

Представленные варианты комбинированных оценок регрессии и результаты имитационного эксперимента позволяют утверждать, что у комбинированных оценок имеются широкие возможности совершенствования.

Результаты эксперимента показывают, что представленная комбинированная оценка регрессии со статистической оценкой весового коэффициента λ предпочтительнее, чем каждая из оценок

параметрической и непараметрической моделей. Их преимущества проявляются как при малых объемах выборок, так и при их интерполяции за пределы эксперимента ($N > 125$).

Результаты моделирования, представленные на рисунке, получены с помощью кластера Межрегионального вычислительного центра ТГУ СКИФ Cyberia (skif.tsu.ru). Автор выражает благодарность сотрудникам Центра за оказанную помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриев Ю.Г. Непараметрическое условное оценивание функционалов плотности распределения // Математическое моделирование и теория вероятностей / под ред. И.А. Александрова, А.М. Бубенчикова, В.Н. Берцуна, Ю.К. Устинова. – Томск: Изд-во «Пеленг», 1998. – С. 169–177.
2. Скрипин С.В. Свойства комбинированной оценки регрессии при конечных объемах выборок // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313. – № 5. – С. 10–14.
3. Скрипин С.В. Свойства комбинированной оценки в задаче классификации наблюдений // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 314. – № 5. – С. 21–26.
4. Скрипин С.В. О весовом коэффициенте в комбинированной оценке регрессии // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: Тезисы докл. VIII Росс. конф. с международным участием. – Томск, 5–8 октября 2010. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – С. 98–99.
5. Скрипин С.В. Комбинированная непараметрическая оценка регрессии // Вестник Томского государственного университета. – 2005. – Прил. № 14. – С. 311–313.
6. Дукарский О.М., Левит Б.Я. Некоторые применения непараметрических оценок регрессии // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях / Академия наук СССР, Центральный экономико-математический институт. Серия «Ученые записки по статистике». – М.: Наука, 1974. – Т. XXVI. – С. 31–37.
7. Надарая Э.А. Об оценке регрессии // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – Т. 9. – Вып. 1. – С. 147–149.

Поступила 12.04.2011 г.

УДК 65.012.122

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОТИПНЫМ РЕЗЕРВНЫМ ПРИБОРОМ

Л.И. Самочернова, Е.С. Петров

Томский политехнический университет
E-mail: evst@tpu.ru

Исследована система массового обслуживания с гистерезисной стратегией управления однотипным резервным прибором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Проведена оптимизация системы при учете потерь на ожидание и амортизацию.

Ключевые слова:

Система, обслуживание, время ожидания, амортизация, оптимальный момент.

Key words:

System, service, queuing time, depreciation, optimal moment.

Введение

В последние годы сфера приложений теории массового обслуживания расширилась благодаря бурному развитию вычислительных, телекоммуникационных и производственных систем. Управляемые системы массового обслуживания (УСМО) являются адекватными моделями многих реальных технических систем [1–9]. Значительное число работ посвящено изучению систем массового обслуживания (СМО), в которых моменты включения и выключения резервных приборов, интенсивность обслуживания зависят от числа заявок в си-

стеме или от длины очереди [1–4]. Однако существуют лишь отдельные работы, например [5–9], в которых изучены СМО с управлением по времени ожидания. В данной статье рассматривается УСМО, которая аналогична системе, изученной в [8], но с гистерезисной стратегией управления однотипным резервным прибором.

1. Описание системы

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с простейшим входящим потоком интенсивности λ , к которой может подключаться ре-

зервный прибор. Приборы однотипны, то есть обслуживание предполагается экспоненциальным с интенсивностью μ как для основного, так и для резервного приборов. Если заявка, находящаяся в некоторый момент времени t первой в очереди, поступила в систему в момент времени t_0 , то величину $s(t)=t-t_0$ будем называть текущим временем ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Дисциплина обслуживания резервным прибором следующая: как только s – текущее время ожидания заявки, находящейся в очереди первой, достигает величины s_1 ($s_1=\text{const}>0$), подключается резервный прибор и берет на обслуживание заявку, стоящую первой в очереди. После обслуживания одной заявки любой из двух приборов, окончивших обслуживание первым, выключается (т. е. становится резервным), если текущее время ожидания заявки, которая в этот момент времени находится первой в очереди $s < s_0$, но оба прибора продолжают обслуживание, если $s \geq s_0$ ($s_0 < s_1$). Отметим, что не различаются основной и резервный приборы (симметричность приборов). Необходимо найти такие оптимальные моменты включения и выключения резервного прибора, x_1^{opt} , x_0^{opt} , которые бы минимизировали средние суммарные потери такой системы в единицу времени.

