

Математика и механика. Физика

УДК 514.76

МНОГООБРАЗИЕ ПРЯМЫХ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: ged@tpu.ru

Аналитически и геометрически изучаются поля инвариантных геометрических образов на m -семействе прямых в евклидовом пространстве E_n ($n \geq 2m+1$), определяемых компонентами фундаментального геометрического объекта.

Ключевые слова:

Евклидово пространство, фундаментальный геометрический объект, линейное отображение.

Key words:

Euclid's Space, Fundamental Geometric Object, Linear Mapping.

Введение

Как известно [1], одной из основных проблем многообразия линейных подпространств (линейчатого многообразия) в однородном пространстве является проблема инвариантного оснащения. В евклидовом пространстве эта проблема оснащения линейчатого многообразия является тривиальной, поскольку с каждым элементом этого многообразия ассоциируется нормальное (оснащающее) линейное подпространство, ортогональное элементу линейчатого многообразия. Поэтому при рассмотрении линейчатого многообразия в евклидовом пространстве представляет интерес изучение полей инвариантных геометрических образов, определяемых компонентами внутреннего фундаментального геометрического объекта этого многообразия в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

Статья посвящена изучению полей некоторых инвариантных геометрических образов на m -мерном многообразии G_m^1 прямых l_1^n в n -мерном евклидовом пространстве E_n при $n \geq 2m+1$.

Функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^r , а все рассуждения носят локальный характер.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–6].

1. Аналитический аппарат

Рассматривается n -мерное евклидово пространство E_n , отнесенное к ортонормальному реперу $R=(\bar{A}, \bar{e}_i)$, ($i, j, k, l = \overline{1, n}$) с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_j^i \bar{e}_j,$$

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_j^i \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^k + \omega_k^i = 0. \quad (1)$$

В пространстве E_n задается m -мерное многообразие (m семейство) G_m^1 прямых l_1^n ($n \geq 2m+1$), к которому присоединяется ортонормальный репер так, что точка $A \in l_1^n$, а вектор $\bar{e}_n$ параллелен прямой l_1^n , т. е.

$$l_1^n = (\bar{A}, \bar{e}_n). \quad (2)$$

В силу выбора ортонормального репера R и с учетом (1) и (2) дифференциальные уравнения многообразия $G_m^1 \subset E_n$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \omega^a &= A_\alpha^a \omega_\alpha^a, \quad \omega_n^{\hat{a}} = B_{n\alpha}^{\hat{a}} \omega_\alpha^a = \\ &= -\omega_\alpha^n = -B_{\alpha n}^n \omega_\alpha^a \Rightarrow B_{n\alpha}^{\hat{a}} = -B_{\alpha n}^n, \\ dA_\alpha^a + A_\alpha^b \omega_b^a - A_\beta^a \omega_\alpha^\beta - B_{n\alpha}^a \omega_n^{\hat{a}} - A_\beta^a B_{n\alpha}^{\hat{\beta}} \omega_\beta^\beta &= A_{\alpha\beta}^a \omega_n^\beta, \\ dB_{\alpha\beta}^{\hat{a}} + B_{n\beta}^{\hat{a}} \omega_\beta^{\hat{a}} - B_{n\gamma}^{\hat{a}} \omega_\beta^\gamma - B_{n\gamma}^{\hat{\beta}} B_{\alpha\beta}^{\hat{\gamma}} \omega_\beta^\gamma - \omega_\beta^{\hat{a}} &= B_{n\beta\alpha}^{\hat{a}} \omega_n^{\hat{\beta}}, \\ A_{[\alpha\beta]}^a &= 0, \quad B_{n[\beta\alpha]}^{\hat{\beta}} = 0, \quad B_{n\alpha}^{\hat{\beta}} = \delta_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем используется система индексов:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma &= \overline{1, m}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n-1}; \quad a, b, c = \overline{1, n-1}; \\ i, j, k, l &= \overline{1, n}; \quad f, g, h = \overline{m+1, 2m}; \\ \hat{f}, \hat{g}, \hat{h} &= \overline{2m+1, n-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (3) замечаем, что величины A_α^a и $B_{n\alpha}^{\hat{a}}$ образуют внутренний фундаментальный геометрический объект $\Gamma = \{A_\alpha^a, B_{n\alpha}^{\hat{a}}\}$ многообразия G_m^1 в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

Замечание 1. В следующих разделах статьи будут рассмотрены поля некоторых инвариантных образов многообразия $G_m^1 \subset E_n$, определяемые компонентами геометрического объекта $\Gamma = \{A_\alpha^a, B_{na}^\alpha\}$.

