

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Общий случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 3. – С. 13–17.
2. Демин Н.С., Рожкова С.В. О структуре количества информации в совместной задаче фильтрации и интерполяции по наблюдениям с памятью. Условно-гауссовский случай // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 6–10.
3. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. – М.: Наука, 1984. – 205 с.
4. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 5–22.
5. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
6. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 8–96.
7. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Проблемы передачи информации. – 1974. – Т. 10. – № 4. – С. 3–15.
8. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.

Поступила 15.06.2011 г.

УДК 519.2

## ИНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ И ОБОБЩЕННОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. АНАЛИЗ

С.В. Рожкова, О.В. Рожкова

Томский политехнический университет  
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Исследуются свойства количеств информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и обобщенной экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью, касающиеся информационной эффективности наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти.

### Ключевые слова:

Сигнал, стохастические системы, экстраполяция, количество информации.

### Key words:

Signal, stochastic system, extrapolation, information amount.

### Введение

В [1] для систем калмановского типа была решена задача нахождения количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и обобщенной экстраполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью для общего и условно-гауссовского случаев. В данной работе рассматривается информационная эффективность дискретного канала наблюдения относительно дискретного канала без памяти для стационарного гауссовского марковского процесса диффузионного типа (процесс Орнштейна–Уленбека). Система обозначений та же, что и в [1].

### Информационная эффективность наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти

Представляет интерес вопрос об эффективности наблюдений с памятью в задаче экстраполяции, т. е. увеличивает или уменьшает количество информации наличие памяти. Данное исследование проведем для частного случая скалярных стационарных процессов  $x_t$ ,  $z_t$ ,  $\eta(t_m)$  определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} dx_t &= -ax_t dt + \sqrt{Q} dw_t, \quad a > 0, \quad p_0(x) = \mathbf{N}\{x; \mu_0, \gamma_0\}, \\ dz_t &= H_0 x_t dt + \sqrt{R} dv_t, \\ \eta(t_m) &= G_0 x_{t_m} + G_1 x_t + \sqrt{V} \xi(t_m), \end{aligned} \quad (1)$$

когда непрерывные наблюдения без памяти, дискретные наблюдения с памятью единичной кратности ( $N=1$ ,  $\tau_1=\tau$ ), процесс  $x_t$  является стационарным гауссовским марковским процессом диффузионного типа с корреляционной функцией  $K(\alpha)=[Q/2a]\exp\{-a|\alpha|\}$  и временем корреляции  $\alpha_k=1/a$ . Этот процесс, известный как процесс Орнштейна–Уленбека, широко используется как в технических приложениях для моделирования реальных процессов с корреляционной функцией экспоненциального типа [2], так и в финансовой математике для моделирования процесса изменения процентной ставки [3].

В качестве меры информационной эффективности наблюдений с памятью  $\eta(t_m)$  относительно наблюдений без памяти  $\tilde{\eta}(t_m)$ , когда  $G_1=0$  в задаче экстраполяции в случае может быть взята величина (см. (3.6), (3.8) в [1])

$\Delta^e = \Delta I_s^{in}[x_s; z_0^{in}, \eta(t_m)] - \Delta \tilde{I}_s^{in}[x_s; z_0^{in}, \eta(t_m)]$ ,  
 где  $\Delta I_s^{in}[x_s; z_0^{in}, \eta(t_m)]$  и  $\Delta \tilde{I}_s^{in}[x_s; z_0^{in}, \eta(t_m)]$  – приращения количества информации (3.30) в [1] при в моменты времени  $t_m$ , поступающие соответственно из наблюдений  $\eta(t_m)$  и  $\tilde{\eta}(t_m)$ . Рассматриваем случай редких дискретных наблюдений, когда на интервалах  $t \in (t_m, t_{m+1})$  решения дифференциальных уравнений для элементов матрицы  $\tilde{\Gamma}_3(\tau, t, s)$  достигают стационарных значений  $\gamma, \gamma_{01}(t^*), \gamma_{11}(t^*), \gamma^{11}(T), \gamma_0^1(T), \gamma_1^1(T)$ , определяемых формулами (3.19) из [4], где  $t^* = t - \tau$  и  $T = s - t$  являются соответственно глубиной памяти и интервалом экстраполяции. Тогда согласно (4.36) с использованием (2.28), (2.33) из [5]

$$\Delta^e = (1/2) \ln[\tilde{\gamma}^{11}(s, t_m) / \gamma^{11}(s, t_m)], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \gamma^{11}(s, t_m) = \\ & = \gamma^{11}(T) - \frac{[G_0 \gamma_0^1(T) + G_1 \gamma_1^1(t^*, T)]^2}{V + G_0^2 \gamma + G_1^2 \gamma_{11}(t^*) + 2G_0 G_1 \gamma_{01}(t^*)}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\tilde{\gamma}^{11}(s, t_m) = \gamma^{11}(T) - [G_0^2 \gamma_0^1(T) / (V + G_0^2 \gamma)]. \quad (3)$$

