СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Многообразие прямых в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 2. – С. 5–8.
2. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Распределение двумерных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 6. – С. 5–7.
3. Ивлев Е.Т., Молдованова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразия m-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 24–42.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1958. – 687 с.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.

Поступила 10.03.2011 г.

УДК 517.54

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМ ИСКАЖЕНИЯ

Л.М. Бер

Томский политехнический университет
E-mail: berlm@tpu.ru

Для однолистных функций с симметрией вращения получены оценки, обобщающие теоремы Г.М. Голузина об искажении хорд.

Ключевые слова:
Однолистные функции, симметрия вращения, искажение хорд, оценки.
Key words:
Schlicht functions, symmetry of rotation, Distortion of chords, estimations.

§ 1. Области с разрезами

Пусть $D, 0\in D$, – односвязная область. Пусть $S(n)$, $n\in N$, – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и отображающих этот круг на область D_0, полученную из D исключением n ($n\in N$) простых непересекающихся жордановых дуг.

Пусть $S'(n)$ – подкласс класса $S(n)$ тех функций, которые отображают единичный круг на плоскость с разрезом по простой жордановой дуге, идущей в бесконечность. Согласно [1] любую функцию класса $S(n)$ можно записать в виде предела последовательности функций подкласса $S'(n)$, в котором каждая функция $\tilde{f}(z)$ представима в E в виде

$$\tilde{f}(z)=\lim_{\tau\to\infty} e^{\tau} f(z,\tau), \tag{1}$$

где $f(z,\tau)$, как функция от z, голоморфна и однолистна в круге E, $|f(z,\tau)|<1$ в E и $f(0,\tau)=0$, $f_z'(0,\tau)=1$, а, как функция от τ ($0\le\tau<\infty$), является решением дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{df}{dz}=-f\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\tau)\frac{\mu_k(\tau)+f}{\mu_k(\tau)-f},$$

удовлетворяющим начальному условию

$$f(z,0)=z.$$

Здесь $\mu_k(\tau)$ – управляющие функции, кусочно-непрерывные и по модулю равные единице в промежутке $0\le\tau<\infty$.

Пусть $f(z)\in S'(n)$ и $f(z,\tau)$ – функция, соответствующая $f(z)$. Для любых точек z_ν, $\nu=1,\dots,n$, $n\ge1$ положим для краткости $f_\nu=f(z_\nu,\tau)$.

Непосредственным вычислением получаем следующие равенства при $n\ge1$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau n}\frac{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}{f_\nu^n f_{\nu'}^n}\right]=$$

$$=-n+\frac{nf_\nu^{n-1}}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}-\frac{nf_{\nu'}^{n-1}}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau}-\frac{n}{f_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}-\frac{n}{f_{\nu'}}\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\right]=-n\frac{f_\nu^{n-1}f_{\nu'}^{n-1}}{1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}\left[f_\nu\frac{\partial f_{\nu'}}{\partial\tau}+f_{\nu'}\frac{\partial f_\nu}{\partial\tau}\right].$$

Используя уравнение Левнера, получим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau}\frac{f_\nu-f_{\nu'}}{f_\nu f_{\nu'}}\right]=$$

$$=-2f_\nu\overline{f}_{\nu'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau)-f_\nu)(\mu_k(\tau)-f_{\nu'})}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln\left[e^{-\tau n}\frac{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}{f_\nu^n f_{\nu'}^n}\right]=$$

$$=2nf_\nu f_{\nu'}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k-f_\nu)(\mu_k-f_{\nu'})}\times$$

$$\times\left[\frac{\mu_k(\tau)(f_\nu^{n-1}-f_{\nu'}^{n-1})}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}-\frac{1}{2}\right],\ n\ge2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ln[1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n]=2nf_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n\frac{1-f_\nu\overline{f}_{\nu'}}{1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k(\tau)}{(\mu_k(\tau)-f_\nu)\overline{(\mu_k(\tau)-f_{\nu'})}},\ n\ge1. \tag{4}$$

