

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА

М.М. Филиппов, А.И. Грибенюков, В.А. Кочегуров*, Ю.В. Бабушкин*

Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, г. Томск

*Томский политехнический университет

E-mail: imces@yandex.ru

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации при формировании заданного температурного поля. Решение основано на переходе к конечно-разностной аппроксимации модели объекта исследования и получении линеаризованной системы уравнений, позволяющей найти оптимальное управление с полной обратной связью в виде пропорциональных регуляторов на основе метода динамического программирования и квадратичного критерия качества. Приведены оценки точности стабилизации температурного поля.

Ключевые слова:

Система с распределенными параметрами, оптимальное управление, стабилизация, температурное поле.

Key words:

Distributed parameters system, optimal control, stabilization, thermal field.

Задача стабилизации заранее заданных распределений температур, пространственный профиль которых обусловлен неизотермичностью используемых технологических процессов, является типичной для сложного электротермического оборудования, например, многозонных термических установок для выращивания кристаллов [1].

В экспериментальных работах по выращиванию монокристаллов установлено, что одним из условий получения кристаллов высокого качества в многозонных термических установках является поддержание в зоне кристаллизации распределения температуры $T^*(x,t)$ с точностью не хуже 0,1 К [2]. Но непосредственно на самих установках (или их моделях) подобрать алгоритмы управления, которые могли бы обеспечить необходимую точность поддержания температурного профиля, часто оказывается невозможным из-за их сложности, обусловленной протекающими процессами, взаимным влиянием термических зон и т. д.

С другой стороны, во многих ситуациях, результаты, полученные на простых моделях, могут быть обобщены на более сложные случаи. Поэтому в качестве модели объекта управления в данной работе рассматривается стержень длиной L , характеризующийся одномерным распределением теплофизических свойств вдоль независимой пространственной переменной x и зависящим от времени распределением температуры $T(x,t)$. Температура $T(x,t)$ поддерживается рассредоточенными по длине стержня нагревателями с помощью управляющих воздействий $u(x,t)$.

Целью работы является поиск таких управляющих воздействий, которые позволят сформировать и поддерживать заданное распределение температуры объекта с требуемой точностью.

Для анализа распределения $T(x,t)$ вдоль переменной x объект разбивается на n дискретных отрезков длиной Δx , где Δx выбирается согласно теореме отсчетов Котельникова из условия $\Delta x \leq 2\pi/\mu_b$. Здесь μ_b — максимальная пространственная частота разло-

жения $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x)$ по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$.

Коэффициенты разложения $\bar{T}(\mu_n, t)$ определяются с помощью конечного интегрального преобразования вида

$$\bar{T}(\mu_n, t) = \int_0^L T(x,t) \varphi(\mu, x) r(x) dx, \quad (1)$$

где $r(x)$ — весовая функция, зависящая от структуры математической модели объекта управления.

Распределение $T(x,t)$ заменяется n -мерным вектором

$$\mathbf{T}(\Delta x, t) = \left\{ T_1 \left(\frac{\Delta x}{2}, t \right), \dots, T_n \left(\frac{(n+1)\Delta x}{2}, t \right) \right\}.$$

Соответственно управление $u(x,t)$ представляется также вектором

$$\mathbf{u}(\Delta x, t) = \left\{ u_1 \left(\frac{\Delta x}{2}, t \right), \dots, u_n \left(\frac{(n+1)\Delta x}{2}, t \right) \right\}.$$

Скорость изменения $\frac{d\mathbf{T}(\Delta x, t)}{dt}$ в общем случае можно записать

$$\frac{d\mathbf{T}(\Delta x, t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{T}(\Delta x, t), \mathbf{u}(\Delta x, t)), \quad (2)$$

а выходной сигнал

$$\mathbf{Y}(\Delta x, t) = \mathbf{Z}(\mathbf{T}(\Delta x, t), \mathbf{u}(\Delta x, t)), \quad (3)$$

где \mathbf{F} , \mathbf{Z} — некоторые нелинейные непрерывно дифференцируемые вектор-функции.

В качестве заданного стационарного распределения $T(x)$ принимается выражение вида

$$\mathbf{T}^*(\Delta x) = \left\{ T_1^* \left(\frac{\Delta x}{2} \right), \dots, T_n^* \left(\frac{(n+1)\Delta x}{2} \right) \right\}.$$

Предполагается, что $\mathbf{T}^*(\Delta x)$ реализуется с помощью управляющего воздействия $\mathbf{u}^*(\Delta x)$.