Относительно глубины памяти имеются две крайние ситуации: случай малой глубины, когда  $t^* \rightarrow 0$ , случай большой глубины, когда  $t^* \rightarrow \infty$ . Пусть  $\Delta_0^e = \lim_{t^* \rightarrow 0} \Delta^e$  и  $\Delta_\infty^e = \lim_{t^* \rightarrow \infty} \Delta^e$ . Из (1–3) следует

$$\Delta_0^e = (1/2) \ln[1/(1 - \rho_0)],$$

$$\Delta_\infty^e = (1/2) \ln[1/(1 + \rho_\infty)],$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{2aV\gamma^2(G_1^2 + 2G_0G_1) \exp\{-2aT\}}{\left\{ [V + \gamma(G_0 + G_1)^2] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{Q(V + \gamma G_0^2)(1 - \exp\{-2aT\}) +}{+2aV\gamma \exp\{-2aT\}} \right] \right\}}, \\ \rho_\infty &= \frac{2aG_0^2G_1^2\kappa\gamma^3 \exp\{-2aT\}}{\left\{ [V + \gamma(G_0^2 + \kappa G_1^2)] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{Q(V + \gamma G_0^2)(1 - \exp\{-2aT\}) +}{+2aV\gamma \exp\{-2aT\}} \right] \right\}}, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\gamma = (1/\delta)(\lambda - a)$ ,  $\delta = H_0^2/R$ ,  $\lambda = \sqrt{a^2 + \delta Q}$ ,  $\kappa = (\lambda + a)/2\lambda$ .

Исследование поведения  $\Delta^e(t^*)$  как функции глубины памяти  $t^*$  на основе (1–4) с использованием (3.19) из [4] дает следующий результат

**Утверждение.**

Пусть

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^+ \cup \mathbf{G}^- = \{(G_0, G_1) : G_1^2 + 2G_0G_1 \leq 0\}.$$

- 1) Если  $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$ , то  $\Delta^e(t^*)$  является монотонно убывающей функцией глубины памяти от значения  $\Delta_0^e > 0$  до значения  $\Delta_\infty^e < 0$ , обращаясь в ноль в точке  $t^* = t_e^*$ , для которой справедлива формула

$$\begin{aligned} Q = 1; \quad \delta = 1; \quad V = 1; \quad G_0 = 2; \quad G_1 = 1; \quad T = 0.1 \\ a_1 = 2; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = 0.2; \end{aligned}$$