Интегрируя равенства (2)–(4) по τ от 0 до ∞ и учитывая (1) и начальное условие $f(z,0)=z$, получаем:

$$\ln\frac{\tilde f_\nu-\tilde f_{\nu'}}{\tilde f_\nu\tilde f_{\nu'}}\frac{z_\nu-z_{\nu'}}{z_\nu z_{\nu'}}=$$

$$=-2\int_0^\infty\sum_{k=1}^n\delta_k(\tau)\frac{f_\nu}{(\mu_k(\tau)-f_\nu)}\frac{f_{\nu'}}{(\mu_k(\tau)-f_{\nu'})}d\tau,\qquad(5)$$

$$\ln\frac{\tilde f_\nu^n-\tilde f_{\nu'}^n}{\tilde f_\nu^n\tilde f_{\nu'}^n}\frac{z_\nu-z_{\nu'}}{z_\nu z_{\nu'}}=$$

$$=2n\int_0^\infty\sum_{k=1}^n\delta_k(\tau)\frac{f_\nu}{\mu_k(\tau)-f_\nu}\frac{f_{\nu'}}{\mu_k(\tau)-f_{\nu'}}\times$$

$$\times\left[\mu_k(\tau)\frac{f_\nu^{n-1}-f_{\nu'}^{n-1}}{f_\nu^n-f_{\nu'}^n}-\frac{1}{2}\right]d\tau,\qquad(6)$$

при $n\geq 2$, а при $n\geq 1$

$$\ln(1-z_\nu^n\overline{z}_{\nu'}^n)=$$

$$=-2n\int_0^\infty\sum_{k=1}^n\delta_k(\tau)\frac{f_\nu^n}{\mu_k(\tau)-f_\nu}\frac{\overline{f}_\nu^n}{\overline{\mu_k(\tau)-f_{\nu'}}}\frac{1-f_\nu\overline{f}_{\nu'}}{1-f_\nu^n\overline{f}_{\nu'}^n}d\tau.\ (7)$$

§ 2. Области с симметрией вращения

Пусть $S_p, p\in N$ – класс голоморфных однолистных в единичном круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $f_p(z)$, нормированных условиями $f_p(0)=0$, $f_p'(0)=1$ и отображающих этот круг на области с p-кратной симметрией вращения относительно нуля.

Обозначим через Σ_{0p}, $p\in N$ множество всех функций $F_p(\xi)$ класса Σ_0, отображающих область $\Omega=\{\xi:1<|\xi|<\infty\}$ на область с p-кратной симметрией вращения относительно нуля и не принимающих в Ω нулевого значения.

Поскольку между классами S_p и Σ_{0p} формулы

$$F_p(\xi)=1/f_p(1/\xi)\in\Sigma_{0p},\ \text{если}\ f_p(z)\in S_p,$$
$$f_p(z)=1/F_p(1/z)\in S_p,\ \text{если}\ F_p(\xi)\in\Sigma_{0p},\qquad(8)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие, то многие оценки на классе Σ_{0p} легко сводятся к оценкам на классе S_p и, более того, к оценкам на подклассе класса S_p, представимом через интегралы уравнения Левнера.

Пусть $f_p(z)\in S_p'$ и $f_p(z,\tau)$ – функция, соответствующая $f_p(z)$. Используя уравнение Левнера для функций класса S_p и повторив рассуждения § 1 для функции $f_p(z)$, получим равенства, аналогичные (5)–(7):

$$\ln\frac{\tilde f_{p,\nu}-\tilde f_{p,\nu'}}{\tilde f_{p,\nu}\tilde f_{p,\nu'}}\frac{z_\nu-z_{\nu'}}{z_\nu z_{\nu'}}=$$

$$=-2\int_0^\infty\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}\frac{f_{p,\nu'}^p}{\mu^p-f_{p,\nu'}^p}d\tau-$$

$$-2\sum_{l=1}^{p-1}\int_0^\infty\frac{\mu^p f_{p,\nu}^{p-l}f_{p,\nu'}^l}{(\mu^p-f_{p,\nu}^p)(\mu^p-f_{p,\nu'}^p)},\qquad(9)$$

