УДК 519.688

Расчет координат неизвестной точки по результатам дирекционных измерений

Вылегжанин О.Н., Рыбалка С.А.
Томский политехнический университет

При всем многообразии задач, решаемых в геодезии и маркшейдерии, и уровней их сложности, «на дне» геодезической задачи, как правило, лежит задача оценки координат неизвестной точки по результатам измерения расстояний и направлений на эту точку из точек с известными координатами.

Как известно [5], существует большое количество предложенных методов решения данной задачи, различающихся трудоемкостью, сложностью и точностью полученного решения.

Применение вычислительной техники снимает вопрос трудоемкости и сложности решения. Что касается точности оценки, то основное средство ее повышения, это увеличение количества измерений, выполненных сверх минимально необходимых для получения решения [3, 6], а также использование эффективных оценок измеряемых величин [1, 4]. Кроме того, представляется целесообразной разработка «универсальных подходов к решению возможно более широкого круга геодезических задач» [7].

В настоящей работе предложен метод решения задачи определения координат неизвестной точки по результатам дирекционных измерений, выполненных на эту точку из произвольного множества точек с известными координатами. Решение строится из предположения, что координаты точек и углы заданы в декартовой системе координат и расстояния между точками относительно малы, то есть не учитывается искривление земной поверхности.

Постановка задачи. Пусть для точек с известными координатами X_i, $i = 1, 2, ..., n$, определены направления P_i на точку с неизвестными координатами X_Z. Требуется определить координаты неизвестной точки.

Для решения этой задачи методами линейной алгебры можно сформировать несколько вариантов построения системы линейных уравнений (СЛАУ).

***Вариант* 1**. Координаты известной точки X_i и измеренный из нее вектор направления P_i на неизвестную точку X_Z определяют уравнение прямой, проходящей через точки X_Z и X_i:

$$X_Z = X_i + d_i \cdot P_i, \qquad (1)$$

где X_Z – координаты произвольной точки, принадлежащей данной прямой, d_i – скаляр, определяющий расстояние от точки X_i до X_Z. Минимально необходимое количество измерений для определения координат неизвестной точки равно двум (точка пересечения двух лучей, исходящих из X_1 и X_2 на X_Z).

Рассмотрим возможные способы решения этой задачи. Пусть в выражении (1) $i = 1, 2$. Тогда из уравнений $X_Z = X_1 + d_1 \cdot P_1$ и $X_Z = X_2 + d_2 \cdot P_2$ следует, равенство:

$$X_1 + d_1 \cdot P_1 = X_2 + d_2 \cdot P_2, \qquad (2)$$

которое после простых преобразований можно привести к системе линейных уравнений вида:

$$P_{12} \cdot D = X', \qquad (3)$$

где $P_{12} = (P_1, -P_2)$, матрица с известными коэффициентами, первый столбец которой есть вектор направления P_1, а второй столбец – вектор P_2, взятый со знаком минус, $X' = X_2 - X_1$ – вектор правой части, $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ – подлежащий определению вектор D, составленный из искомых коэффициентов. В таком случае возможным решением задачи (3) будет оценка:

$$\overline{D} = P_{12}^{+} \cdot X', \qquad (4)$$

где P_{12}^{+} – матрица, псевдообратная к P_{12}. Отметим, что $\overline{D}$ (4) является оценкой точного решения, найденной методом наименьших квадратов, а следовательно несмещенной, состоятельной и эффективной [1].

При выводе решения задачи исходили из предположения (2) о существовании пересечения прямых $X_Z = X_1 + d_1 \cdot P_1$ и $X_Z = X_2 + d_2 \cdot P_2$. Но из-за возможных погрешностей определения векторов направлений P_1 и P_2 на неизвестную точку прямые могут не пересекаться, а только скрещиваться. Учитывая это обстоятельство, изменим постановку задачи следующим образом.

***Вариант* 2**. Будем считать, что заданы точки X_1 и X_2, а также векторы P_1 и P_2, определяющие прямые вида (1). Для решения задачи найдем такие точки на этих прямых, расстояние между которыми будет минимальным.

