УДК 536.24

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА ВДОЛЬ НЕОДНОРОДНОГО РЕБРА ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Ю.В. Видин, Р.В. Казаков

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
E-mail: roman.kazakov@list.ru

Показана возможность использования известных аналитических решений применительно к более сложным инженерным задачам. Так, при некоторых закономерностях изменения коэффициента теплопроводности материала вдоль стержня постоянного сечения расчет его температурного поля может быть проведен на основании математических зависимостей, полученных для однородных ребер переменного сечения.

Ключевые слова:
Ребро, теплопроводность, неоднородные материалы, поперечный профиль стержня, температурное поле.
Key words:
Rib, thermal conductivity, heterogeneous material, cross direction profile of the rod, thermal field.

Проблемы совершенствования процессов теплообмена актуальны для многих современных быстроразвивающихся областей техники.

Одним из эффективных способов интенсификации теплообмена является применение оребренных поверхностей. Аналитическим методам решения задачи о распределении температуры в ребрах посвящено значительное количество работ [1]. В основу многих решений положен ряд допущений, которые позволяют сравнительно простым математическим путем получить результаты, пригодные для инженерной практики. Одним из таких допущений является то, что материал исследуемого тела однороден (изотропен), т. е. коэффициент теплопроводности одинаков во всех направлениях и постоянен.

Целью данной работы является получение аналитического решения задачи распределения температуры вдоль ребер, изготовленных из материалов с переменным коэффициентом теплопроводности.

В предлагаемой статье рассматривается случай, когда этот коэффициент зависит некоторым образом от продольной координаты. В качестве примера проведем исследование стационарного процесса переноса теплоты вдоль неоднородного стержня постоянного поперечного сечения.

Тогда дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры по длине ребра, можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{d\vartheta}{dx}\right]-m^2\vartheta=0,\ \ 0\le x\le l, \tag{1}$$

где $\vartheta = T - T_Ж$ – избыточная температура ($T_Ж$ – постоянная температура среды); $0 \le x \le l$ – продольная координата ребра, l – длина ребра, м; $m=\sqrt{\dfrac{\alpha P}{\lambda_0 f}}$, м$^{-1}$; P, f – периметр и площадь поперечного сечения стержня; α – коэффициент теплоотдачи на боковой поверхности ребра, Вт/(м^{2}К); λ_0 – фиксированное значение коэффициента теплопроводности тела (в частности, в сечении, соответствующем началу координаты x=0), Вт/(м·К); $\varphi(x)$ – функция, характеризующая зависимость коэффициента теплопроводности от координаты x. Если стержень выполнен из однородного материала, то $\varphi(x) = 1$.

Уравнение (1) необходимо дополнить граничными условиями.

Примем, что в начальном сечении стержня температура поддерживается постоянной. Тогда при x=0:

$$\vartheta=\vartheta_0=(T_0-T_Ж). \tag{2}$$

Обычно теплоотдачей с торца стержня (x=l) допустимо пренебречь. Следовательно, второе граничное условие (при x=l) будет иметь вид:

$$\frac{d\vartheta}{dx}=0. \tag{3}$$

Если $\varphi(x) = 1$, то решение системы (1)–(3) имеет наиболее простой вид [1–3]

$$\vartheta=\vartheta_0\frac{\mathrm{ch}[m(l-x)]}{\mathrm{ch}(ml)}. \tag{4}$$

Выразить общее аналитическое решение задачи (1)–(3) для произвольной функции $\varphi(x)$ затруднительно. Однако для некоторых конкретных случаев такое решение удается получить.

Так, в частности, если $\varphi(x)$ является линейной зависимостью, т. е.

$$\varphi(x)=1-kx, \tag{5}$$

где сомножитель k при уменьшении коэффициента теплопроводности λ вдоль ребра должен удовлетворять условию

$$\frac{1}{l}>k>0,$$

при его же увеличении

$$-\infty<k<0.$$

Если k=0, то очевидно справедливо выражение (4).

