процедуры пожизненной ренты.

Из вида (13) следует, что процессы $v(t)$ и $m(t)$ — пуассоновские, что вполне естественно для входящего и выходящего потоков системы $M|GI|_{\infty}$,

но поток, определяемый процессом $n(t)$, — не пуассоновский и определяется производящей функцией $H(1, y, 1, t)$ числа фаз, завершающихся за время t .

Предложенная математическая модель и метод ее исследования может найти широкое применение при анализе различных систем на финансовых рынках недвижимости, банковских услуг, в страховом деле, в пенсионном обеспечении, а также других социально-экономических систем. В данной работе она применяется к анализу процедуры пожизненной ренты.

Процесс изменения прибыли

Будем полагать, что при заключении договора пожизненной ренты издержки плательщика ренты, связанные с привлечением клиента, составляют значение величины ζ . При переходе клиента на следующую фазу издержки компании, связанные с реализацией рентных платежей, составляют значение случайной величины η .

В момент закрытия договора в связи с исполнением обязательств, компания получает доход равный значению случайной величины ξ .

Обозначим $W(t)$ — прибыль, накопленную плательщиком ренты за время t коммерческой деятельности по предоставлению услуг пожизненной ренты.

Так как прибыль равна разности доходов и расходов, то

$W(t) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{m(t)} - \eta_1 - \eta_2 - \dots - \eta_{n(t)} - \zeta_1 - \zeta_2 - \dots - \zeta_{v(t)}$, следовательно, характеристическая функция величины прибыли $W(t)$ имеет вид

$$G(\alpha, t) = M e^{-\alpha W(t)} = M \exp \left\{ -\alpha \sum_{i=1}^{m(t)} \xi_i + \alpha \sum_{i=1}^{n(t)} \eta_i + \alpha \sum_{i=1}^{v(t)} \zeta_i \right\}.$$

Полагая стохастическую независимость величин ξ_i , η_i , ζ_i , принимающих свои значения в различные моменты времени наступления платежей для различных получателей ренты, а также их одинаковые по i распределения, для $G(\alpha, t)$ получим

$$\begin{aligned} G(\alpha, t) &= M \{ e^{\alpha \zeta_1 v(t)} e^{\alpha \eta_1 n(t)} e^{-\alpha \xi_1 m(t)} \} = \\ &= \sum_{m, n, v} M \left\{ e^{\alpha \zeta_1 v(t)} e^{\alpha \eta_1 n(t)} \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-\alpha \xi_1 m(t)} | v(t) = v, n(t) = n, m(t) = m \right\} \times \\ &\quad \times P(v, n, m, t) = \\ &= \sum_{m, n, v} (M e^{\alpha \zeta_1})^v (M e^{\alpha \eta_1})^n (M e^{-\alpha \xi_1})^m P(v, n, m, t) = \\ &= H(x(-\alpha), y(-\alpha), z(\alpha), t), \end{aligned}$$

где $x(\alpha) = M e^{-\alpha \zeta_1}$; $y(\alpha) = M e^{-\alpha \eta_1}$; $z(\alpha) = M e^{-\alpha \xi_1}$ — характеристические функции случайных величин ζ , η и ξ .

Таким образом, характеристическая функция величины прибыли плательщика ренты, накопленной за время t , имеет вид

$$G(\alpha, t) = H(x(-\alpha), y(-\alpha), z(\alpha), t), \quad (14)$$

где функция $H(x, y, z, t)$ определяется равенством (13).

Исследование среднего значения величины прибыли

Из свойств характеристических функций следует, что

$$W_1(t) = MW(t) = - \left. \frac{\partial G(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0},$$

поэтому, в силу равенства (14), получим

$$W_1(t) = M\xi \cdot Mm(t) - M\eta \cdot Mn(t) - M\zeta \cdot Mv(t).$$

Пусть $M\xi=1$ – стоимость квартиры, например 2 млн р; $M\eta=\delta$ – доля от стоимости квартиры, которую следует выплатить клиенту за один месяц в качестве ренты; $M\zeta=\delta_1$ – доля от стоимости квартиры, которую может потратить фирма на привлечение клиента. Следовательно, $W_1(t)$ имеет вид

$$W_1(t) = Mm(t) - \delta Mn(t) - \delta_1 Mv(t).$$

Средние значения для процессов $v(t)$, $n(t)$ и $m(t)$ определим из вида (13) производящей функции $H(x, y, z, t)$, получим

$$W_1(t) = \lambda \sum_{k=1}^{[t]} [S(k-1) - S(k)](t-k) - \delta \lambda \sum_{k=1}^{[t]} S(k)(t-k) - \delta_1 \lambda t. \quad (15)$$

Из (15) очевидно следует, что среднее значение $W_1(t)$ величины прибыли линейно зависит от интенсивности λ заключения новых договоров пожизненной ренты и существенно нелинейно $W_1(t)$ зависит от t .