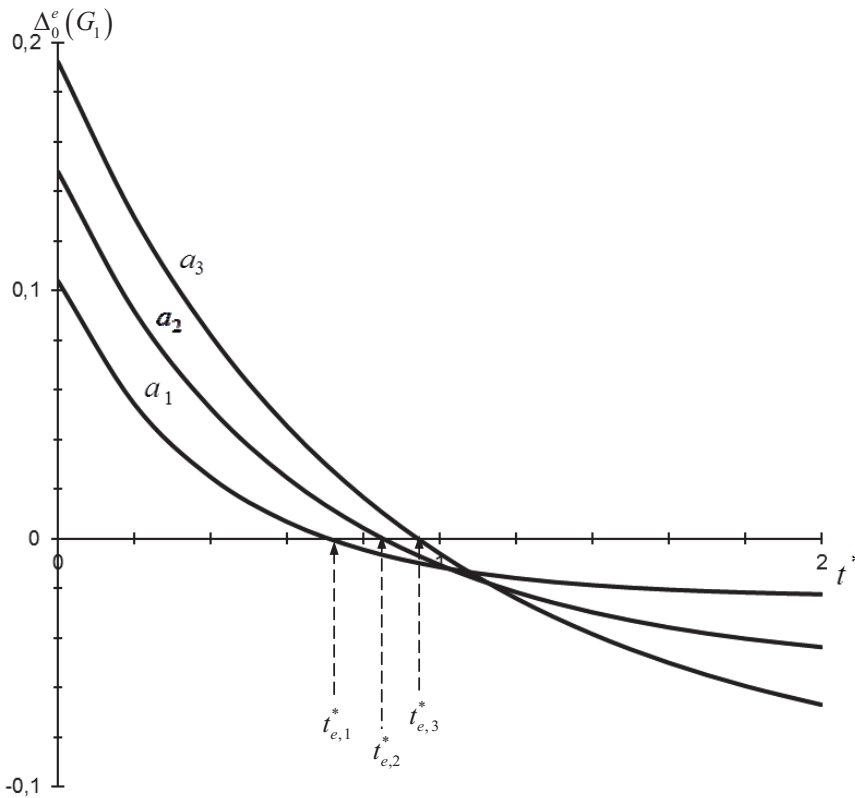


Рис. 1. Зависимости  $\Delta^e(t^*)$  от  $t^*$  при различных значениях  $a$

$$t_e^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{|G_1|(V + \kappa G_0^2 \gamma)}{|G_0|(\sqrt{V^2 + \kappa G_1^2 \gamma}(V + \kappa G_0^2 \gamma) \pm V)}, \quad (5)$$

где знак «-», если  $G_0 G_1 = |G_0| |G_1|$ , и знак «+», если  $G_0 G_1 = -|G_0| |G_1|$ , и которая может быть определена как эффективная глубина памяти.

2) Если  $(G_0, G_1) \in \mathbf{G}$ , то  $\Delta^e(t^*) \leq 0$  для всех  $t^* \geq 0$ .

Физическая интерпретация полученного результата заключается в следующем. В случае большой глубины памяти  $t^* \gg \alpha_k$ , где  $\alpha_k = 1/a$  есть время корреляции процесса  $x_t$ , что приводит к отсутствию корреляционных связей между  $x_t, x_{t_m}, x_s$ . Поэтому при больших  $t^*$  сигналы  $Y(\tau) = G_1 x_t$  не содержат взаимной информации о текущих  $x_{t_m}$  и о будущих значениях  $x_t$

процесса  $x_t$  и действует в канале с памятью как дополнительный шум, что приводит к уменьшению приращения количества информации по сравнению с каналом без памяти. Этим и объясняется  $\Delta_s^e < 0$  при любых значениях коэффициентов передачи  $G_0$  и  $G_1$ .

В случае малой глубины памяти, когда  $t^* \ll \alpha_k$ , коэффициент корреляции между значениями  $x_t$  и  $x_{t_m}$  близок к единице и поэтому сигналы  $Y(\tau, t_m) = G_0 x_{t_m} + G_1 x_t$  воспринимаются как  $Y(t_m) = (G_0 + G_1)x_{t_m}$ . Так как условия  $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$  означают  $|G_0 + G_1| > |G_1|$ , то интенсивность полезного сигнала  $Y(\tau, t_m)$  в канале с памятью оказывается выше интенсивности полезного сигнала  $G_0 x_{t_m}$  в канале без памяти, что и обеспечивает большую информативность  $Y(\tau, t_m)$  относительно  $G_0 x_{t_m}$ . Этим и объясняется свойство  $\Delta_s^e > 0$  в случае  $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$  и об-

