

УДК 519.872

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В НЕМАРКОВСКИХ RQ-СИСТЕМАХ С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК

А.А. Назаров, Е.А. Судыко

Томский государственный университет

E-mail: ESudyko@yandex.ru

Рассмотрена немарковская RQ-система с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки переходят в источник повторных вызовов. Для процесса изменения состояний системы построена вложенная цепь Маркова. Найден вид функции, определяющий условия теоремы Мустафы об эргодичности цепи Маркова.

Ключевые слова:

Теория массового обслуживания, RQ-системы, конфликты заявок.

Key words:

The Retrial Queueing theory, Retrial queues, conflicts of requests.

Важным вопросом в теории массового обслуживания является определение условий существования стационарного режима в RQ-системах (Retrial Queues). Несмотря на обилие работ [1, 2], посвященных данному вопросу, проблема эргодичности RQ-систем с конфликтами заявок не нашла должного отражения в научной литературе. В данной работе мы использовали эргодическую теорему Мустафы для определения условий существования стационарного режима в немарковских RQ-системах.

Рассмотрим однолинейную немарковскую RQ-систему (рисунок) с конфликтами заявок, на вход которой поступает простейший поток с интенсивностью λ . Требование, обратившись к прибору и заставшее его свободным, немедленно занимает прибор и начинает обслуживаться в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. Если за время обслуживания заявки другие требования не поступали, то заявка покидает систему после завершения обслуживания. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт, и обе переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ . Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. И если прибор свободен, то заявка из ИПВ немедленно занимает его для обслуживания. Если же прибор занят, то вновь возникает конфликт, и обе заявки переходят в ИПВ.

Обозначим $i(t)$ – число заявок в ИПВ в момент времени t .

Определим условия, при выполнении которых в рассматриваемой RQ-системе существует стационарный режим, т. е. процесс $i(t)$ является эргодическим.

Так как случайный процесс $i(t)$ для рассматриваемой RQ-системы является полумарковским, а эргодические свойства такого процесса полностью определяются эргодическими свойствами его

вложенной цепи Маркова, то для процесса $i(t)$ определим вложенную цепь и исследуем ее эргодические свойства.

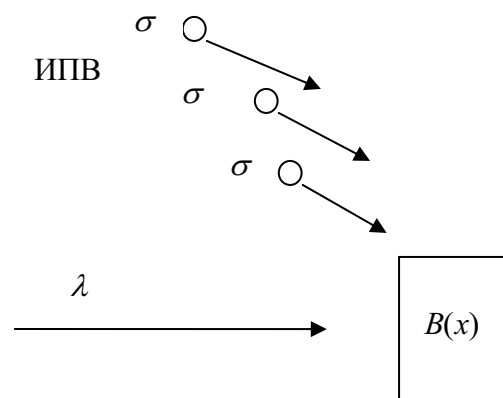


Рисунок. Схема функционирования немарковской RQ-системы

Рассмотрим моменты времени

$$t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots,$$

где t_n – момент окончания режима обслуживания с прерыванием или завершением, и освобождением прибора, тогда процесс $v_n = i(t_n)$ с дискретным временем n является вложенной цепью Маркова для полумарковского процесса $i(t)$.

Найдем переходные вероятности $P_{ij} = P\{v_{n+1} = j | v_n = i\}$ вложенной цепи Маркова v_n . За один шаг возможные следующие переходы цепи Маркова из состояния $v_n = i$ в состояния $v_n = j$, где $j = \{i-1, i, i+1, i+2\}$. Определим события, соответствующие этим переходам.

- $i \rightarrow i+2$: На прибор для обслуживания встала заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока.
- $i \rightarrow i+1$: На прибор для обслуживания встала заявка из внешнего потока, ее обслуживание прервано заявкой из ИПВ; или на прибор встала для обслуживания заявка из ИПВ, ее обслуживание прервано заявкой из внешнего потока.
- $i \rightarrow i$: На прибор встала заявка из внешнего потока, обслуживание которой завершилось успешно; или на прибор для обслуживания встала

заявка из ИПВ, ее обслуживание прервано заявкой из ИПВ.

- $i \rightarrow i-1$: На прибор для обслуживания встала заявка из ИПВ, обслуживание которой завершилось успешно.

Тогда, учитывая описание модели, запишем вероятности переходов цепи Маркова v_n в виде

$$\begin{aligned} P_{ii+2} &= \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \{1 - B^*(\lambda + i\sigma)\}, \\ P_{ii+1} &= \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \{1 - B^*(\lambda + i\sigma)\} + \\ &+ \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{\lambda}{\lambda + (i-1)\sigma} \{1 - B^*(\lambda + (i-1)\sigma)\}, \\ P_{ii} &= \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} \frac{(i-1)\sigma}{\lambda + (i-1)\sigma} \{1 - B^*(\lambda + (i-1)\sigma)\} + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda + i\sigma} B^*(\lambda + i\sigma), \\ P_{ii-1} &= \frac{i\sigma}{\lambda + i\sigma} B^*(\lambda + (i-1)\sigma), \end{aligned} \quad (1)$$

$$P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii} + P_{ii-1} = 1, \quad (2)$$

где (2) – условие нормировки, а

$$B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dB(x)$$

– преобразование Лапласа–Стилтьеса функции распределения $B(x)$.