Для линеаризации (2, 3) относительно $T^*(\Delta x)$, $u^*(\Delta x)$ используется разложение в ряд Тейлора

$$\frac{d\Delta T(\Delta x, t)}{dt} = A\Delta T(\Delta x, t) + B\Delta u(\Delta x, t) + O, \quad (4)$$

где O – слагаемые второго и выше порядков малости, которые далее принимаются равными нулю,

$$A = \left. \frac{\partial F(T(\Delta x, t), u(\Delta x, t))}{\partial T(\Delta x, t)} \right|_{T^*, u^*},$$

$$B = \left. \frac{\partial F(T(\Delta x, t), u(\Delta x, t))}{\partial u(\Delta x, t)} \right|_{T^*, u^*}$$

– матрицы постоянных коэффициентов;

$$\Delta T(\Delta x, t) = T^*(\Delta x) - T(\Delta x, t),$$

$$\Delta u(\Delta x, t) = u^*(\Delta x) - u(\Delta x, t).$$

Коэффициенты матриц A и B зависят от объекта исследования, в частности, при формировании температурного поля длинного стержня используется уравнение теплопроводности (5) с граничными и начальными условиями (6–8)

$$c\rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^6 S}{V} T(x, t) + f(u(x, t)), \quad (5)$$

где $f(u(x, t)) = \frac{\alpha^6 S}{V} T^{oc} + \frac{P^H}{V} u(x, t)$, $0 < x < L$, $t > 0$,

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} - \alpha^{\tau(x=0)} T(0, t) = \alpha^{\tau(x=0)} T^{oc(x=0)}, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + \alpha^{\tau(x=L)} T(L, t) = \alpha^{\tau(x=L)} T^{oc(x=L)}, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$T(x, 0) = T^{oc}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (8)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м³; α^6 , α^{τ} – коэффициенты теплоотдачи боковой и торцевых поверхностей, Вт/(м²·К); P^H – тепловые мощности нагревателей, Вт; S , V – площадь боковой поверхности стержня, м², и объем, м³, в котором выделяется тепло нагревателей; $u(x, t) = (0..1)$ – управляющие воздействия на нагреватели; T^{oc} – температура окружающей среды, К; T – температура, К; t – время, с.

Система (5–7) может быть представлена в более удобной форме

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - kT(x, t) + f^*(u(x, t)), \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} - k_1 T(0, t) = z_1, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + k_2 T(L, t) = z_2, \quad t > 0, \quad (11)$$

где

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad k = \frac{\alpha^6 S}{c\rho V}, \quad f^*(u(x, t)) = \frac{f(u(x, t))}{c\rho},$$

$$k_1 = \frac{\alpha^{\tau(x=0)}}{\lambda}, \quad k_2 = \frac{\alpha^{\tau(x=L)}}{\lambda},$$

$$z_1 = k_1 T^{oc(x=0)}, \quad z_2 = k_2 T^{oc(x=L)}.$$

Конечно-разностная аппроксимация по пространственной переменной уравнений (9–11) для шестигранного стержня с радиусом описанной окружности r_c дает

$$\frac{dT_i}{dt} = a_{i,j-1} T_{i-1} - a_{i,j} T_i + a_{i,j+1} T_{i+1} + P_i^H g_i u_i + \gamma_i T^{oc}, \quad (12)$$

$$T_i(0) = T^{oc}, \quad T_0 = T^{oc(x=0)}, \quad T_{n+1} = T^{oc(x=L)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$a_{11} = a_{10} + a_{12} + \gamma_1, \quad a_{10} = 0, \quad a_{12} = \frac{\lambda}{c\rho h^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{2\lambda\alpha^{\tau(x=0)}\beta_1}{c\rho h} + \frac{2\alpha_1^6}{\sqrt{\frac{3}{2}c\rho r_c}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2\lambda + \alpha^{\tau(x=0)}h},$$

$$g_1 = \frac{1}{c\rho V_1}, \quad a_{i,j} = a_{i,j-1} + a_{i,j+1} + \gamma_i, \quad a_{i,j-1} = \frac{\lambda}{c\rho h^2},$$

$$a_{i,j+1} = \frac{\lambda}{c\rho h^2}, \quad \gamma_i = \frac{2\alpha_i^6}{\sqrt{\frac{3}{2}c\rho r_c}}, \quad g_i = \frac{1}{c\rho V_i},$$