при $p\geq 2$, а при $p\geq 1$

$$\ln\frac{\tilde f_{p,\nu}^p-\tilde f_{p,\nu'}^p}{\tilde f_{p,\nu}^p\tilde f_{p,\nu'}^p}\frac{z_\nu^p-z_{\nu'}^p}{z_\nu^p z_{\nu'}^p}=-2p\int_0^\infty\frac{f_{p\nu}^p}{\mu^p-f_{p\nu}^p}\frac{f_{p\nu'}^p}{\mu^p-f_{p\nu'}^p}d\tau,(10)$$

$$\ln(1-z_\nu^p\overline{z}_{\nu'}^p)=-2p\int_0^\infty\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}\overline{\left(\frac{f_{p,\nu'}^p}{\mu^p-f_{p,\nu'}^p}\right)}d\tau.\qquad(11)$$

Положим для $k=1, p$, $z_\nu\in E$, $z_{\nu'}\in E$

$$\Phi_k(z_\nu,z_{\nu'})=\frac{\tilde f_{p,\nu}^k-\tilde f_{p,\nu'}^k}{\tilde f_{p,\nu}^k\tilde f_{p,\nu'}^k}\frac{z_\nu^k-z_{\nu'}^k}{z_\nu^k z_{\nu'}^k},$$

$$\varphi(z_\nu,z_{\nu'})=(1-z_\nu^p\overline{z}_{\nu'}^p),$$

$$\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}=U_\nu+iV_\nu,\ \nu=1,\dots,n,$$

где U_ν, V_ν – вещественные функции.

В этих обозначениях (9)–(11) принимают вид

$$\ln\Phi_1(z_\nu,z_{\nu'})=$$

$$=-2\int_0^\infty(U_\nu+iV_\nu)(U_{\nu'}+iV_{\nu'})d\tau-2A'_{\nu,\nu'},\qquad(12)$$

$$\ln\Phi_p(z_\nu,z_{\nu'})=-2p\int_0^\infty(U_\nu+iV_\nu)(U_{\nu'}+iV_{\nu'})d\tau,$$

$$\ln\varphi(z_\nu,z_{\nu'})=-2p\int_0^\infty(U_\nu+iV_\nu)(U_{\nu'}-iV_{\nu'})d\tau,\qquad(13)$$

где $$A'_{\nu,\nu'}=\sum_{l=1}^{p-1}\int_0^\infty\frac{\mu^p f_{p,\nu}^{p-l}f_{p,\nu'}^l}{(\mu^p-f_{p,\nu}^p)(\mu^p-f_{p,\nu'}^p)}d\tau.$$

При этом под логарифмом понимается та однозначная в рассматриваемой области ветвь многозначной функции, которая обращается в нуль при $z_\nu\to 0$, $z_{\nu'}\to 0$.

§ 3. Теоремы искажения для однолистных функций с симметрией вращения

Теорема 1. Для функции $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$, $p\geq 2$, при любых вещественных положительных $\alpha_{\nu,\nu'}$, $\nu,\nu'=1,2,\dots,n$, $n\geq 1$, таких, что $\sum_{\nu,\nu'=1}^n a_{\nu,\nu'}X_\nu X_{\nu'}$ будет положительной квадратичной формой, и при любых ξ_ν, $\nu,\nu'=1,\dots,n$ из $\Omega=\{\xi:1<|\xi|<\infty\}$ справедливо неравенство

$$\prod_{\nu,\nu'=1}^n\left|\frac{F_p(\xi_\nu)-F_p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu-\xi_{\nu'}}\right|^{pa_{\nu,\nu'}}\geq$$

$$\geq\prod_{\nu,\nu'=1}^n\left|1-\frac{1}{\xi_\nu^p\overline{\xi}_{\nu'}^p}\right|^{a_{\nu,\nu'}}-2\sum_{\nu,\nu'=1}^n a_{\nu,\nu'}\sum_{l=1}^{p-1}B_l(\xi_\nu,\xi_{\nu'}),\qquad(14)$$