2. Центрирование прямых $l_1^n \in G_m^1 \subset E_n$

2.1. Рассмотрим на прямой $l_1^n \in G_m^1$ точку T с радиус-вектором

$$\bar{T} = \bar{A} + t\bar{e}_n. \quad (5)$$

Отсюда с учетом (1)–(3) получаем $d\bar{T} = \bar{E}_\beta(t) \omega_n^\beta + (\omega^\alpha dt) \bar{e}_n$, где

$$\bar{E}_\beta(t) = (A_\beta^\alpha + t\delta_\beta^\alpha) \bar{e}_\alpha + (A_\beta^\alpha + tB_{n\beta}^\alpha) \bar{e}_n. \quad (6)$$

Из (5) и (6) замечаем, что $(m+1)$ -плоскость

$$L_{m+1}(t) = (\bar{T}, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_m, \bar{e}_n) \quad (7)$$

является касательной $(m+1)$ -плоскостью в точке T к $(m+1)$ -поверхности, описываемой точкой T , когда прямая l_1^n описывает многообразие G_m^1 . С другой стороны из (6) и (7) замечаем, что m -плоскость

$$L_m^1 = (\bar{B}, \bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_m^*), \quad (8)$$

где $\bar{e}_\alpha^* = \bar{e}_\alpha + B_{na}^\alpha \bar{e}_n$, $\bar{B} = OB$, является касательной m -плоскостью к сферическому изображению G_m , описываемому конечной точкой B вектора $\bar{e}_n$ с началом в некоторой неподвижной точке $O \in E_n$, когда прямая l_1^n пробегает многообразие G_m^1 . Из (2) в силу (1), (3) и (7) получаем, что $(n-m-1)$ -плоскость

$$\Gamma_{n-m-1}^1 = (\bar{B}, \bar{e}_{m+1}^*, \dots, \bar{e}_{n-1}^*), \quad (9)$$

где $\bar{e}_\alpha^* = \bar{e}_\alpha + B_{na}^\alpha \bar{e}_n$, $B_{na}^\alpha = -B_{na}^\alpha = B_{na}^\alpha$, ортогональна m -плоскости L_m^1 , причем

$$\Gamma_{n-m-1}^1 \cup L_m^1 = \Gamma_{n-1}^1 = (\bar{B}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1}) \perp l_1^n.$$

2.2. На сферическом изображении G_m рассмотрим некоторую кривую Q , описываемую текущей точкой B и определяемую параметрическими дифференциальными уравнениями

$$\omega_n^\alpha = v^\alpha \Theta, \quad D\Theta = \Theta \wedge \Theta. \quad (10)$$

Из (1) и (3) с учетом (10) и (8) следует, что прямая $v = (B, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m^1$ касается кривой Q в точке $B \in G_m$. Заметим, что кривой Q на сферическом изображении G_m соответствует однопараметрическое семейство (1-семейств) прямых l_1^n многообразия G_m^1 . Поэтому в дальнейшем имея в виду какой-нибудь факт вдоль 1-семейства $(l_1^n) \subset G_m^1$ мы будем говорить о нем вдоль направления $v = (B, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m^1$.

2.3. **Определение 2.1.** Точка $T \in l_1^n \in G_m^1$ называется основной точкой прямой l_1^n относительно m -плоскости L_m^1 , если существует такое направление (основное) $v \in L_m^1$, вдоль которого эта точка T описывает линию (T) , с касательной, параллельной m -плоскости L_m^1 .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. На прямой $l_1^n \in G_m^1$ в общем случае существует не более m основных точек и соответствующих им основных направлений относительно m -плоскости L_m^1 .