$$i = 2, \dots, n-1, \quad a_{n,n} = a_{n,n-1} + a_{n,n+1} + \gamma_n, \quad a_{n,n-1} = \frac{\lambda}{c\rho h^2},$$

$$a_{n,n+1} = 0, \quad \gamma_n = \frac{2\lambda\alpha^{\tau(x=L)}\beta_2}{c\rho h} + \frac{2\alpha_n^6}{\sqrt{\frac{3}{2}c\rho r_c}},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\lambda + \alpha^{\tau(x=L)}h}, \quad g_n = \frac{1}{c\rho V_n}.$$

Или в форме (4) с матрицами вида

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{Bmatrix},$$

$$B = \begin{Bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & g_n \end{Bmatrix}.$$

Для определения размерности матриц необходимо найти собственные значения и собственные функции объекта управления из решения задачи Штурма–Лиувилля вида [3]

$$\frac{d^2\varphi(\mu, x)}{dx^2} = -\mu^2\varphi(\mu, x), \quad \frac{d\varphi(\mu, 0)}{dx} - k_1\varphi(\mu, 0) = 0,$$

$$\frac{d\varphi(\mu, L)}{dx} + k_2\varphi(\mu, L) = 0.$$

Собственные функции для рассматриваемого объекта имеют вид [3]

$$\varphi(\mu_n, x) = \frac{1}{E_n} \left[\cos(\mu_n x) + k_1 \frac{\sin(\mu_n x)}{\mu_n} \right], \quad n = \overline{1, \infty}, \quad (13)$$

где нормирующий коэффициент E_n с учетом (13) определяется выражением [3]

$$E_n = \left(\frac{1}{a} \left[\frac{k_2}{2\mu_n^2} \frac{\mu_n^2 + k_1^2}{\mu_n^2 + k_2^2} + \frac{k_1}{2\mu_n^2} + \frac{L}{2} \left(1 + \frac{k_1^2}{\mu_n^2} \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}},$$

а собственные значения μ_n с учетом граничных условий (10, 11) находятся из характеристического уравнения [3]

$$\frac{\operatorname{tg}(\mu L)}{\mu} = \frac{k_1 + k_2}{\mu^2 - k_1 k_2}.$$

Так как функция $\operatorname{tg}(\mu L)$ является периодической, то характеристическое уравнение имеет бесконечное число собственных значений. При возрастании числа гармоник ($n \rightarrow \infty$) величина нормировочного коэффициента быстро сходится к своему пределу и при $n \geq 5$ (рис. 1) можно использовать

предельное значение $E_n \approx \sqrt{\frac{L}{2a}}$.

Это позволяет ограничиться конечным числом гармоник, исходя из удовлетворительной аппроксимации $T^*(x)$.

Пусть, например, заранее заданное распределение температуры по длине стержня имеет вид

$$T^*(x) = \begin{cases} T^x, & 0 \leq x \leq x_1, \\ T^x + (T^r - T^x)(x - x_1) / (x_2 - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ T^r, & x_2 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (14)$$

где T^x, T^r – температуры низко- и высокотемпературной зон; x_1, x_2 – координаты начала переходной и высокотемпературной зон. Весовая функция

в (1) для данной задачи определяется структурой модели (5) и равна $r(x) = 1/a$ [4].

Результаты прямого и обратного преобразования (14) при использовании различного числа гармоник представлены на рис. 2. Расчет показывает, что при $n=6-8$ максимальная погрешность преобразования наблюдается на торцах стержня и не превышает 1 К, а градиент температуры в переходной зоне практически совпадает с заранее заданным. Повышение числа гармоник точность преобразования не увеличивает.

Для нахождения закона управления используется метод динамического программирования при квадратичном критерии качества вида

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (\Delta T^T S \Delta T + \Delta u^T Q \Delta u) dt + \frac{1}{2} \Delta T^T(t_1) \Lambda \Delta T(t_1), \quad (15)$$

где S, Q, Λ – положительно определенные симметричные матрицы весовых коэффициентов.