где

$$B_l(\xi_\nu,\xi_{\nu'})=\left[\frac{|\xi_\nu|}{(1-|\xi_\nu|)^2}\right]^{p-l}\left[\frac{|\xi_{\nu'}|}{(1-|\xi_{\nu'}|)^2}\right]^l\times$$

$$\times\frac{|\xi_\nu|^p|\xi_{\nu'}|^p}{(1-|\xi_\nu|^p)(1-|\xi_{\nu'}|^p)}$$

при $\xi_\nu=\xi_{\nu'}$ под отношением $\dfrac{F_p(\xi_\nu)-F_p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu-\xi_{\nu'}}$ следует понимать $F_p'(\xi_\nu)$.

Доказательство. Пусть $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$. Тогда согласно (8) $f_p(z)=1/F_p(1/z)\in S_p$ и соответствующие ей функции $\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$ и $\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$ можно представить в виде

$$\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})=\frac{F_p(\xi_\nu)-F_p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu-\xi_{\nu'}},$$

$$\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})=\left(1-\frac{1}{\xi_\nu^p\overline{\xi}_{\nu'}^p}\right).$$

Отделяя в (12, 13) вещественные части, получим:

$$\ln\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|=-2\int_0^\infty(U_\nu U_{\nu'}-V_\nu V_{\nu'})d\tau-2A_{\nu,\nu'},$$

$$\ln\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|=-2p\int_0^\infty(U_\nu U_{\nu'}+V_\nu V_{\nu'})d\tau,$$

где $A_{\nu,\nu'}=\mathrm{Re}A'_{\nu,\nu'}$.

Отсюда сложением и вычитанием левых и правых частей полученных равенств приходим к следующим формулам

$$\ln\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|=-\frac{1}{p}\ln\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|-4\int_0^\infty U_\nu U_{\nu'}d\tau-2A_{\nu,\nu'},$$

$$\ln\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|=\frac{1}{p}\ln\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|+4\int_0^\infty V_\nu V_{\nu'}d\tau-2A_{\nu,\nu'}.$$

Умножим полученные после почленного сложения и вычитания равенства на вещественные числа $\alpha_{\nu,\nu'}$, просуммируем и получим:

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}(\ln\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|^p\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|)=$$

$$=-4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}U_\nu U_{\nu'}d\tau-2p\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}A_{\nu,\nu'},\qquad(15)$$

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}\ln\frac{\left|\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|^p}{\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|}=$$

$$=4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}d\tau-2p\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}A_{\nu,\nu'}.\qquad(16)$$

Тогда, принимая во внимание, что для положительных вещественных чисел $\alpha_{\nu\nu'}$, удовлетворяющих условиям теоремы, имеем

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}U_\nu U_{\nu'}\geq 0,\quad \sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}\geq 0,$$

а также учитывая оценку $A_{\nu,\nu'}$ сверху

$$A_{\nu,\nu'}\leq\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\frac{|\xi_\nu|}{(1-|\xi_\nu|)^2}\right)^{p-l}\left(\frac{|\xi_{\nu'}|}{(1-|\xi_{\nu'}|)^2}\right)^{l}\times$$

$$\times\frac{|\xi_\nu|^p|\xi_{\nu'}|^p}{(1-|\xi_\nu|^p)(1-|\xi_\nu|^p)}$$

и обозначения $\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, $\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, получаем неравенство (14). Теорема доказана.