Таким образом, построена вложенная цепь Маркова v_n .

Применяя условия теоремы Мустафы [3], найдем условия существования стационарного режима для построенной цепи Маркова.

Теорема Мустафы. Для того, чтобы неприводимая, непериодическая цепь Маркова была эргодической, достаточно существования $\varepsilon > 0$, натурального числа i_0 и набора неотрицательных чисел $x_0, x_1, x_2, \dots$, таких, что

$$\sum_{j \in X} P_{ij} x_j \leq x_i - \varepsilon \quad \text{для } i > i_0, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in X} P_{ij} x_j \leq \infty \quad \text{для } i \leq i_0. \quad (4)$$

При этом существует единственное эргодическое распределение, которое совпадает со стационарным.

Основная проблема применения этой теоремы заключается в построении последовательности x_i .

Обозначим b – время обслуживания в RQ-системе, т. е.

$$b = \int_0^\infty x dB(x).$$

Отметим свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса $B^*(\alpha)$, заключающееся в выполнении предельного равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha B^*(\alpha) = B'(0), \quad (5)$$

где величина $B'(0) = B'(x)|_{x=0}$ – значение производной в нуле от функции распределения $B(x)$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Цепь Маркова, переходные вероятности которой определяются равенствами (1), при $B'(0) = \infty$, является эргодической при любых значениях загрузки $\rho = \lambda b$.

Доказательство. В теореме Мустафы положим

$$x_i = \frac{z^{i+1}}{B^*(iz)}, \quad (6)$$

где значение величины $z > 0$, будет определено ниже. Неравенство (3), сформулированное в теореме Мустафы, перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X} P_{ij} x_j - x_i &= P_{ii+2} \frac{z^{i+3}}{B^*((i+2)\sigma)} + P_{ii+1} \frac{z^{i+2}}{B^*((i+1)\sigma)} + \\ &+ P_{ii} \frac{z^{i+1}}{B^*(i\sigma)} + P_{ii-1} \frac{z^i}{B^*((i-1)\sigma)} - \frac{z^{i+1}}{B^*(i\sigma)} = \\ &\left\{ P_{ii+2} \frac{z^3}{B^*((i+2)\sigma)} + P_{ii+1} \frac{z^2}{B^*((i+1)\sigma)} - \right. \\ &\left. - [P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] \frac{z}{B^*(i\sigma)} + \frac{P_{ii-1}}{B^*((i-1)\sigma)} \right\} z^i < -\varepsilon. \end{aligned}$$

Это неравенство перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{ii+2} \frac{z^3}{B^*((i+2)\sigma)} + P_{ii+1} \frac{z^2}{B^*((i+1)\sigma)} - \\ - [P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] \frac{z}{B^*(i\sigma)} + \\ + \frac{P_{ii-1}}{B^*((i-1)\sigma)} + \varepsilon z^{-i} < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем предельные при $i \rightarrow \infty$ значения коэффициентов при положительных степенях z

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P_{ii+2}}{B^*((i+2)\sigma)} = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P_{ii+1}}{B^*((i+1)\sigma)} = 0, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}}{B^*(i\sigma)} = 1, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{P_{ii-1}}{B^*((i-1)\sigma)} = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

В неравенстве (7), полагая $z > 1$, выполним предельный переход при $i \rightarrow \infty$, учитывая (8), получим неравенство

$$-z + 1 < 0, \quad (9)$$

которое выполняется для любых значений $z > 1$ независимо от значения ε и значений параметров системы, в том числе и для любых значений параметра ρ .

Из выполнения предельного неравенства (9) следует существование такого натурального числа i_0 , что для всех $i > i_0$ выполняется допредельное неравенство (7). То есть для неотрицательных чисел x_i вида (6) для рассматриваемой цепи Маркова выполняется условие (3) теоремы Мустафы.

Условие (4) теоремы Мустафы очевидно выполняется для всех $i \leq i_0$ в силу конечности чисел x_i и конечности числа слагаемых в сумме из левой части неравенства (4).

Таким образом, выполнение условий теоремы Мустафы доказывает сформулированную теорему.

Теорема доказана.

Для случая конечных значений $B'(0)$ докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Цепь Маркова, переходные вероятности которой удовлетворяют равенствам (1), при $0 < B'(0) < \infty$, является эргодической при выполнении неравенства*

$$\rho < S = \frac{b}{2} B'(0), \quad (10)$$

где величину S будем называть пропускной способностью системы.

Доказательство.