Оптимальное управление находится из решения уравнения Риккати

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) + K(t)BQ^{-1}B^T K(t) - S = 0$$

с граничным условием

$$\psi(\Delta T, t_1) = \frac{1}{2} \Delta T^T(t_1) K(t_1) \Delta T(t_1).$$

Решение дифференциального уравнения Риккати дает возможность определить оптимальное управление в виде

$$\Delta u(t, \Delta T) = Q^{-1} B^T K(t) \Delta T(t).$$

Если $t_1 \rightarrow \infty$, а элементы матриц A, B, S, Q не зависят от времени, то матрица коэффициентов оптимального регулятора определяется из алгебраического уравнения Риккати [5]

$$KA + A^T K + KBQ^{-1}B^T K - S = 0,$$

а оптимальное управление рассчитывается по формуле

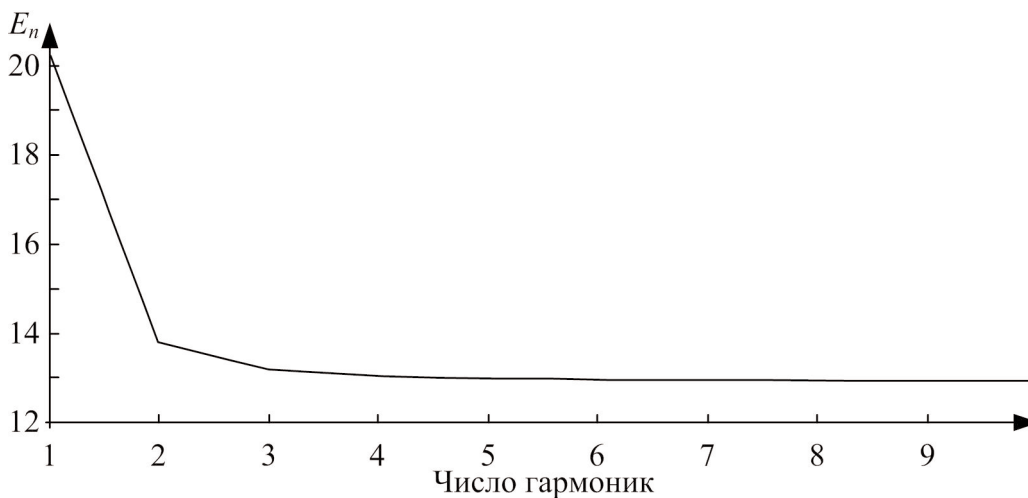


Рис. 1. Зависимость нормирующего множителя от числа гармоник

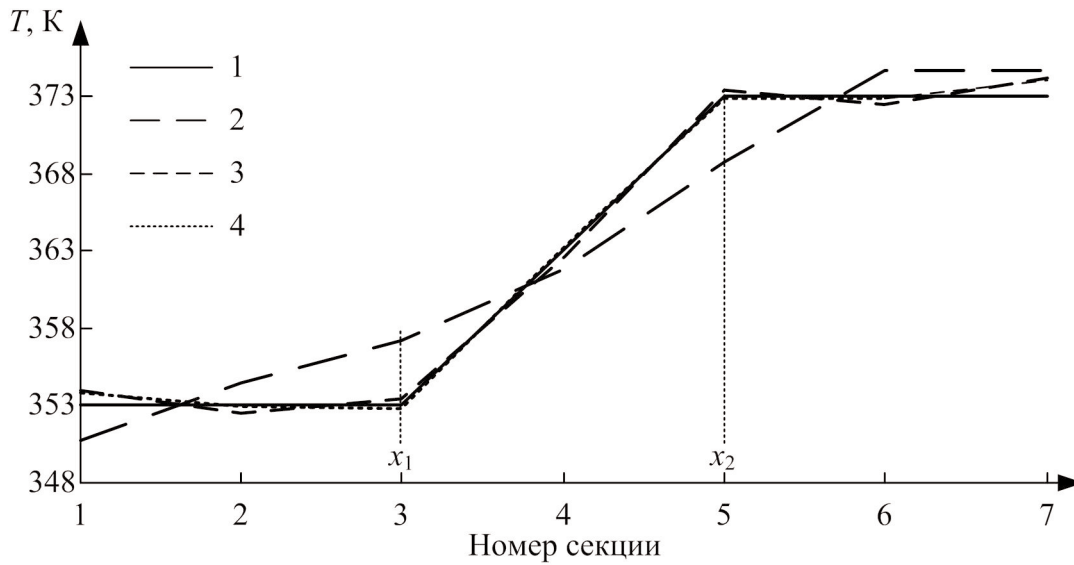


Рис. 2. Заданное и восстановленные распределения температур для различного числа гармоник. Обозначения: 1) T^* ; 2) $n=3$; 3) $n=7$; 4) $n=9$

$$\Delta u(t, \bar{\Delta T}) = Q^{-1} B^T K \Delta T(t) = P \Delta T(t).$$

Проверка предлагаемого подхода осуществлялась при единичных матрицах Q, S, Λ в пакете программ Simulink Matlab 7.7 для шестигранного стального стержня длиной 42 см и радиусом описанной окружности 0,7 см. Фрагмент структурной схемы системы оптимального управления приведен на рис. 3.