Определение функции дожития

Функцию $S(k)$ в демографии называют функцией дожития, ее аналитическим выражением, наиболее адекватно соответствующим статистическим данным, является функция Гомперца–Мейкема

$$S(k) = \exp\{-Ak - B(e^{ak} - 1)\},$$

в которой параметры A , B и α определяются из статистических данных.

Для мужчин Российской Федерации известны следующие статистические данные [6] для безусловной функции дожития (табл. 1).

Таблица 1. Безусловная функции дожития для мужчин возраста x , лет

x	60	70	80	90
$S(x)$	0,651	0,434	0,188	0,003

Здесь x – возраст мужчины; $S(x)$ – значения функции дожития для мужчин возраста x . Поэтому для условной функции дожития $S_{60}(k)$ для мужчин старше 60 лет эти значения будут следующими (табл. 2).

Таблица 2. Функция дожития до k -го месяца для мужчин старше 60 лет

k	0	120	240	360
$S_{60}(k)$	1	0,6667	0,2888	0,0046

Здесь k определяется продолжительностью выплат рентных платежей в месяцах, а $S_{60}(k)$ – значение

условной функции дожития до k -го месяца мужчин старше 60 лет.

Значения параметров A , B и α для условной функции дожития

$$S_{60}(A, B, \alpha, k) = \exp\{-Ak - B(e^{\alpha k} - 1)\}$$

найдем как решение системы трех нелинейных уравнений

$$S_{60}(A, B, \alpha, 120) = 0,6667, S_{60}(A, B, \alpha, 240) = 0,2888,$$

$$S_{60}(A, B, \alpha, 360) = 0,0046$$

относительно A , B и α .

Это решение принимает следующие значения

$$A = 0,0028, B = 0,0097, \alpha = 0,017,$$

следовательно, для численных расчетов функцию $S_{60}(k)$ можно брать в виде

$$S_{60}(k) = \exp\{-0,0028k - 0,0097(e^{0,017k} - 1)\}.$$

Аналогично определяются значения параметров для условных функций дожития мужчин других возрастов и женщин.

При более детальных статистических данных о функции дожития, как правило, применяют метод наименьших квадратов, либо другие методы нахождения статистических оценок параметров распределения.

Численный анализ математической модели пожизненной ренты.

Экономические рекомендации

Подставляя найденную функцию дожития $S_{60}(k)$ в (15) и полагая $\delta_1=0$ – затраты на привлечение новых получателей ренты учтены в остаточной стоимости недвижимости, определяющей величину ренты, выполним численный анализ среднего значения $W_1(t)$ величины прибыли плательщика ренты при $\lambda=1$ (один новый клиент в месяц) и среднем значении остаточной стоимости квартиры в 2 млн р.

Изменение во времени величины прибыли $W_1(t)$ для ряда значений δ показано на рис. 3.

Из результатов численного анализа следует, что при $\delta < 0,003$ прибыль плательщика ренты положительна при всех t , при $\delta > 0,0058$ величина $W_1(t) \leq 0$, то есть при таких значениях δ плательщик ренты терпит только убытки от своей коммерческой деятельности. При $0,003 < \delta < 0,0058$ функция $W_1(t)$ имеет вид

$$W_1(t) = \begin{cases} \leq 0, & \text{при } t \leq T(\delta), \\ \geq 0, & \text{при } t \geq T(\delta). \end{cases}$$

Продолжительность $T(\delta)$ первоначального периода издержек достаточно велика. Например, при $\delta=0,004$ величина $T(\delta)=25$ лет, а при $\delta=0,005 T(\delta)=45$ лет. При $\delta=0,004$ максимальные убытки составляют 9,264 млн р. и достигаются на 18 году деятельности, а при $\delta=0,005$ убытки достигают 31,728 млн р. и приходятся на 23 год коммерческой деятельности.

Из приведенных расчетов, очевидно, следует, что применение $\delta > 0,003$ для плательщика ренты экономически нецелесообразно.