Теорема 2. Для функций $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$, $p\in\boldsymbol{N}$, при любых вещественных $\alpha_{\nu,\nu'}$, $\nu,\nu'=1,\ldots,n$, $n\geq1$, таких, что $\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}X_\nu X_{\nu'}$ будет положительной квадратичной формой и при любых ξ_ν, $\nu=1,\ldots,n$ из области $\Omega=\{\xi:1<\xi<\infty\}$ имеем оценки

$$\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|1-\frac{1}{\xi_\nu^p\overline{\xi}_{\nu'}^p}\right|^{a_{\nu,\nu'}}\leq\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}\right|^{a_{\nu,\nu'}}\leq$$

$$\leq\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left|1-\frac{1}{\xi_\nu^p\overline{\xi}_{\nu'}^p}\right|^{-a_{\nu,\nu'}}.\qquad(17)$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})=\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}.$$

Повторив рассуждения теоремы 1, заменяя $\Phi_1(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$ на $\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, получим равенства аналогичные (15, 16):

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}\ln(\left|\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|)=$$

$$=4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}d\tau,$$

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}\ln\frac{\left|\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|}{\left|\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})\right|}=4p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}V_\nu V_{\nu'}d\tau.$$

Тогда, если $\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}a_{\nu,\nu'}X_\nu X_{\nu'}$ – положительная квадратичная форма, то учитывая обозначения $\Phi_p(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$ и $\varphi(\xi_\nu,\xi_{\nu'})$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Положив в (17) $p=1$, получаем оценку Г.М. Голузина для функции $F(\xi)$ класса Σ [2. С. 119].

Следствие 2. Положив в (17) $p=1$, $n=1$, $\alpha_{11}=1$, имеем оценку для функции $F(\xi)\in\Sigma$

$$1-\frac{1}{|\xi|^2}\leq|F'(\xi)|^2\leq\frac{1}{1-\dfrac{1}{|\xi|^2}}.$$

Следствие 3. Для функции $F(\xi)\in\Sigma$ положив в (17) $p=1$, $n=2$, $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{12}=\alpha_{21}=1$ и $\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$, $a_{12}=a_{21}=-1$, получаем

$$\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)\left|1-\frac{1}{\xi_1\overline{\xi}_2}\right|^2\leq$$

$$\leq\left|F'(\xi_1)F'(\xi_2)\right|\left|\frac{F(\xi_1)-F(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\right|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{|\xi_1|^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{|\xi_2|^2}\right)}\frac{1}{\left|1-\dfrac{1}{\xi_1\overline{\xi}_2}\right|^2}\qquad(18)$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\xi_1\bar{\xi}_2}\right|^2}\le$$

$$\le\left|F'(\xi_1)F'(\xi_2)\right|\left|\frac{\xi_1-\xi_2}{F(\xi_1)-F(\xi_2)}\right|^2\le$$

$$\le\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_1|^2}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\xi_2|^2}\right)}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{\xi_1\bar{\xi}_2}\right|^2}. \qquad (19)$$

Разделив почленно (18) на (19), приходим к оценке

$$\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_1|^2}}\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_2|^2}}\le\left|\frac{F(\xi_1)-F(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_1|^2}}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{|\xi_2|^2}}}.$$

Эта оценка впервые получена И.Е. Базилевичем [3].

Теорема 3. При любых γ_ν, $\nu=1,...,n$, $n\ge1$, и любых ξ_ν, $\nu=1,...,n$ из области $\Omega=\{\xi:1<|\xi|<\infty\}$ для $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$, $p\in N$, имеем оценку

$$\left|\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}\right|\le$$

$$\le-\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\bar{\gamma}_{\nu'}\ln\left(1-\frac{1}{\xi_\nu^p\bar{\xi}_{\nu'}^p}\right).$$