Зададим функцию $I(d_1, d_2)$, определяющую расстояние между двумя точками, лежащими на двух прямых, в виде:

$$I(d_1,d_2)=\left(X_1+d_1\cdot P_1-X_2-d_2\cdot P_2\right)^T\cdot\left(X_1+d_1\cdot P_1-X_2-d_2\cdot P_2\right), \qquad (5)$$

где неизвестными являются скаляры d_1 и d_2. Раскрыв скобки и выполнив перемножение слагаемых в (5), получим:

$$I(d_1,d_2)=X_1^T\cdot X_1+d_1^2\cdot P_1^T\cdot P_1+X_2^T\cdot X_2+d_2^2\cdot P_2^T\cdot P_2+2d_1\cdot X_1^T\cdot P_1-$$
$$-2X_1^T\cdot X_2-2d_2\cdot X_1^T\cdot P_2-2d_1\cdot X_2^T\cdot P_1-2d_1d_2\cdot P_1^T\cdot P_2+2d_2\cdot X_2^T\cdot P_2. \qquad (6)$$

Поскольку функция (5) выпуклая, необходимым и достаточным условием экстремума для нее является равенство нулю частных производных по аргументам [2]. Найдем частные производные этой функции по d_1 и d_2:

$$\frac{\partial I(d_1,d_2)}{\partial d_1}=2d_1\cdot P_1^T\cdot P_1-2(X_2-X_1)^T\cdot P_1-2d_2\cdot P_1^T\cdot P_2$$

и

$$\frac{\partial I(d_1,d_2)}{\partial d_2}=2d_2\cdot P_2^T\cdot P_2-2(X_2-X_1)^T\cdot P_2-2d_1\cdot P_1^T\cdot P_2.$$

Приравняв их к нулю и, разрешив относительно d_1 и d_2, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} d_1\cdot P_1^T\cdot P_1-d_2\cdot P_1^T\cdot P_2=\left(X_2-X_1\right)^T\cdot P_1 \\ -d_1\cdot P_1^T\cdot P_2+d_2\cdot P_2^T\cdot P_2=\left(X_1-X_2\right)^T\cdot P_2 \end{cases}. \qquad (7)$$

Поскольку можно записать $d_1\cdot P_1=(d_i\cdot\gamma)\cdot(1/\gamma\cdot P_i)$, где γ – произвольный множитель, то можно выбрать такую нормировку d_i, для которой $P_i^T\cdot P_i=1$, и тогда справедливо $d_1-d_2\cdot a=B^T\cdot P_1$ и $d_2-d_1\cdot a=-B^T\cdot P_2$, где $a=P_1^T\cdot P_2$ – известная скалярная величина и $B=X_2-X_1$ – известный вектор. Отсюда следует $d_1=\dfrac{B^T\cdot(P_1-a\cdot P_2)}{1-a^2}$ и $d_2=\dfrac{B^T\cdot(a\cdot P_1-P_2)}{1-a^2}$.

Решения не существует при $a=1$, что соответствует параллельности направлений P_1 и P_2. При этом вывод решения не зависит от размерности пространства оценок, т.е. одинаков и для планарной, и для пространственной задачи.

Подставив полученные значения d_1 и d_2 в соответствующие уравнения вида (1), получим две оценки вектора искомых координат в виде:

$$X_Z^{(1)}=X_1+\frac{\left(X_2-X_1\right)^T\cdot\left(P_1-P_1^T\cdot P_2\cdot P_2\right)}{1-\left(P_1^T\cdot P_2\right)^2}\cdot P_1,$$

$$X_Z^{(2)} = X_2 + \frac{\left(X_2 - X_1\right)^T \cdot \left(P_1^T \cdot P_2 \cdot P_1 - P_2\right)}{1 - \left(P_1^T \cdot P_2\right)^2} \cdot P_2 . \qquad (8)$$

В двумерном случае прямые обязательно пересекутся[1]. В пространственном случае, прямые либо пересекаются, либо, из-за погрешностей измерений, скрещиваются. Тогда решения (8) не совпадают, и в качестве искомой можно принять среднюю точку между $X_Z^{(1)}$ и $X_Z^{(2)}$, т.е. $X = \left(X_Z^{(1)} + X_Z^{(2)}\right)/2$.