В табл. 1 приведены результаты стабилизации температурного поля стержня для различных значений коэффициентов матриц весовых коэффициентов в критерии качества (15).

Таблица 1. Уставки регуляторов и показания температур при реализации заданного распределения температуры, K, E – единичная матрица

Номер регулятора	1	2	3	4	5	6	7
T_i^*	353,00	353,00	353,00	363,00	373,00	373,00	373,00
$T_i (S=E, Q=E)$	352,50	352,62	352,87	362,56	372,26	372,50	372,34
$T_i (S=E, Q=0,1E)$	352,84	352,88	352,96	362,86	372,76	372,84	372,79
$T_i (S=E, Q=0,01E)$	352,95	352,96	352,99	362,96	372,93	372,95	372,93

Результаты расчетов показывают, что оптимальное управление с единичными весовыми матрица-

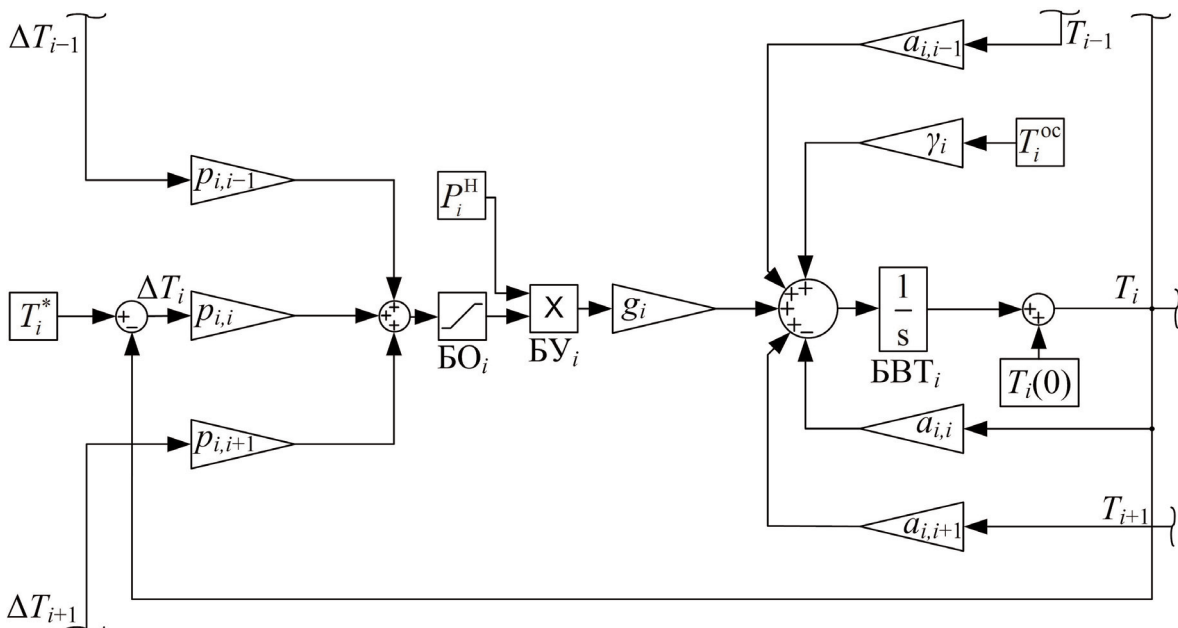


Рис. 3. Фрагмент структурной схемы системы управления. Обозначения: T_i^* – заданное значение температуры; БО – блок ограничения; БУ – блок умножения; БВТ – блок вычисления температуры; a_{ij}, g_i, γ_i – коэффициенты уравнений (12); p_{ij} – коэффициенты регуляторов