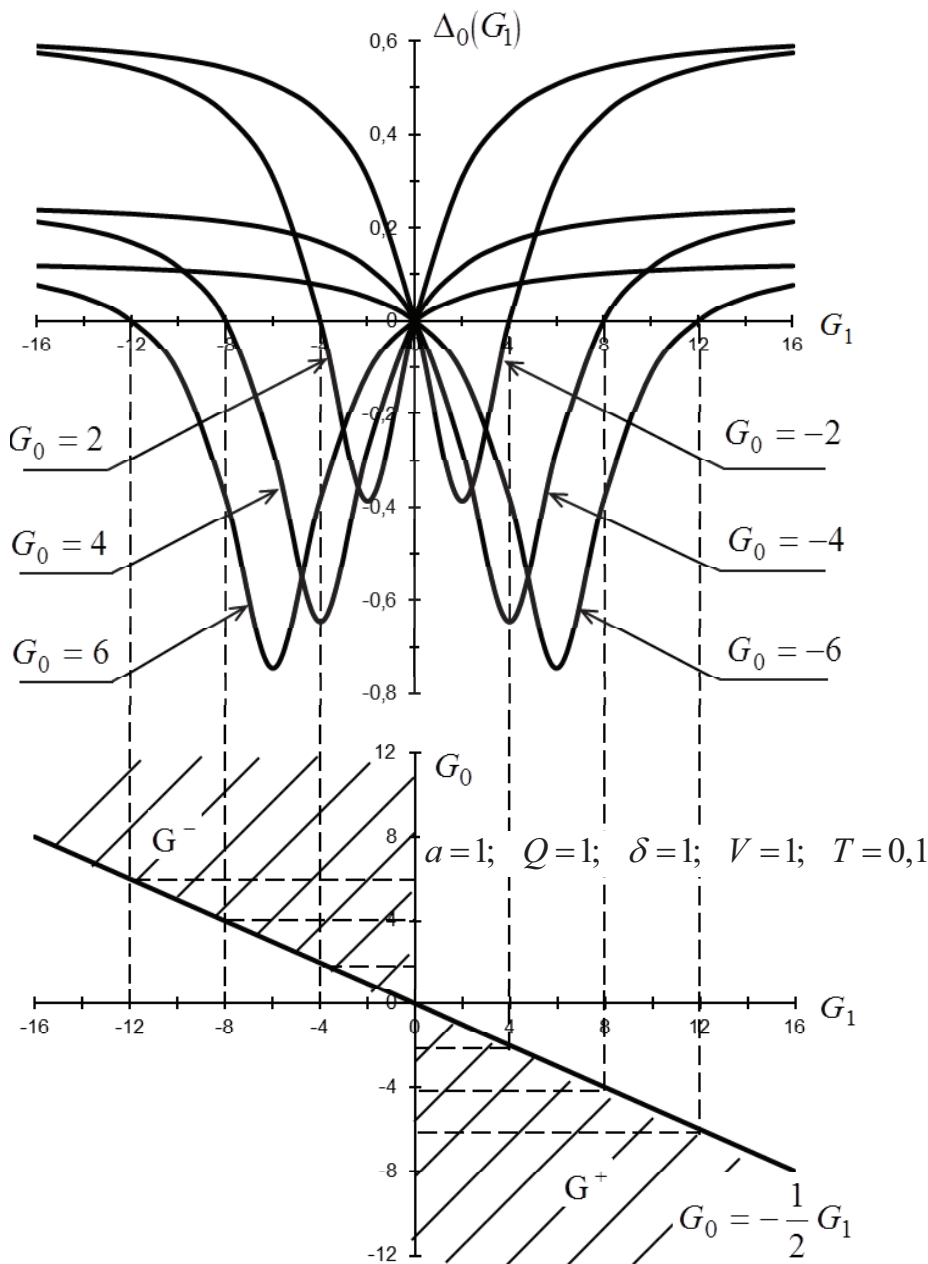


Рис. 2. Зависимости  $\Delta_0^e(G_0)$  от  $G_0$  при различных значениях  $G$

ратное свойство при выполнении противоположного условия. Условие  $(G_0, G_1) \notin \mathbf{G}$  является условием существования единственного корня уравнения

$$G_1^2(V + \kappa\gamma G_0^2) \exp\{-2\lambda t^*\} + 2VG_0G_1 \exp\{-\lambda t^*\} - \kappa\gamma G_0^2G_1^2 = 0, \quad (6)$$

к которому приводит условие  $\Delta^\epsilon(t^*)=0$  и решение которого имеет вид (5).

На рис. 1 приведено семейство по  $a$  кривых  $\Delta^\epsilon(t^*)$  при  $T=0,1$ , из которого видно, чем меньше  $a$ , т. е. больше  $\alpha_k=1/a$ , тем больше эффективная глубина памяти. Значения  $t_e^*$  на рис. 1 соответствуют

значениям, которые вычислены по формуле (5). Поскольку при малой глубине памяти поведение  $\Delta^\epsilon$  зависит от соотношения между  $G_0$  и  $G_1$ , то на рис. 2, 3 приведены соответственно семейства по  $G_1$  кривых  $\Delta_0^\epsilon(G_0)$  и по  $G_0$  кривых  $\Delta_0^\epsilon(G_1)$  при  $T=0,1$ . На рис. 4 изображены для рассмотренного примера траектории  $I_s[x_s; z_0', \eta_0^m]$  и  $\tilde{I}_s[x_s; z_0', \eta_0^m]$  соответственно для случаев наблюдений с памятью и без памяти, когда  $t < t_e^*$  и дискретные наблюдения начинаются с момента  $t_1$ , а на рис. 5 соответствующие траектории, когда  $t > t_e^*$ . Физическая интерпретация поведения кривых с учетом проведенного выше исследования очевидна.