Для варианта (5) уравнение (1) запишется как

$$\frac{d}{dx}\left[(1-kx)\frac{d\vartheta}{dx}\right]-m^2\vartheta=0. \tag{6}$$

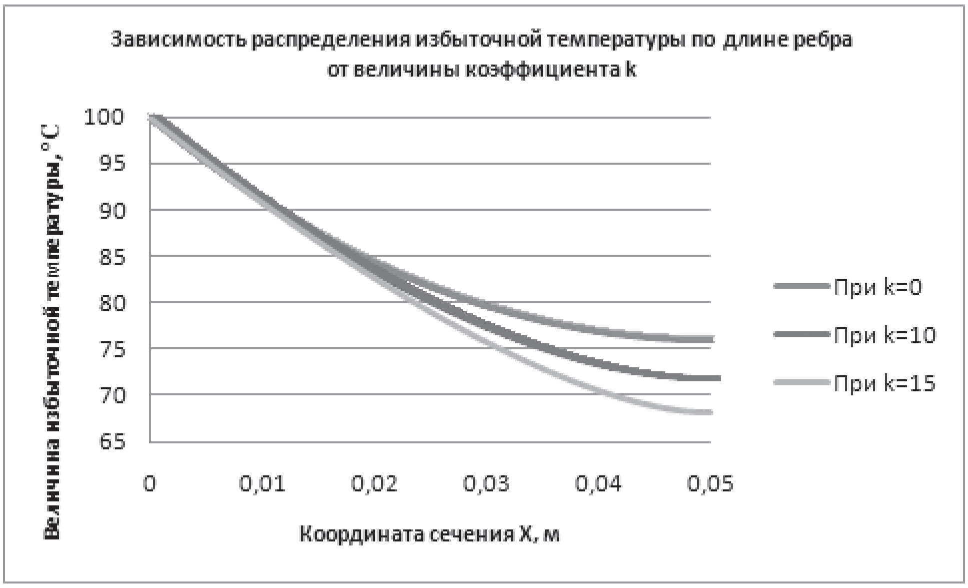

Рисунок. *Зависимость распределения избыточной температуры по длине ребра от величины коэффициента k*

Введем новую переменную

$$z = \frac{1}{k} - x. \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) приводится к виду

$$z\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + \frac{d\vartheta}{dz} - \frac{m^2}{k}\vartheta = 0. \tag{8}$$

Дифференциальное уравнение (8) есть модифицированное уравнение Бесселя, решение которого имеет вид

$$\vartheta = C_1 I_0\left(2m\sqrt{\frac{z}{k}}\right) + C_2 K_0\left(2m\sqrt{\frac{z}{k}}\right), \tag{9}$$

где I_0 и K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

После подстановки (7) в (9) получим

$$\vartheta = C_1 I_0\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kx}\right) + C_2 K_0\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kx}\right).$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из граничных условий (2) и (3)

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{K_1\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kl}\right)}{\left(\begin{array}{l} I_0\left(2\frac{m}{k}\right)K_1\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kl}\right) + \\ +K_0\left(2\frac{m}{k}\right)I_1\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kl}\right)\end{array}\right)},$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{I_1(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kl})}{\left(\begin{array}{l} I_0\left(2\frac{m}{k}\right)K_1\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kl}\right) + \\ +K_0\left(2\frac{m}{k}\right)I_1\left(2\frac{m}{k}\sqrt{1-kl}\right)\end{array}\right)}.$$

Тогда окончательно получим

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\left(\begin{array}{l} I_0(b\sqrt{1-kx})K_1(b\sqrt{1-kl}) + \\ +K_0(b\sqrt{1-kx})I_1(b\sqrt{1-kl})\end{array}\right)}{I_0(b)K_1(b\sqrt{1-kl}) + K_0(b)I_1(b\sqrt{1-kl})}, \tag{10}$$

где $b = 2\frac{m}{k}$.