Доказательство. Достаточно доказать это неравенство для функций $F_p(\xi)=1/f_p(1/\xi)$, с $f_p(z)\in S_p'$. Используя (11), имеем

$$\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}=$$

$$=-2p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}\frac{f_{p,\nu'}^p}{\mu^p-f_{p,\nu'}^p}d\tau=$$

$$=-2p\int_0^\infty\left(\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}\right)^2d\tau$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F_p^p(\xi_\nu)-F_p^p(\xi_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi_{\nu'}^p}\right|=$$

$$=2p\int_0^\infty\left|\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}\right|^2d\tau=$$

$$=2p\int_0^\infty\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\bar{\gamma}_{\nu'}\frac{f_{p,\nu}^p}{\mu^p-f_{p,\nu}^p}\overline{\left(\frac{f_{p,\nu'}^p}{\mu^p-f_{p,\nu'}^p}\right)}d\tau.$$

Применим формулу (12) к последнему интегралу. Получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогично доказывается более общее утверждение.

Теорема 4. При любых комплексных γ_ν, $\nu=1,...,n$, $n\ge1$, и $\gamma'_{\nu'}$, $\nu'=1,...,n'$, $n'\ge1$, и любых ξ_ν, $\nu=1,...,n$, и $\xi'_{\nu'}$, $\nu'=1,...,n'$, из области $\Omega=\{\xi:1<|\xi|<\infty\}$ для $F_p(\xi)\in\Sigma_{0p}$, $p\in N$, имеем

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu'=1}^{n'}\gamma_\nu\gamma'_{\nu'}\ln\frac{F^p(\xi_\nu)-F^p(\xi'_{\nu'})}{\xi_\nu^p-\xi'^p_{\nu'}}\right|\le$$

$$\le\sqrt{\begin{pmatrix}\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\bar{\gamma}_{\nu'}\ln\left(1-\frac{1}{\xi_\nu^p\bar{\xi}_{\nu'}^p}\right)\times\\ \times\sum_{\nu,\nu'=1}^{n'}\gamma'_\nu\bar{\gamma}'_{\nu'}\ln\left(1-\frac{1}{\xi'^p_\nu\bar{\xi}'^p_{\nu'}}\right)\end{pmatrix}}. \qquad (20)$$

Следствие 4. Для функции $F(\xi)\in\Sigma_0$ (положив в (20) $p=1$) справедлива оценка

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\nu'=1}^{n'}\gamma_\nu\gamma'_{\nu'}\ln\frac{F(\xi_\nu)-F(\xi'_{\nu'})}{\xi_\nu-\xi'_{\nu'}}\right|\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{\nu,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\bar{\gamma}_{\nu'}\ln\left(1-\frac{1}{\xi_\nu\bar{\xi}_{\nu'}}\right)\sum_{\nu,\nu'=1}^{n'}\gamma'_\nu\bar{\gamma}'_{\nu'}\ln\left(1-\frac{1}{\xi'_\nu\bar{\xi}'_{\nu'}}\right)}.$$

Эта оценка получена Н.А. Лебедевым [4. С. 123] исходя из принципа площадей и, как легко видеть, справедлива и на классе Σ_1.

Следствие 5. Если $F(\xi)\in\Sigma$, то

$$\left|\ln\frac{F(\xi_1)-F(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\right|\le-\ln\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right),$$

где $|\xi_1|=|\xi_2|=\rho>1$.

Оценка впервые получена Г.М. Голузиным [5]. Оценка точная, и знак равенства в ней имеет место для функций $F(\xi)=\xi+e^{i\alpha}/\xi+\mathrm{const}\in\Sigma$ при соответствующем выборе постоянной α, $0\le\alpha<2\pi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. – Томск: ТГУ, 2001. – 220 с.
2. Голузин Г.М. О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Математический сборник. – 1948. – Т. 23 (65). – № 3. – С. 353–360.
3. Базилевич И.Е. О теоремах искажения в теории однолистных функций // Математический сборник. – 1951. – Т. 28 (70). – № 2. – С. 283–293.
4. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.
5. Голузин Г.М. О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Математический сборник. – 1946. – Т. 19 (61). – № 2. – С. 183–202.

Поступила 25.03.2011 г.