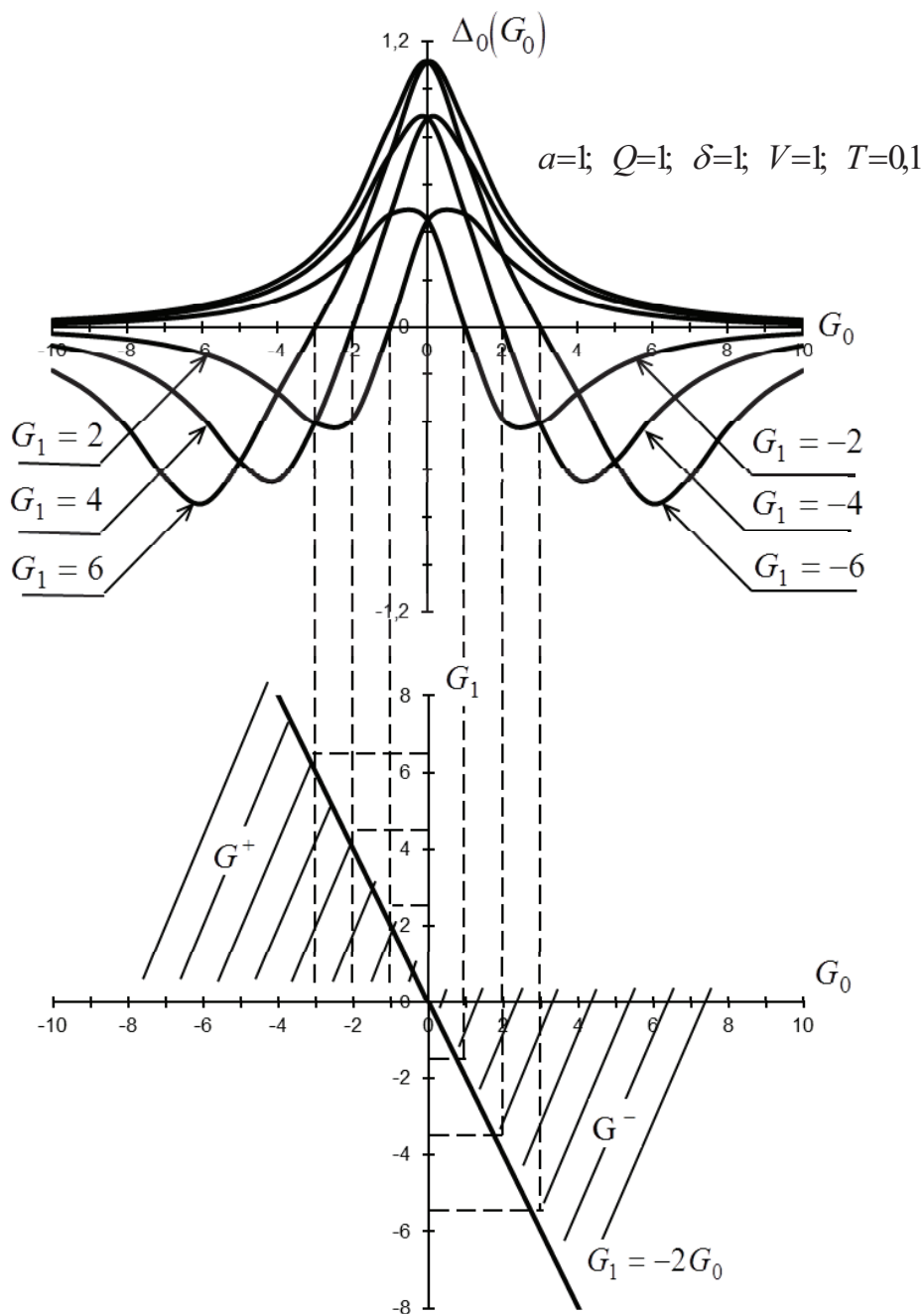


Рис. 3. Зависимости  $\Delta_0^\epsilon(G_1)$  от  $G_1$  при различных значениях  $G_0$

С ростом интервала экстраполяции, когда  $T \rightarrow \infty$ , из (1-3) следует, что  $\Delta^e \rightarrow 0$ . Этот эффект объясняется тем, что при  $s \gg t_m$  исчезают корреляционные связи между  $x_t, x_{t_m}, x_s$ . Поэтому, как в  $\eta(t_m)$ , так и в  $\tilde{\eta}(t_m)$  отсутствует полезная информация о будущих значениях  $x_s$ , т. е. в этом смысле они становятся информационно эквивалентными.