Опишем СМО марковским случайным процессом с компонентами [8]: $\{s(t), v(t)\}$, где $v(t)$ – число работающих приборов в момент времени t . Особыми являются состояния системы: $\{v(t)=0\}$ (система пуста); $\{v(t)=1\}$ (очередь пуста, работает только один прибор); $\{v(t)=2\}$ (очередь пуста, работают оба прибора).

Будем рассматривать стационарный режим работы системы. Достаточным условием существования стационарного режима работы исследуемой СМО является условие [8]: $\lambda < 2\mu$.

Финальную плотность вероятностей $p(s, v)$ величины (s, v) обозначим через $p_i(s)$ в области $0 \leq s \leq s_0$, если $v(t)=1$; $p_2(s)$ в области $s_0 \leq s \leq s_1$, если $v(t)=1$; $p_3(s)$ в области $0 \leq s \leq s_0$, если $v(t)=2$; $p_4(s)$ в области $s_0 \leq s \leq s_1$, если $v(t)=2$; $p_5(s)$ в области $s \geq s_1$, для которой $v(t)=2$.

Аналогично тому, как это сделано в [8], получен явный вид функций $p_i(s)$, $i=1, 5$ и $\pi(v)$, $v=0, 1, 2$:

$$\left. \begin{aligned} p_1(s) &= \frac{\lambda^2 (\lambda - 2\mu)(\mu - \lambda)(\mu e^{\lambda s_0 + \mu s_1} - \lambda e^{\mu s_0 + \lambda s_1})}{\mu t} e^{(\lambda - \mu)s}, \\ p_2(s) &= \frac{(\lambda - \mu e^{(\lambda - \mu)s}) \lambda^2 e^{\lambda s_0 + \mu s_1} (\lambda - 2\mu)(\lambda - \mu)}{\mu t}, \\ p_3(s) &= \frac{\lambda^3 e^{\lambda(s+s_1)} (\lambda - 2\mu)(\lambda - \mu)^2}{2\mu^2 t}, \\ p_4(s) &= \frac{\lambda^3 (\lambda - \mu)^2 e^{\lambda s_1} (\lambda e^{(\lambda - 2\mu)s + 2\mu s_0} - 2\mu e^{\lambda s_0})}{2\mu^2 t}, \\ p_5(s) &= \frac{\lambda^3 (\lambda - \mu)^2 e^{(\lambda - 2\mu)s} (\lambda e^{2\mu s_0 + \lambda s_1} - 2\mu e^{\lambda s_0 + 2\mu s_1})}{2\mu^2 t}, \\ \pi(0) &= \frac{(\lambda - 2\mu)(\mu - \lambda)(\mu e^{\lambda s_0 + \mu s_1} - \lambda e^{\mu s_0 + \lambda s_1})}{t}, \\ \pi(1) &= \frac{\lambda(\lambda - 2\mu)(\mu - \lambda)(\mu e^{\lambda s_0 + \mu s_1} - \lambda e^{\mu s_0 + \lambda s_1})}{\mu t}, \\ \pi(2) &= \frac{\lambda^2 e^{\lambda s_1} (\lambda - \mu)^2 (\lambda - 2\mu)}{2\mu^2 t}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} m &= e^{\lambda s_0} \times \\ &\times [\lambda^2 e^{\lambda s_1} (\lambda - \mu)(\lambda s_0 - \lambda s_1 - 1) + \mu^2 e^{\mu s_1} (\lambda - 2\mu)] + \\ &+ \lambda \mu e^{\mu s_0 + \lambda s_1} (2\mu - \lambda), \quad \lambda \neq \mu. \end{aligned}$$

Если $\lambda = \mu$, то $p_i(s)$, $i=1, 5$, $\pi(v)$, $v=0, 1, 2$ имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} p_1(s) &= \frac{2\lambda}{m} [\lambda(s_0 - s_1) - 1], \\ p_2(s) &= \frac{2\lambda}{m} [\lambda(s - s_1) - 1], \\ p_3(s) &= -\frac{\lambda}{m} e^{\lambda(s-s_0)}, \\ p_4(s) &= \frac{\lambda}{m} (e^{\lambda(s_0-s)} - 2), \\ p_5(s) &= \frac{\lambda}{m} (e^{\lambda(s_0-s)} - 2e^{\lambda(s_1-s)}), \\ \pi(0) &= \frac{2}{m} [\lambda(s_0 - s_1) - 1], \\ \pi(1) &= \frac{2}{m} [\lambda(s_0 - s_1) - 1], \\ \pi(2) &= -\frac{e^{-\lambda s_0}}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $m = \lambda^2 s_0^2 + 6\lambda s_0 - \lambda^2 s_1^2 - 8\lambda s_1 - 6$.