Доказательство. Из (5)–(8) с учетом (9) и (10) следует, что точка $T \in l_1^n$ будет основной точкой

вдоль направления $v \in L_m^1$ в смысле определения 2.1 тогда и только тогда, когда t и v^α удовлетворяют с учетом (3) уравнениям:

$$[(A_\beta^\alpha - B_{na}^\alpha \hat{A}_\beta^\alpha) + t(\delta_\beta^\alpha - B_{na}^\alpha \hat{B}_{n\beta}^\alpha)] v^\beta = 0. \quad (11)$$

Эта система имеет нетривиальные решения относительно v^α тогда и только тогда, когда t будет корнем алгебраического уравнения степени m :

$$\det[(A_\beta^\alpha - B_{na}^\alpha \hat{A}_\beta^\alpha) + t(\delta_\beta^\alpha - B_{na}^\alpha \hat{B}_{n\beta}^\alpha)] = 0. \quad (12)$$

Отсюда замечаем, что в общем случае на прямой l_1^n существует не более m основных точек

$$\bar{T}_\alpha = \bar{A} + t_\alpha \bar{e}_n, \quad (13)$$

где t_α – корни уравнения (12). Каждой основной точке T_α отвечает основное направление $v_\alpha \in L_m^1$, определяемое с учетом (12) из системы (11). Теорема 2.1 доказана.

Определение 2.2. Центральной точкой или центром прямой $l_1^n \in G_m^1$ называется гармонический полюс основных точек T_α относительно несобственной точки прямой l_1^n в смысле [3].

Из (12) и (13) в соответствии с [3] следует, что точка $C \in l_1^n$, являющаяся центром прямой в соответствии с определением 2.2, имеет радиус вектор

$$\bar{C} = \bar{A} - \frac{A_\alpha^\alpha - B_{na}^\alpha \hat{A}_\alpha^\alpha}{m + B_{na}^\alpha \hat{B}_{n\alpha}^\alpha} \bar{e}_n. \quad (14)$$

Здесь с учетом (9) имеют место соотношения

$$B_{na}^\alpha \hat{B}_{n\alpha}^\alpha + m = (B_{n1}^{m+1})^2 + (B_{n2}^{m+2})^2 + \dots + (B_{nm}^{n-1})^2 + m \neq 0.$$

3. Однопараметрическое семейство конусов

$$K_{m-1}^2(t) \subset L_m^1$$

3.1. Для упрощения аналитических выкладок и геометрических рассуждений с учетом (9) проводится следующая канонизация ортонормального репера R :

$$B_{na}^\alpha = 0 \Rightarrow B_{na}^\alpha = 0 \Rightarrow B_{na}^\alpha = 0; \quad A_\alpha^\alpha = 0. \quad (15)$$

Из дифференциальных уравнений (3) с учетом (1) и (15) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^\beta &= A_{\alpha\alpha}^\alpha \omega_n^\alpha \Rightarrow \omega_\beta^\beta = -\omega_\alpha^\beta = \\ &= -A_{\alpha\alpha}^\beta \omega_n^\alpha \Rightarrow A_{\alpha\alpha}^\beta = -A_{\beta\alpha}^\alpha = B_{n\beta\alpha}^\alpha; \\ \omega^n &= A_\alpha^n \omega_n^\alpha \Rightarrow A_\alpha^n = -\frac{1}{m} A_{\beta\alpha}^\beta; \\ dA_\alpha^n - A_\beta^n \omega_\alpha^\beta &= A_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta, \\ dA_{\alpha\alpha}^\beta + A_{\alpha\alpha}^\gamma \omega_\gamma^\beta - A_{\beta\alpha}^\beta \omega_\alpha^\beta - A_{\alpha\gamma}^\beta \omega_\alpha^\gamma &= A_{\alpha\alpha\gamma}^\beta \omega_\gamma^\gamma, \\ A_{[\beta\alpha]}^\alpha &= 0, \quad A_{\alpha[\alpha\gamma]}^\beta = 0, \quad A_{\alpha\alpha}^\beta = A_{\alpha\beta}^\gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь явный вид коэффициентов $A_{\alpha\alpha}^\beta$ и $A_{\alpha\beta}^n$ несущественный.