Влияние непрерывных наблюдений на информативность дискретных наблюдений осуществляется через параметр  $\delta = H_0^2/R$ , который пропорционален отношению сигнал/шум по интенсивности в непре-

рывном канале наблюдения. При  $\delta \rightarrow \infty$  получаем, что  $\delta \rightarrow \infty$   $I_s^{in}[x_s; z_0^{in}, \eta(t_m)] \rightarrow 0$  и  $\tilde{I}_s^{in}[x_s; z_0^{in}, \eta(t_m)] \rightarrow 0$ , что  $\Delta^e \rightarrow 0$ . Таким образом, при достижении абсолютно точного измерения в непрерывном канале дискретные наблюдения как с памятью, так и без памяти не привносят новой информации о значениях  $x_s$  при любых  $T$ . При  $\delta=0$ , что соответствует случаю отсутствия непрерывных наблюдений, справедливы формулы (1-5), в которых  $\gamma = Q/2a$ ,  $\lambda = a$ ,  $\kappa = 1$ , т. е. в этом случае появляется явная зависимость  $t_e^*$  от времени корреляции  $\alpha_k = 1/a$  процесса  $x_t$ .

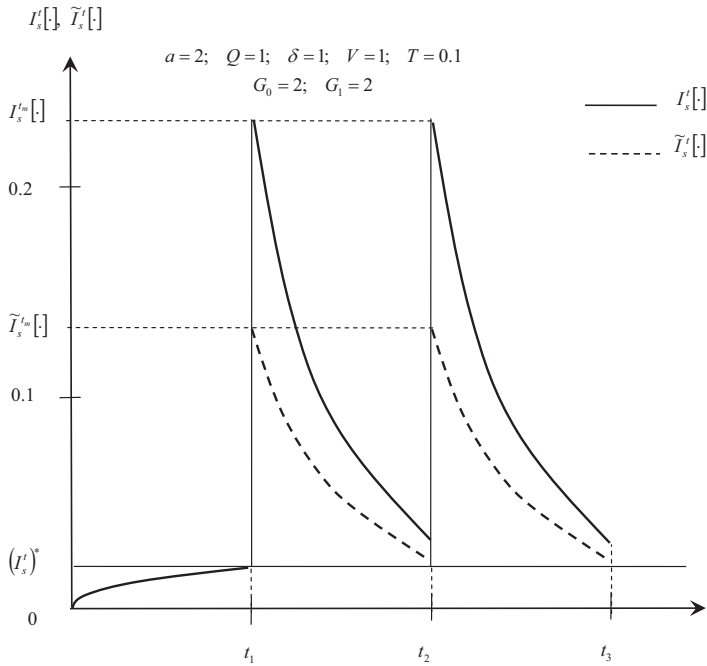


Рис. 4. Траектории  $I_s^{in}[\cdot], \tilde{I}_s^{in}[\cdot]$  для случаев наблюдений с памятью и без памяти при  $t < t_e^*$