На основании решения (10) можно найти избыточную температуру на вершине ребра ($x=l$)

$$\vartheta_{x=l} = \vartheta_0 \frac{\left(\begin{array}{l} I_0(b\sqrt{1-kl})K_1(b\sqrt{1-kl}) + \\ +K_0(b\sqrt{1-kl})I_1(b\sqrt{1-kl})\end{array}\right)}{I_0(b)K_1(b\sqrt{1-kl}) + K_0(b)I_1(b\sqrt{1-kl})}.$$

Учитывая, что комплекс

$$I_0(b\sqrt{1-kl})K_1(b\sqrt{1-kl}) + \\ +K_0(b\sqrt{1-kl})I_1(b\sqrt{1-kl}) = \frac{1}{b\sqrt{1-kl}},$$

соотношение (10) примет вид

$$\vartheta(x=l) = \frac{\vartheta_0}{b\sqrt{1-kl}} \times \\ \times[I_0(b)K_1(b\sqrt{1-kl}) + K_0(b)I_1(b\sqrt{1-kl})]^{-1}.$$

На рисунке изображены зависимости распределения избыточной температуры по длине ребра от величины коэффициента k. Расчет проводился по формуле (4) для $k=0$, и по формуле (10), для $k=10$ и 15 м$^{-1}$. Использовались значения $l=0,05$ м, $m=15,492$ м$^{-1}$, $\vartheta_0=100$ °С.

Следует отметить, что в [2] представлено аналитическое решение задачи о стационарном температурном поле в однородном ребре трапециевидного сечения, которое подобно формуле (10).

Выводы

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)\frac{d\vartheta}{dx}\right]-m^2\vartheta=0$$

можно рассматривать в качестве обобщенного уравнения стационарной теплопроводности продольных ребер произвольного профиля, выполненных как из однородных, так и из неоднородных материалов.

Аналитическое решение, полученное для задач переноса теплоты в ребрах переменного сечения и выполненных из материалов с постоянным коэффициентом теплопроводности, можно распространить на изучение температурных полей в ребрах с изменяющимися свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Керн Д., Краус А. Развитые поверхности теплообмена. – М.: Энергия, 1977. – 461 с.
2. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 486 с.
3. Видин Ю.В., Бойков Г.П., Колосов В.В., Ромащенко А.С. Краткий справочник по тепломассообмену. – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2007 – 169 с.

Поступила 10.03.2011 г.

УДК 519.635;532.546.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ СУШКЕ ДРЕВЕСИНЫ КОНДУКТИВНЫМ СПОСОБОМ В УСЛОВИЯХ ПОНИЖЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

М.В. Алексеев, Г.В. Кузнецов

Томский политехнический университет
E-mail: alexeeff_max@mail.ru

Сформулирована математическая модель тепломассопереноса в древесине при кондуктивном нагреве с использованием модели фронтального испарения влаги. Проведено численное исследование тепломассопереноса при сушке древесины кондуктивным способом в условиях пониженного давления окружающей среды. Проведен анализ влияния основных параметров технологического процесса на длительность сушки.

Ключевые слова:
Тепломассоперенос, испарение, кондуктивная сушка древесины, пониженное давление.
Key words:
Heat and mass-transfer, evaporation, conductive wood drying, underpressure.

Введение

Обязательной, самой длительной и энергозатратной операцией большинства технологических процессов деревообработки, обеспечивающей высокое качество продукции, является сушка древесины.

Любые технологии сушки сопряжены с большими затратами тепловой и электрической энергии [1, 2].

Одним из наиболее перспективных является кондуктивный способ сушки древесины при пониженном давлении [3]. До настоящего времени этот способ не применяется широко в связи с тем, что отсутствует математический аппарат для выбора технологических параметров рассматриваемого процесса, обеспечивающий его высокую эффективность. Выбирать экспериментально оптимальные технологические параметры такой сушки практически невозможно из-за большой длительности и энергозатратности рассматриваемого процесса, а также многовариантности набора условий внешних воздействий на древесину. Так, например, понижение давления в сушильной камере по результатам в значительной степени равноценно повышению температуры нагревательных элементов и наоборот. В этой связи создание математической модели, соответствующе описывающей процесс и позволяющей осуществлять оптимальный выбор технологических параметров, представляется весьма актуальной задачей, обуславливающей снижение энергозатрат на отработку технологии сушки. В настоящее время таких моделей и методов расчета технологических параметров рассматриваемого варианта процесса сушки нет.

Целью настоящей работы является математическое моделирование процесса кондуктивной сушки древесины в условиях пониженного давления с использованием модели фронтального испарения влаги.

Постановка задачи

Рассматривается пластина древесины, находящаяся между двумя нагревательными элементами (рис. 1). Ось OX является осью симметрии, поэтому можно рассматривать процесс в осимметричной