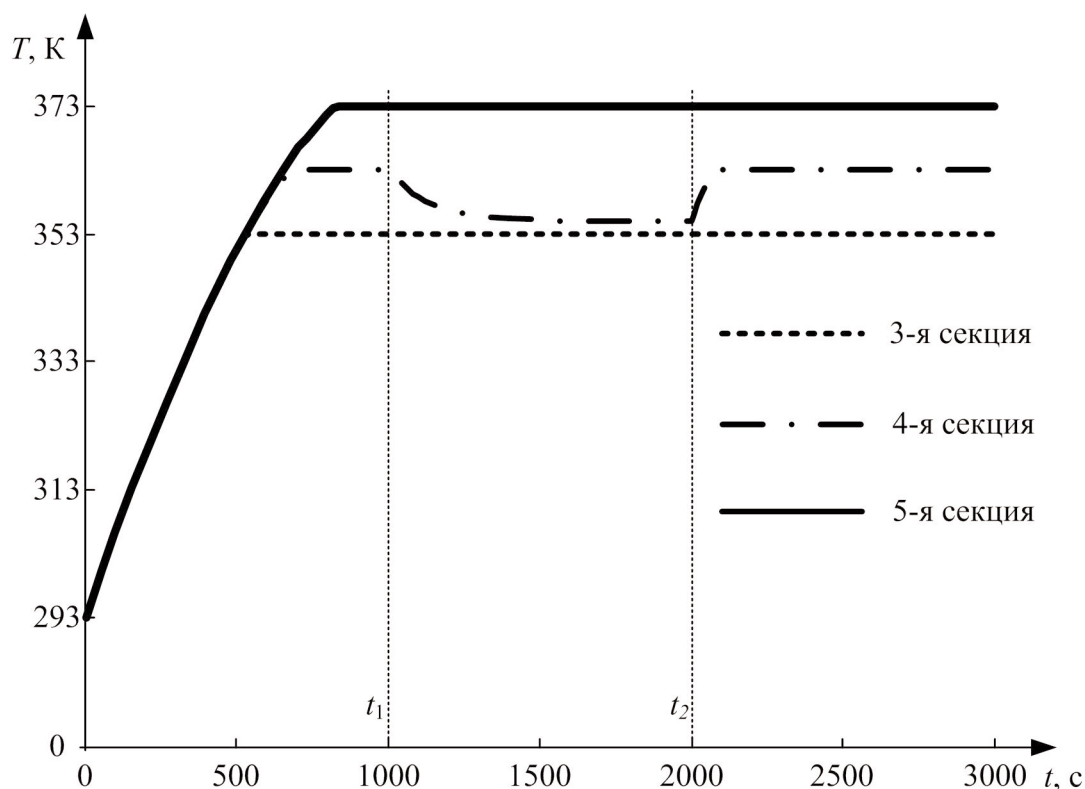


Рис. 4. Переходные процессы при отключении нагревателя центральной секции. t_1 , t_2 – время выключения и включения нагревателя

ми S и Q обеспечивает формирование заданного распределения температуры со средней ошибкой $\sim 0,48$ К. Уменьшение коэффициентов матрицы Q на два порядка приводит к уменьшению средней ошибки регулирования до $\sim 0,047$ К.

В табл. 2 представлены распределения потребляемых мощностей нагревателей для трех случаев: базовое состояние ($S=E$, $Q=E$) (a), повышение уставки центральной секции на 5 К (b), отключение нагревателя центральной секции (c).

Таблица 2. Распределения потребляемой мощности нагревателей, Вт

Номер регулятора	1	2	3	4	5	6	7
a	1,972	1,478	0,578	1,739	2,901	2,026	2,629
b	1,972	1,467	0,145	2,753	2,468	2,014	2,629
c	1,972	1,480	1,346	0,000	3,669	2,027	2,629

Расчеты показывают, что в базовом состоянии наблюдается пониженное потребление тепловой энергии третьего нагревателя, расположенного перед переходной зоной. Это вызвано нагревом третьей секции от центральной. Причем, повышение уставки температуры центральной секции усиливает этот эффект (распределение b). Отключение нагревателя центральной секции приводит к росту потребляемой мощности соседних нагревателей (распределение c). Следует отметить, что рассмотренные ситуации практически не оказывают

влияния на распределение температур и мощностей нагревателей в низкотемпературной и высокотемпературной зонах.

Из результатов расчета изменений температуры при переходных процессах, вызванных кратковременным (1000 с) выключением нагревателя центральной секции стержня (рис. 4) следует, что, несмотря на полное отключение, в месте ее расположения температура остается высокой, благодаря теплопроводности стержня и энергетической подпитки из соседних секций. Их температуры поддерживаются системой управления на заданном уровне.