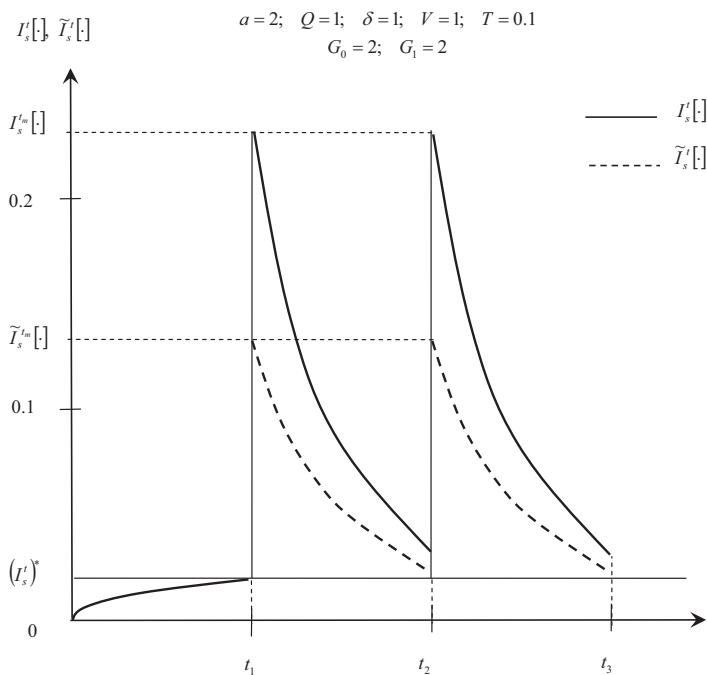


Рис. 5. Траектории  $I_s^{in}[\cdot], \tilde{I}_s^{in}[\cdot]$  для случаев наблюдений с памятью и без памяти при  $t > t_e^*$

Результаты работы могут быть использованы при исследовании таких базовых задач теории информации и теории передачи сообщений, как информационная эффективность каналов передачи и оптимальная передача (оптимальное кодирование и декодирование), когда в качестве математических моделей сообщений используются стохастические процессы диффузионного типа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatsiya. – 2004. – V. 15. – № 2. – P. 171–202.
2. Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. – М.: Наука, 1984. – 205 с.
3. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 5–22.

#### Выводы

Рассмотрен пример информационной эффективности наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти в задаче экстраполяции.

Показано, что наличие памяти в наблюдениях может как увеличивать, так и уменьшать количество информации.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., проект № 02.740.11.5190.*

4. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
5. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.

*Поступила 31.10.2011 г.*

УДК 621–52+511.92

## МНОГОМЕРНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА Д.К. ФАДДЕЕВА

А.Г. Аветисян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник)

E-mail: cybinf@seua.am

*Предложен метод определения коэффициентов-функций собственных многочленов и обратных матриц многопараметрических матриц на основе метода Д.К. Фаддеева и многомерных дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова. Представлен модельный пример и процедура нахождения коэффициентов-функций характеристического многочлена и обратной матрицы.*

#### Ключевые слова:

*Многомерные дифференциальные преобразования, собственный многочлен, коэффициенты-функции, обратная матрица.*

#### Key words:

*Multiparametrical matrices, multidimensional differential transforms, coefficient-functions of characteristic polynomials.*

#### Введение

Собственный многочлен автономной матрицы  $A=(a_{ij})$ ,  $i, j=1, m$  имеет вид

$$\det[A - \lambda E] = (-1)^m P(\lambda) = (-1)^m [\lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + p_2 \lambda^{m-2} + \dots + p_m] = 0,$$

где  $\lambda_i$ ,  $i=1, m$  – собственные числа матрицы, а  $p_i$ ,  $i=1, m$  – коэффициенты собственного многочлена, подлежащие определению.

Согласно методу Фаддеева [1], для решения этой задачи строится следующая цепочка последовательностей:

Шаг 1:  $A_1=A$ ,  $spA_1=p_1$ ,  $B_1=A_1-p_1E$ ;

Шаг 2:  $A_2=AB_1$ ,  $(1/2) spA_2=p_2$ ,  $B_2=A_2-p_2E$ ;

⋮

Шаг  $m-1$ :  $A_{m-1}=AB_{m-2}$ ,  $(1/(m-1)) spA_{m-1}=p_{m-1}$ ,

$B_{m-1}=A_{m-1}-p_{m-1}E$ ;

Шаг  $m$ :  $A_m=AB_{m-1}$ ,  $(1/m) spA_m=p_m$ ,  $B_m=A_m-p_mE$ ,

где  $sp$  – след соответствующей матрицы, а  $E$  – единичная матрица порядка  $m$ , причем  $B_m \equiv [0]$ , что является удобным контрольным условием правильности проведенных вычислений.

Кроме того, если  $\det A \neq 0$ , то обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{P_m} B_{m-1}.$$

#### Математический аппарат

Для вычисления собственного многочлена  $P(\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n))$  матрицы  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представим метод решения, предположив, что элементы  $a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i, j=1, m$  матрицы  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  обладают достаточной степенью гладкости по всем параметрам  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Для построения собственного многочлена неавтономной (однопараметрической) матрицы в [2, 3]