2. Оптимизация системы

Рассмотрим случай, когда в СМО имеют место потери только двух видов.

А. Потери от ожидания заявок в очереди

Пусть потери от ожидания i заявок в единицу времени равны $F(i)$. Тогда среднее значение потерь на ожидание можно записать в виде:

$$\begin{aligned} L_1(s_0, s_1) &= M[F(i)] = \int_0^{s_0} \tilde{F}(s) [p_1(s) + p_3(s)] ds + \\ &+ \int_{s_0}^{s_1} \tilde{F}(s) [p_2(s) + p_4(s)] ds + \int_{s_1}^{\infty} \tilde{F}(s) p_5(s) ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\tilde{F}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} F(i) \frac{(\lambda s)^{i-1} e^{-\lambda s}}{(i-1)!}.$$

В частности, если $F(i) = D_1 i$, то $F(s) = D_1 (\lambda s + 1)$, где D_1 – положительная константа, имеющая смысл потерь от ожидания одной заявки в единицу времени.

Б. Потери на амортизацию резервного прибора

Будем считать, что работа резервного прибора приводит к потерям в единицу времени, равным D_2 ($D_2 = \text{const} > 0$). Тогда среднее значение потерь на амортизацию резервного прибора в единицу времени имеет вид

$$L_2(s_0, s_1) = D_2 \left[\pi(2) + \int_0^{s_0} p_3(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} p_4(s) ds + \int_{s_1}^{\infty} p_5(s) ds \right]. \quad (4)$$

Таким образом, с учетом (3) и (4) средние суммарные потери системы массового обслуживания в единицу времени примут вид:

$$\begin{aligned} L(s_0, s_1) &= L_1(s_0, s_1) + L_2(s_0, s_1) = \\ &= \int_0^{s_0} \tilde{F}(s) [p_1(s) + p_3(s)] ds + \\ &+ \int_{s_0}^{s_1} \tilde{F}(s) [p_2(s) + p_4(s)] ds + \int_{s_1}^{\infty} \tilde{F}(s) p_5(s) ds + \\ &+ D_2 [\pi(2) + \int_0^{s_0} p_3(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} p_4(s) ds + \int_{s_1}^{\infty} p_5(s) ds], \end{aligned} \quad (5)$$

где $p_i(s)$, $i=\overline{1,5}$ и $\pi(2)$ для значений $\lambda \neq \mu$ и $\lambda = \mu$ имеют, соответственно, вид (1) и (2).

Задача оптимизации такой системы массового обслуживания сводится к нахождению таких моментов s_0^{opt} , s_1^{opt} , которые минимизируют функцию потерь (5). Эта задача решена численно.

Частный случай

Рассмотрим СМО, в которой потери от ожидания описываются функцией потерь, линейно зависящей от числа заявок в системе $F(i) = D_1 i$, где D_1 – потери от ожидания одной заявки в единицу времени. Тогда средние суммарные потери системы в единицу времени имеют вид

$$\begin{aligned} L(s_0, s_1) &= L_1(s_0, s_1) + L_2(s_0, s_1) = \\ &= D_1 \left[\int_0^{s_0} (\lambda s + 1) [p_1(s) + p_3(s)] ds + \right. \\ &+ \int_{s_0}^{s_1} (\lambda s + 1) [p_2(s) + p_4(s)] ds + \left. \int_{s_1}^{\infty} (\lambda s + 1) p_5(s) ds \right] + \\ &+ D_2 \left[\pi(2) + \int_0^{s_0} p_3(s) ds + \int_{s_0}^{s_1} p_4(s) ds + \int_{s_1}^{\infty} p_5(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя в (6) к безразмерным величинам $\omega = \mu/\lambda$, $x_0 = \lambda s_0$, $x_1 = \lambda s_1$, учитывая (1) и (2), запишем функцию потерь (6) в виде:

$$\tilde{L}(x_0, x_1) = D_1 \tilde{E}(x_0, x_1) + D_2 \tilde{K}(x_0, x_1), \quad (7)$$