Обобщение на случай N>2 измерений. Полученные решения (4) и (7) легко обобщить на случай произвольного количества известных точек X_i. Если $i = 1, \ldots, n$, то из выражения (2) получим:

$$X_i + d_i \cdot P_i = X_j + d_j \cdot P_j, \text{ где } i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j .$$

Всего таких равенств можно получить $C_n^2 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$, т.е. число сочетаний из n по 2. Каждая пара точек X_i и X_j даст уравнение вида (2), соответственно система линейных уравнений (3) преобразуется в:

$$\widetilde{P} \cdot \widetilde{D} = \widetilde{X} , \qquad (9)$$

где матрица системы

$$\widetilde{P} = \begin{vmatrix} P_1 & -P_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ P_1 & 0 & -P_3 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ P_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -P_n \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & P_{n-1} & -P_n \end{vmatrix},$$

вектор правой части

$$\widetilde{X} = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_1 \\ \vdots \\ X_n - X_{n-1} \end{vmatrix},$$

а вычисляемый вектор неизвестных равен:

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{vmatrix}.$$

---

[1] Если они не параллельны, конечно. Но в этом случае и нет решения.

При этом также оценка вектора неизвестных $\widetilde{D}$ может быть получена в виде $\overline{D} = \widetilde{P}^{+} \cdot \widetilde{X}$.

Аналогично, выражение (6) для множества точек с известными координатами можно преобразовать в выражение:

$$I(d_i, d_j) = X_i^T \cdot X_i + d_i^2 \cdot P_i^T \cdot P_i + X_j^T \cdot X_j + d_j^2 \cdot P_j^T \cdot P_j + 2d_i \cdot X_i^T \cdot X_i -$$
$$- 2X_i^T \cdot X_j - 2d_j \cdot X_i^T \cdot P_j - 2d_i \cdot X_j^T \cdot P_i - 2d_i d_j \cdot P_i^T \cdot P_j + 2d_j \cdot X_j^T \cdot P_j ,$$

где $i = 1, \ldots, n-1$, $j = i+1, \ldots, n$. Всего таких функций можно получить C_n^2. Вычислив частные производные от этих выражений, получим:

$$\frac{\partial I(d_i, d_j)}{\partial d_i} = 2d_i \cdot P_i^T \cdot P_i - 2(X_j - X_i)^T \cdot P_i - 2d_j \cdot P_i^T \cdot P_j ,$$

а приравняв их к нулю приходим к системе уравнений вида (8), где матрица системы

$$\widetilde{P} = \begin{vmatrix} P_1^T \cdot P_1 & -P_1^T \cdot P_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ P_1^T \cdot P_1 & 0 & -P_1^T \cdot P_3 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ P_1^T \cdot P_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -P_1^T \cdot P_n \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & P_{n-1}^T \cdot P_{n-1} & -P_{n-1}^T \cdot P_n \end{vmatrix},$$

вектор правой части

$$\widetilde{X} = \begin{vmatrix} (X_2 - X_1)^T \cdot P_1 \\ (X_3 - X_1)^T \cdot P_1 \\ \vdots \\ (X_n - X_{n-1})^T \cdot P_{n-1} \end{vmatrix},$$

а вычисляемый вектор неизвестных так же

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{vmatrix}.$$

Для решения таких переопределенных систем можно использовать численные методы, например, применение обобщенной обратной или псевдообратной матрицы [2].