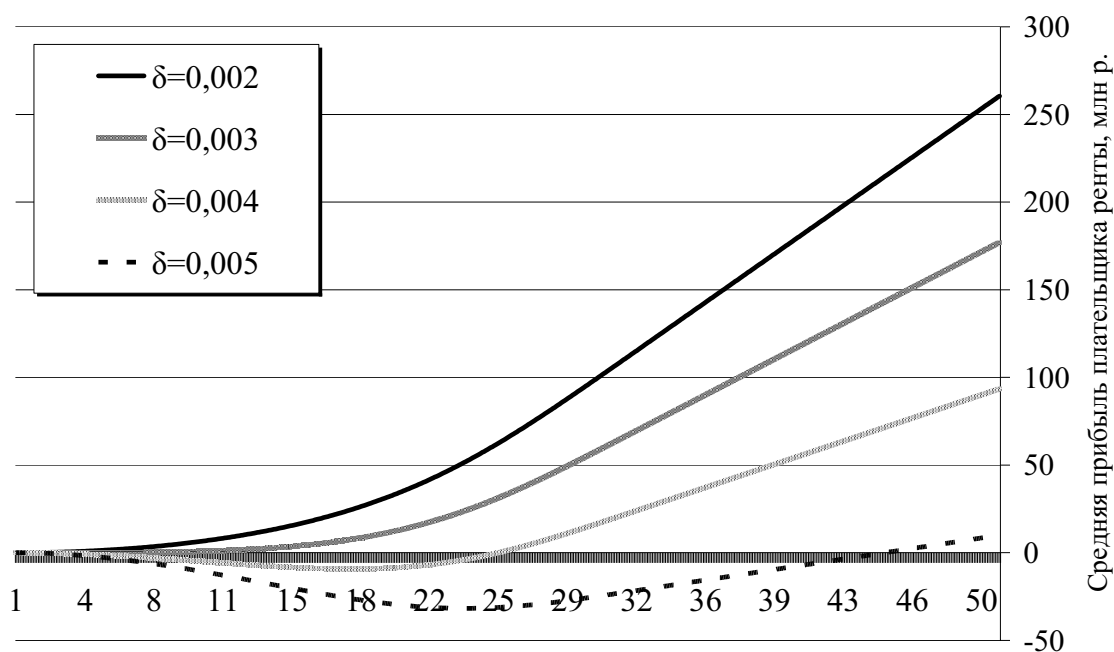


Рис. 3. Процесс изменения средней величины прибыли при заданном размере рентных платежей

При $\delta=0,003$ и стоимости квартиры в 2 млн р. величина ренты составляет 6 тыс. р. в месяц, но в среднем эти выплаты покрывают лишь половину стоимости квартиры, так как средняя продолжительность дожития мужчины старше 60 лет составляет 172 месяца. Такая ситуация вряд ли может заинтересовать владельца недвижимости к заключению договора пожизненной ренты.

Выводы

Построена математическая модель процедуры формирования финансовых потоков компании, заключающей договоры пожизненной ренты с населением, в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом линий и фаз обслуживания. Предложен метод предельной декомпозиции для анализа трехмерного случайного процесса, определяющего основные потоки системы.

Найдена характеристическая функция величины прибыли плательщика ренты. Выполнено исследование вероятностных характеристик прибыли.

Показано, что рентные платежи свыше 0,3 % от стоимости недвижимости для плательщика ренты экономически невыгодны. При таких платежах выплаты покрывают лишь половину стоимости недвижимости, что не может заинтересовать владельца в заключении договора пожизненной ренты.

Отсюда следует, что процедуру пожизненной ренты необходимо реализовывать как долгосрочный инвестиционный проект под высоконадежные гарантии, либо, для людей преклонного возраста, для увеличения скорости оборота денежных средств, либо применяя динамическое назначение величины рентных платежей, возрастающих со временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.
2. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — М.: Физматлит, 1963. — 527 с.
3. Лившиц В.С., Пшеничников А.П., Харкевич А.Д. Теория телеграфа. — М.: Связь, 1979. — 224 с.
4. Галажинская О.Н. Бесконечно линейная бесконечно фазная система массового обслуживания со случайным прерыванием обслуживания // Вестник Томского государственного университета. — 2006. — № 18. — С. 261–266.
5. Валентий Д.И., Кваша А.Я. Основы демографии. — М.: Мысль, 1989. — 285 с.
6. Четыркин Е.М. Пенсионные фонды. Зарубежный опыт для отечественных предприятий, актуарные расчеты. — М.: АО «Арго», 1993. — 100 с.

Поступила 17.01.2011 г.