где при $\omega \neq 1$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x_0, x_1) &= \tilde{E}_1(x_0, x_1) + \tilde{E}_2(x_0, x_1) + \\ &+ \tilde{E}_3(x_0, x_1) + \tilde{E}_4(x_0, x_1) + \tilde{E}_5(x_0, x_1); \\ \tilde{E}_1(x_0, x_1) &= \frac{(1-2\omega)}{\omega(\omega-1)\tilde{m}} \times \\ &\times (\omega e^{x_0+\omega x_1} - e^{\omega x_0+x_1}) \{ e^{(1-\omega)x_0} [x_0(1-\omega) - \omega] + \omega \}, \\ \tilde{E}_2(x_0, x_1) &= \frac{(1-2\omega)}{2\omega(\omega-1)\tilde{m}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \{ 2\omega e^{x_0+x_1\omega} [e^{(1-\omega)x_0} (\omega x_0 - x_0 + \omega) - \\ &- e^{(1-\omega)x_1} (\omega x_1 - x_1 + \omega)] + \\ &+ e^{x_0+x_1} (x_0 - x_1)(\omega - 1)^2 (x_0 + x_1 + 2) \}, \\ \tilde{E}_3(x_0, x_1) &= \frac{x_0 e^{x_0+x_1} (\omega - 1)^2 (1 - 2\omega)}{2\omega^2 \tilde{m}}, \\ \tilde{E}_4(x_0, x_1) &= \frac{(\omega - 1)^2}{2\omega^2 (1 - 2\omega)^2 \tilde{m}} \times \\ &\times \{ e^{2\omega x_0+x_1} [e^{(1-2\omega)x_0} (2\omega x_0 - x_0 + 2\omega) - \\ &- e^{(1-2\omega)x_1} (2\omega x_1 - x_1 + 2\omega)] + \\ &+ \omega(1-2\omega)^2 (x_0 - x_1)(x_0 + x_1 + 2) \}, \\ \tilde{E}_5(x_0, x_1) &= \\ &= \frac{\left((\omega - 1)^2 e^{(1-2\omega)x_1} \times \right. \\ &\times (e^{2\omega x_0+x_1} - 2\omega e^{x_0+2\omega x_1}) (2\omega - (1-2\omega)x_1) \left. \right)}{2\omega^2 (1 - 2\omega)^2 \tilde{m}}, \\ \tilde{K}(x_0, x_1) &= \frac{(1-\omega)^2}{2\omega^2 (1 - 2\omega) \tilde{m}} \times \\ &\times \{ (1-2\omega)^2 e^{x_0+x_1} + e^{x_1} [e^{2x_0\omega} (e^{(1-2\omega)x_1} - e^{(1-2\omega)x_0}) - \\ &- 2\omega(1-2\omega)e^{x_0} (x_1 - x_0)] - \\ &- e^{(1-2\omega)x_1} (e^{2\omega x_0+x_1} - 2\omega e^{x_0+2\omega x_1}) \}, \\ \tilde{m} &= e^{x_0} (e^{x_1} (1-\omega)(x_0 - x_1 - 1) + \\ &+ \omega^2 (1-2\omega)e^{\omega x_1}) + \omega(2\omega - 1)e^{\omega x_0+x_1}, \end{aligned}$$

а при $\omega = 1$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x_0, x_1) &= \frac{x_1^3 - x_0^3 - 6x_0^2 - 6x_0 + 9x_1^2 + 18x_1 + 6}{3\tilde{m}}, \\ \tilde{K}(x_0, x_1) &= \frac{2(x_1 - x_0 + 1)}{\tilde{m}}, \\ \tilde{m} &= x_1^2 - x_0^2 - 6x_0 + 8x_1 + 6. \end{aligned}$$

Аналитически решить задачу нахождения оптимальных моментов x_1^{opt} , x_0^{opt} , включения и выключения резервного прибора, которые минимизируют функцию потерь (7), не удалось. Задача оптимизации рассматриваемой УСМО решена численно. В таблице приведены значения оптимальных моментов x_1^{opt} , x_0^{opt} , минимизирующих функцию потерь (7), если $\omega = 1$, $\omega = 2$ для некоторых значений $T = D_1/D_2$.