В соответствии с [4] канонизация ортонормального репера R на многообразии G_m^1 типа (15) существует на любом многообразии $G_m^1 \subset E_n$ при $n \geq 2m+1$.

Из (8) и (14) заключаем, что канонизация репера R , осуществленная по формулам (15), геометрически характеризуется тем, что точка A является центром прямой $l_1^n \in G_m^1$, а m -плоскость

$$L_m^1 = (\bar{B}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m) \quad (17)$$

касается сферического изображения G_m в точке B . Поэтому m -плоскость

$$L_m = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m) \quad (18)$$

проходит через точку A параллельно m -плоскости L_m^1 .

3.2. Из соотношений (6) с учетом (15), (16), (18), (1)–(3) и (5)–(7) получаем дифференциальные уравнения

$$dA = A_\alpha^i \omega_n^\alpha \bar{e}_i, d\bar{e}_n = \omega_n^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad (19)$$

($i = \overline{1, n}$; $\alpha = \overline{1, m}$), а также следующие линейные подпространства

$$\begin{aligned} L_{n-1} &= (A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{n-1}) \perp l_1^n; \\ \Gamma_{n-m-1} &= (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_{n-1}) \perp L_m, \Gamma_{n-m-1} \subset L_{n-1}; \\ P_{n-m} &= (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_{n-1}, \bar{e}_n) = \Gamma_{n-m-1} \cup l_1^n. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (18) и (20) замечаем, что $(n-1)$ -плоскость L_{n-1} является оснащающей $(n-1)$ -плоскостью для многообразия G_m^1 , а $(n-m)$ -плоскость P_{n-m} является оснащающей плоскостью для m -семейства m -плоскостей L_m^1 .

3.3. Из (17)–(20) следует, что каждой прямой $l_1^n \in G_m^1$ отвечает линейное отображение:

$$\Pi = \{A_\alpha^\beta\} : L_m^1 \rightarrow L_m. \quad (21)$$

Геометрически это отображение каждой прямой $v = (\bar{B}, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m$ сопоставляет прямую $x = (A, \bar{e}_\beta) A_\alpha^\beta v^\alpha \in L_m$ – пересечение m -плоскости L_m с линейным подпространством, проходящим через $(n-m)$ -плоскость P_{n-m} и касательную к линии $(A)_v$, описываемой точкой A в направлении $v \in L_m^1$. Будем предполагать, что линейное отображение Π является невырожденным, т. е.

$$\det[A_\alpha^\beta] \neq 0. \quad (22)$$

В этом случае введем в рассмотрение величины B_α^γ по формулам:

$$B_\alpha^\gamma A_\gamma^\beta = A_\alpha^\gamma B_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta. \quad (23)$$

Из (3) с учетом (15), (16) и (23) следует, что величины B_α^γ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB_\alpha^\beta + B_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta - B_\gamma^\beta \omega_\alpha^\gamma = B_{\alpha\gamma}^\beta \omega_\beta^\gamma.$$

Здесь явный вид величин $B_{\alpha\gamma}^\beta$ несущественный. Из (21)–(23) замечаем, что прямой $l_1^n \in G_m^1$ отвечает обратное линейное отображение

$$\Pi^{-1} = \{B_\alpha^\beta\} : L_m \rightarrow L_m^1. \quad (24)$$

Заметим с учетом (21), что с линейным отображением Π ассоциируется линейный оператор

$\Pi = \{A_\alpha^\beta\}$, действующий в линейном подпространстве L_m . Геометрически этот линейный оператор каждому направлению $x = (A, \bar{e}_\beta) A_\alpha^\beta x^\alpha \in L_m$ сопоставляет направление $y = (A, \bar{e}_\beta) A_\alpha^\beta x^\alpha \in L_m$. Здесь

$$y = \{P_{n-m} \cup x\} \cap L_m^1 = (\bar{B}, \bar{e}_\beta) x^\beta \in L_m^1.$$