Полученные результаты на модельном объекте планируется использовать для стабилизации температурного поля многозонных термических установок при выращивании кристаллов.

Выводы

1. Методом динамического программирования с использованием квадратичного критерия качества на основе конечно-разностной аппроксимации модели распределенного объекта управления найдена структура оптимальных регуляторов.
2. Точность стабилизации заданного температурного поля, полученная на модели распределенного объекта управления, зависит от весовых коэффициентов критерия качества и может достигать 0,05 % от установившегося значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов М.М., Бабушкин Ю.В., Грибенюков А.И., Гинсар В.Е. Система управления многозонной термической установкой для выращивания кристаллов по методу Бриджмена // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5. – С. 146–151.
2. Марков А.В. Выращивание монокристаллов арсенида галлия с высоким структурным совершенством методом вертикально направленной кристаллизации // Известия вузов. Материалы электронной техники. – 2006. – № 6. – С. 16–19.
3. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
4. Рапорт Э.Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 229 с.
5. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в приборах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.

Поступила 12.04.2011 г.

УДК 62-533.65+681.52

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ПОЛЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОБЪЕКТА

М.М. Филиппов, А.И. Грибенюков, Ю.В. Бабушкин*, В.А. Кочегуров*

Институт мониторинга климатических и экологических систем СО РАН, г. Томск

*Томский политехнический университет

E-mail: imces@yandex.ru

Рассмотрена задача стабилизации температурного поля объекта с распределенными параметрами с помощью системы модального управления, включающей программируемый контроллер, который производит анализ гармоник и выработку управляющих воздействий. На примере длинного стержня, с встроеными в него нагревателями показано, что точность стабилизации температурного поля, достигаемая рассмотренным методом, соизмерима с точностью системы управления на основе ПИД-регуляторов.

Ключевые слова:

Система с распределенными параметрами, модальное управление, стабилизация, температурное поле.

Key words:

Distributed parameters system, modal control, stabilization, thermal field.

В современной теории автоматического регулирования все большее внимание уделяется проблемам управления объектами с распределенными параметрами (ОРП). К настоящему времени получены теоретические результаты, позволяющие решать конкретные задачи оптимального управления в различных областях [1].

Интерес представляет использование разработанных теорий и для таких объектов, как многозонные термические установки для выращивания кристаллов [2], параметры которых распределены в пространстве. Однако, подбирать алгоритмы управления непосредственно на установке или ее модельном представлении не всегда возможно, поэтому в качестве модели объекта управления рассматривается упрощенный объект, например, стержень длиной L , характеризующийся одномерным распределением теплофизических свойств вдоль независимой пространственной переменной x и зависящим от времени распределением температуры $T(x,t)$ [3].

Целью работы является определение структуры и параметров регулятора для системы модального управления температурным полем стержня и сравнение возможностей стабилизации температурного поля с системой управления, включающей в контур управления независимые ПИД-регуляторы.

Модальное представление объекта управления в виде длинного стержня, математическая модель которого приведена в [3], записывается следующим образом

$$\frac{d\bar{T}_n(\mu_n, t)}{dt} = -(a\mu_n^2 + k)\bar{T}_n(\mu_n, t) + q_v \bar{u}_n(\mu_n, t) + k\bar{T}^{oc} + R(\mu_n), \quad (1)$$

$$\bar{T}_n(\mu_n, 0) = \bar{T}_0(\mu_n), \quad n = \overline{1, \infty},$$

где $\bar{T}(\mu, t) = \int_0^L T(x, t)\varphi(\mu, x)r(x)dx$ – конечное ин-

тегральное преобразование температуры; $\varphi(\mu, x)$ – ядро конечного интегрального преобразования, которое определяется в результате решения соответствующей задачи Штурма–Лиувилля; μ – параметр преобразования; $r(x)$ – весовая функция, зависящая от структуры математической модели объекта управления (для модели стержня $r(x)=a^{-1}$); $a, k, q_v, R(\mu_n)$ – коэффициенты, учитывающие теплопроводность стержня, теплоотдачу с поверхности стержня в окружающую среду, тепло, выделяемое источниками тепловыделения и граничные условия; $\bar{T}^{oc}, \bar{u}_n(\mu_n, t)$ – конечные интегральные преобразования температуры окружающей среды и управляющего воздействия.