Таблица. Оптимальные моменты x_1^{opt} , x_0^{opt} при варьировании $T = D_1/D_2$

T	ω	x_0^{opt}	x_1^{opt}
0,0001	1	111,0952	162,8803
0,0100	1	8,2454	12,9809
0,1000	1	1,3059	1,3608
10000	1	0	0
0,0001	2	1,9015	13,1303
0,0100	2	1,8548	12,9244
0,1000	2	0,6068	4,8370
10000	2	0	0

Полученные результаты могут быть использованы при оптимизации систем, где важна не длина очереди, а время ожидания заявок в очереди.

Выводы

1. Изучена гистерезисная стратегия управления однопоточным, симметричным резервным при-

бором, управляемым по текущему времени ожидания заявки, находящейся первой в очереди. Получен явный вид функции потерь при различных значениях входных параметров.

2. Проведена оптимизация системы при учете потерь на ожидание и амортизацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко И.Н. О СМО со скоростью обслуживания, зависящей от числа требований в системе, и периодическим отключением каналов // Проблемы передачи информации. – 1971. – Вып. 7. – № 2. – С. 106–111.
2. Поттосина С.А. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания, функционирующая в случайной среде // В кн.: Управляемые системы массового обслуживания / под ред. А.Ф. Терпугова. – Томск: Изд-во ТГУ, 1984. – С. 100–105.
3. Горцев А.М., Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Управление и адаптация в системах массового обслуживания. – Томск: Изд-во ТГУ, 1978. – 208 с.
4. Горцев А.М., Катаева С.С. Оптимизация гистерезисного управления резервным каналом в вычислительной системе с двумя ЭВМ // Техника средств связи. Сер. Системы связи. – 1990. – Вып. 7. – С. 3–8.
5. Зиновьева Л.И., Терпугов А.Ф. Однолинейная система массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 1. – С. 27–30.
6. Самочернова Л.И. Оптимизация системы массового обслуживания с переменной интенсивностью, зависящей от времени ожидания // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – Т. 315. – № 5. – С. 178–182.
7. Исследование двух однолинейных СМО с интенсивностью обслуживания, зависящей от времени ожидания / Самочернова Л.И.; Том. политехн. ун-т. – Томск, 2009. – 9 с. – Библиогр: 7 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 29.10.2009, № 659 – В 2009.
8. Самочернова Л.И. Оптимизация системы массового обслуживания с резервным прибором с управлением, зависящим от времени ожидания // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – № 5. – С. 94–97.
9. Самочернова Л.И. Переходной режим работы двухуровневой СМО // Дни науки: Сб. матер. научно-практ. конф. преподавателей и студентов. Вып. 8. Ч. 2 / Отв. ред. А.А. Маслак. – Славянск на Кубани: Издат. центр СГПИ, 2009. – С. 62–68.

Поступила 20.06.2011 г.

УДК 004.94

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ОЦЕНКИ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Ал.В. Погребной

Томский политехнический университет
E-mail: pogrebnoy@tpu.ru

Вводится понятие компактного множества объектов распределенной системы и предлагается эффективный алгоритм формирования таких множеств. На основе компактных множеств предложено два способа определения нижней границы оценки компактности топологического разбиения. Приводится пример работы программного средства, реализующего алгоритм определения нижней границы разбиения.

Ключевые слова:

Компактное разбиение, компактное множество, оценка компактности, топологический центр множества, нижняя граница разбиения.

Key words:

Compact partition, compact set, estimate the compactness, topological center of the set, lower limit of partition.

Постановка задачи

В работах [1, 2] предложен алгоритм разбиения совокупности объектов Q (терминальных точек) распределенной системы, расположенных на ограниченной территории (топологическом поле), на заданное число множеств $Q_j, j=1, 2, \dots, m$, каждое из которых содержит равное число объектов. Расположение объектов $q_i \in Q, j=1, 2, \dots, n$ на топологи-

ческом поле задается координатами. Критерием разбиения является минимальная суммарная компактность множеств Q_j , входящих в w -й вариант разбиения $\{Q_j\}_w, w \in W$. Компактность множества Q_j оценивается величиной R_j , равной сумме расстояний от объекта $q_i \in Q_j$ до топологического центра расположения множества Q_j на топологическом поле. В ряде случаев наряду с оценкой R_j использу-