3.4. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.1. Каждой точке $T \in l_1^n \in G_m^1$ с радиус-вектором $\bar{T} = \bar{A} + \bar{t} \bar{e}_n$ отвечает в общем случае $(m-1)$ -мерный конус $Q_{m-1}^2(t) \subset L_m^1$ второго порядка с вершиной в точке $B \in G_m$. Этот конус представляет собой совокупность всех направлений $v = (\bar{B}, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m^1$, вдоль которых касательные к линиям $(A)_v$ и $(B)_v$, описываемым точками A и B , ортогональны.

Теорема 3.2. Основным точкам $T_\alpha \in l_1^n$ в смысле определения 2.1 отвечают вырожденные конусы $Q_{m-1}^2(t) \subset L_m^1$ с прямолинейными вершинами, проходящими через точку B параллельно собственным векторам линейного оператора Π .

Теорема 3.3. Центральной точке $A \in l_1^n \in G_m^1$ в смысле определения 2.2 отвечает в общем случае невырожденный конус $Q_{m-1}^2 = Q_{m-1}^2(A) \subset L_m^1$, определяемый линейным отображением Π . Несобственной точке прямой $l_1^n \in G_m^1$ отвечает конус $\bar{Q}_{m-1}^2 = Q_{m-1}^2(\infty)$, порожденный абсолютным евклидова пространства E_n .

Доказательство этих теорем вытекает из соотношений (11)–(14) с учетом (15)–(21) и (22)–(24), в силу чего указанные в этих теоремах конусы в m -плоскости L_m^1 определяются соответствующими уравнениями:

$$\begin{aligned} Q_{m-1}^2(t) &\Leftrightarrow \{A_{(\alpha)}^\gamma \delta_{|\gamma|\beta} + t \delta_{\alpha\beta}\} v^\alpha v^\beta = 0; \\ Q_{m-1}^2(t_\sigma) &\Leftrightarrow \{A_{(\alpha)}^\gamma \delta_{|\gamma|\beta} + t_\sigma \delta_{\alpha\beta}\} v^\alpha v^\beta = 0; \\ Q_{m-1}^2 &\Leftrightarrow A_{(\alpha)}^\gamma \delta_{|\gamma|\beta} v^\alpha v^\beta = 0; \\ \bar{Q}_{m-1}^2 &\Leftrightarrow (v^1)^2 + (v^2)^2 + \dots + (v^m)^2 = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где t_σ – корни уравнения $\det[A_\alpha^\beta + t \delta_\alpha^\beta] = 0$.

Замечание 3.1. Из (21), (24) и (25) следует, что прообразы конусов при линейном отображении $\Pi = \{A_\alpha^\beta\}$ являются конусы в L_m с вершиной в центральной точке A , определяющиеся соответствующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{m-1}^2(t) \subset L_m &\Leftrightarrow \{B_{(\alpha)}^\gamma \delta_{|\gamma|\beta} + t B_\alpha^\gamma B_\beta^\sigma \delta_{\gamma\sigma}\} x^\alpha x^\beta = 0, \\ x^\alpha &= 0, x^n = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{m-1}^2(t_\sigma) \subset L_m &\Leftrightarrow \{B_{(\alpha)}^\gamma \delta_{|\gamma|\beta} + t_\sigma B_\alpha^\gamma B_\beta^\sigma \delta_{\gamma\sigma}\} x^\alpha x^\beta = 0, \\ x^\alpha &= 0, x^n = 0; \end{aligned}$$

$$\bar{Q}_{m-1}^2 \subset L_m \Leftrightarrow B_{(\alpha)}^\gamma \delta_{|\gamma|\beta} x^\alpha x^\beta = 0, x^\alpha = 0, x^n = 0;$$

$$\bar{Q}_{m-1}^2 \subset L_m \Leftrightarrow B_\alpha^\gamma B_\beta^\sigma \delta_{\gamma\sigma} x^\alpha x^\beta = 0, x^\alpha = 0, x^n = 0.$$

Здесь вершинами соответствующих конусов $\bar{Q}_{m-1}^2(t_\sigma)$ являются прямые, проходящие через центр A и параллельные собственным векторам линейного оператора Π .