Численные решения для предложенных методов

В качестве демонстрационного примера применения предложенных методов для решения задачи с угловыми измерениями приведем следующие расчеты. Пусть заданы две известные пространственные точки $X_1 = (100, 0, 100)^T$, $X_2 = (25, -56.699, 8.579)^T$, а измеренные пары углов горизонтальный и вертикальный $(\alpha_1, \beta_1) = (60°, 45°)$ для первой точки X_1 и $(\alpha_2, \beta_2) = (45°, 45°)$. В таком случае векторы направлений будут равны[2] $P_1 = (0.354, 0.612, 0.707)^T$, $P_1 = (0.5, 0.5, 0.707)^T$, а матрица системы и вектор правой части, сформированные по *Варианту* 1, будут равны:

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} -0.354 & 0.5 \\ -0.612 & 0.5 \\ 0.707 & 0.707 \end{vmatrix}, \ \tilde{X} = \begin{vmatrix} 75 \\ 56.699 \\ 91.421 \end{vmatrix}.$$

Решив полученную систему, получим $\overline{D} = (70.711, 200)$.

Составив систему уравнений по формуле (8) (по *Варианту* 2), получили матрицу системы и вектор правой части равные:

$$\tilde{P} = \begin{vmatrix} 1 & -0.983 \\ -0.983 & 1 \end{vmatrix}, \ \tilde{X} = \begin{vmatrix} -125.882 \\ 130.494 \end{vmatrix}.$$

Решение этой системы $\overline{D} = (70.711, 200)$ совпадает с решением по *Варианту* 1 с точностью до тринадцатого знака после запятой.

Подставив эти два значения в выражение (1), для двух *Вариантов* получили четыре оценки координат неизвестной точки $\overline{X}_Z$: $\overline{X}_Z^{(1,2,3,4)} = (125, 43.301, 150)^T$, близкие к координатам тестовой неизвестной точки X_Z. В качестве тестовой задавалась точка с координатами $X_Z = (125, 43.301, 150)$. Максимальное уклонение найденных оценочных значений от тестовой точки для *Варианта* 1 равно $3.22 \cdot 10^{-13}$, а для *Варианта* 2 – $3.059 \cdot 10^{-11}$. То есть отклонение сравнимо с машинной точностью вычислений.

В качестве демонстрационного примера решения задачи для количества известных точек более двух были взяты четыре точки: $X_1 = (100, 0, 100)^T$, $X_2 = (200, 0, 0)^T$, $X_3 = (25, -56.699, 8.579)^T$, $X_4 = (150, 0, 100)^T$, а измеренные пары углов горизонтальный и вертикальный $(\alpha_1, \beta_1) = (60°, 45°)$ для первой точки X_1, и $(\alpha_2, \beta_2) = (150°, 30°)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (45°, 45°)$, $(\alpha_4, \beta_4) = (120°, 45°)$, соответственно, для

[2] Значения указаны с точностью до третьего знака.

остальных точек. В таком случае векторы направлений P_i получились равными: $P_1 = (0.354, 0.612, 0.707)^T$, $P_2 = (-0.75, 0.433, 0.5)^T$, $P_3 = (0.5, 0.5, 0.707)^T$, $P_4 = (-0.354, 0.612, 0.707)^T$. Были составлены СЛАУ для *Варианта* 1 и *Варианта* 2 и найдены оценки $\bar{X}_Z$ для каждого решения близкие к исходной точке X_Z. Длина вектора уклонения решения сравнима с точностью вычислений: $|\bar{X}_Z - X_Z| < 10^{-12}$.

Литература

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных: справочное издание. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Амосов, А.А. Вычислительные методы. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 672 с.
3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. – М.: Недра, 1989. – 413 с.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): Учеб. Пособие для вузов. – М.: Директ-Медиа, 2013. – 432 стр.
5. Задача Потенота – [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%B0, свободный ресурс.
6. Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Академический проект, 2010. – 247 с.
7. Медведев П.А. Теория и методология повышения эффективности и точности решения главных геодезических задач на поверхности эллипсоида и в пространстве – Научная библиотека диссертаций и авторефератов disserCat, 2010 – Режим доступа: http://www.dissercat.com/content/teoriya-i-metodologiya-povysheniya-effektivnosti-i-tochnosti-resheniya-glavnykh-geodezicheks#ixzz45DTJFcZK – свободный ресурс.