В теореме Мустафы положим

$$x_i = i \sigma z^{i+1}, \quad (11)$$

где значение величины $z > 0$, будет определено ниже. Неравенство (3), сформулированное в теореме Мустафы, перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j \in X} P_{ij} x_j - x_i &= P_{ii+2} (i+2) \sigma z^{i+3} + P_{ii+1} (i+1) \sigma z^{i+2} + \\ &+ P_{ii} (i+1) \sigma z^{i+1} + P_{ii-1} (i-1) \sigma z^i - \\ &- i \sigma z^{i+1} = \{P_{ii+2} (i+2) \sigma z^3 + P_{ii+1} (i+1) \sigma z^2 - \\ &- [P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] i \sigma z + P_{ii-1} (i-1) \sigma\} z^i < -\varepsilon. \end{aligned}$$

Это неравенство перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{ii+2} (i+2) \sigma z^3 + P_{ii+1} (i+1) \sigma z^2 - \\ - [P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] i \sigma z + P_{ii-1} (i-1) \sigma + \varepsilon z^{-i} < 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Найдем предельные при $i \rightarrow \infty$ значения коэффициентов при положительных степенях z , используя свойство преобразования Лапласа–Стилтьеса (5)

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (i+2) \sigma P_{ii+2} &= 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (i+1) \sigma P_{ii+1} = 2\lambda, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} i \sigma [P_{ii+2} + P_{ii+1} + P_{ii-1}] &= 2\lambda + B'(0), \\ \lim_{i \rightarrow \infty} (i-1) \sigma P_{ii-1} &= B'(0). \quad (13) \end{aligned}$$

Здесь значение в нуле $B'(0)$ производной от функции распределения $B(x)$ обозначим $(2/b)S$, то есть

$$S = (b/2)B'(0), \quad (14)$$

что совпадает с правой частью неравенства (10).

В неравенстве (12), полагая $z > 1$, выполним предельный переход при $i \rightarrow \infty$, учитывая (13), получим неравенство

$$2\lambda z^2 - (2\lambda + B'(0))z + B'(0) < 0,$$

которое в силу обозначения (14) перепишем в виде

$$\rho z^2 - (\rho + S)z + S < 0. \quad (15)$$

Квадратный трехчлен в левой части этого неравенства имеет корни $z_1 = 1$ и $z_2 = S/\rho$, поэтому значения $z > 1$, удовлетворяющие неравенству (15) существуют при выполнении условия $z_2 > z_1 = 1$. Неравенство $z_2 = S/\rho > 1$ перепишем в виде

$$\rho < S,$$

который в силу (14) совпадает с неравенством (10).

Таким образом, выбирая значения величины z из интервала

$$z_1 = 1 < z < z_2 = S/\rho,$$

получим выполнение предельного неравенства (15), следовательно, при любом заданном конечном значении $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число i_0 , что для всех $i > i_0$ выполняется допредельное неравенство (12), а следовательно для неотрицательных чисел x_i вида (11) для рассматриваемой цепи Маркова выполняется условие (3) теоремы Мустафы.

Условие (4) теоремы Мустафы очевидно выполняется для всех $i \leq i_0$ в силу конечности чисел x_j и конечности числа слагаемых в сумме из левой части неравенства (4).

Следовательно, выполнение условий теоремы Мустафы доказывает сформулированную теорему.

Теорема доказана.

Таким образом, в немарковской RQ-системе с конфликтами заявок стационарный режим существует при выполнении условия (10).

Интересно отметить, что величина S может принимать значения больше единицы и даже неограниченно возрастать. Следовательно, в таких однолинейных системах стационарный режим существует при нагрузках $\rho > 1$ и даже при сколь угодно больших значениях ρ .

Выводы

Рассмотрена немарковская RQ-система с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки переходят в источник повторных вызовов. Построена вложенная цепь Маркова с дискретным временем. Сформулированы теоремы, определяющие условия существования стационарного режима в таких системах. Установлено, что величина пропускной способности может быть больше единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Artalejo J. R., Dudin A.N., Klimenok V.I. Stationary analysis of a retrial queue with preemptive repeated attempts // Operations Research Letters. – 2001. – V. 28. – № 4. – P. 173–180.
- Kernane T. Conditions for stability and instability of retrial queueing systems with general retrial times // Statistics and Probability Letters. – 2008. – № 78. – P. 3244–3248.
- Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
- Назаров А.А., Судыко Е.А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети слу-

чайного доступа // Проблемы передачи информации. – 2010. – Т. 46. – № 1. – С. 94–111.

- Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979. – 598 с.
- Кошурба П.И., Назаров А.А. Локальная диффузионная аппроксимация процесса изменения состояний неустойчивой сети случайного доступа в окрестности асимптотического среднего // Проблемы передачи информации. – 2004. – Т. 40. – № 1. – С. 85–97.

Поступила 15.03.2011 г.