4. Поле m -плоскостей Γ_m

4.1. Случай $n=2m+1$. В этом случае из (20) получаем для каждой прямой $l_1^n \in G_m^1$ m -плоскость

$$\Gamma_m = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_{2m}). \quad (26)$$

4.2. Общий случай $n>2m+1$. Из (1), (3) и (16) замечание, что

$$d\bar{A} = (A_\beta^\alpha \bar{e}_\alpha + A_\beta^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}} + A_\alpha^n \bar{e}_n) \omega_{n+1}^\alpha.$$

Отсюда следует, что каждой прямой $l_1^n \in G_m^1$ отвечает касательная m -плоскость Γ_m^1 ($n>2m+1$) к m -поверхности $(A)_m$, описываемой точкой A вдоль многообразия G_m^1 , которая параллельна линейно независимым векторам:

$$\bar{e}_\alpha^* = A_\alpha^\beta \bar{e}_\beta + A_\alpha^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}} + A_\alpha^n \bar{e}_n.$$

Здесь предполагается, что в каждом элементе многообразия G_m^1

$$\text{Rang}[A_\alpha^i] = m. \quad (27)$$

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R , при которой с учетом (4) и в соответствии с (22) выполняются соотношения

$$A_\alpha^{\hat{j}} = 0, \det[A_\alpha^i] \neq 0. \quad (28)$$

Соотношения (28) с учетом (1), (4), (16) и (27) приводят к дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \omega^{\hat{j}} &= 0, \omega^{\hat{j}} = B_{f\alpha}^{\hat{j}} \omega_n^\alpha, \\ dB_{f\alpha}^{\hat{j}} + B_{\hat{f}\alpha}^{\hat{g}} \omega_g^{\hat{j}} - B_{g\alpha}^{\hat{f}} \omega_f^{\hat{g}} - B_{f\beta}^{\hat{j}} \omega_\alpha^\beta &= \\ &= B_{f\alpha\beta}^{\hat{j}} \omega^\beta, B_{f[\alpha\beta]}^{\hat{j}} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь в силу (1) выполняются дифференциальные уравнения:

$$\omega_{\hat{f}}^{\hat{j}} = -\omega_{\hat{j}}^{\hat{f}} \Rightarrow \omega_{\hat{f}}^{\hat{j}} = A_{\hat{f}\alpha}^{\hat{j}} \omega_n^\alpha \Rightarrow A_{\hat{f}\alpha}^{\hat{j}} = -A_{\hat{j}\alpha}^{\hat{f}}. \quad (30)$$

Из дифференциальных уравнений (29) и (30) следует, что канонизация репера R , осуществленная по формулам (28), существует в соответствии с [3]. Из (20) с учетом (26) и (27) вытекает следующая геометрическая интерпретация канонизации типа (28) в случае $n>2m+1$:

$$\Gamma_m = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_{2m}) = \{\Gamma_m^1 \cup l_1^1\} \cap \Gamma_{n-m-1}. \quad (31)$$

Линейные подпространства (18) и (31) приводят с учетом (1) к линейным подпространствам:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2m} &= (\bar{A}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{2m}) = L_m \cup \Gamma_m^1, \\ \Gamma_{n-2m} &= (\bar{A}, \bar{e}_{2m+1}, \dots, \bar{e}_n) \perp \Gamma_{2m}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. — М., 1953. — Т. 2. — С. 275–382.
2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. Ученые записки Московского государственного педагогического института. — М., 1965. — С. 29–37.
3. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). — 1962. — № 2. — Р. 231–240.
4. Евтушик Л.Е., Лушисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. — С.7–246.
5. Фиников С.П. Методы внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТП, 1948. — 432 с.
6. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m -плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 11. — С. 24–42.

Поступила 01.03.2011 г.