

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

Ю.В. Пятаков, В.И. Исаев*

Воронежский государственный университет инженерных технологий

*Томский политехнический университет

E-mail: pyatakovjv@mail.ru

Приведен аналитический обзор методов решения прямых задач гравиметрии. Аппроксимация распределения плотности выполняется набором элементарных тел, имеющих геометрическую форму и заданный закон изменения плотности. Сформулированы требования к оптимальным алгоритмам решения прямых задач и даны рекомендации по их реализации.

Ключевые слова:

Прямые задачи гравиметрии, элементарные тела, закон изменения плотности, оптимальные алгоритмы.

Key words:

Direct gravity problem, the elementary body, the variation of density, optimal algorithms.

Введение

В проблеме развития теории интерпретации геофизических полей важнейшее место принадлежит совершенствованию и развитию методов решения прямых задач.

Решение прямых задач – это определение соответствующих элементов поля по заданным пространственным распределениям физических параметров, характеризующих определенные свойства изучаемой геологической среды (плотность, намагниченность, теплопроводность и др.).

Использование этих методов позволяет учесть влияния геологических тел с известными петроплотностными и геометрическими параметрами, осуществлять последующий морфологический анализ вычисленных компонент полей, а также решать обратные задачи с использованием методов моделирования.

Задание источников поля должно осуществляться исходя из ряда требований. С одной стороны, оно должно обладать хорошими аппроксимационными свойствами, позволяющими наиболее адекватно описывать строение реальных геологических тел и структур. С другой стороны, оно должно обеспечивать высокую скорость вычислений при требуемой точности решения прямой задачи. Требование быстродействия и точности алгоритмов решения прямых задач приобретает первостепенное значение, поскольку их последовательное многократное решение лежит в основе одного из ведущих методов количественной интерпретации – метода подбора. Метод автоматизированного подбора, несмотря на использование регуляризованных алгоритмов, может характеризоваться неустойчивостью результатов, что влечет за собой повышенные требования к точности исходных данных и погрешностям вычислений.

В настоящей статье рассматриваются постановки и методы решения прямых задач гравиметрии для типовых аппроксимирующих элементов, а также ряд аспектов, связанных с построением оптимальных алгоритмов их численной реализации.

Постановка прямых задач

Двухмерные задачи гравиметрии. В качестве типового аппроксимирующего элемента в двухмерных задачах удобно использовать трапеции с вертикальными боковыми сторонами и произвольно ориентированными (прямолинейными) верхним и нижним основаниями (рис. 1), а также трапеции, верхнее и нижнее основания которых представлены сегментами парабол (рис. 2).

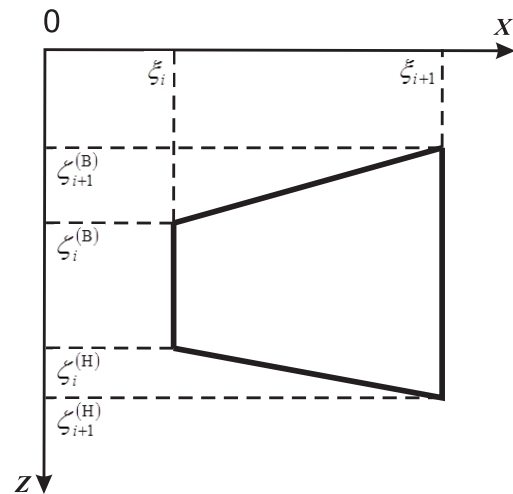


Рис. 1. Трапеция с вертикальными боковыми сторонами и произвольно расположенными прямолинейными верхним (В) и нижним (Н) основаниями. Условные обозначения и пояснения здесь и далее в тексте

Под прямой задачей гравиметрии для рассматриваемых тел понимается задача определения вертикальной составляющей гравитационного потенциала, выражение для которой имеет вид:

$$V_z(x, z) = 2f \iint_S \rho(\xi, \zeta) \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta,$$

где x и z – координаты точки расчета; f – константа гравитации; ξ и ζ – переменные интегрирования; S – область интегрирования; $\rho(\xi, \zeta)$ – распределение плотности.

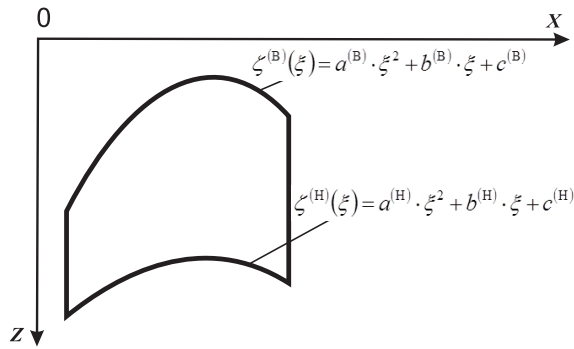


Рис. 2. Трапеция с параболическими верхним и нижним основаниями

Часто отдельные геологические образования полагают однородными по плотности (т. е. $\rho(\xi, \zeta) = \text{const}$), а весь моделируемый объем среды представляется набором кусочно-однородных, различающихся по плотности аппроксимирующих тел.

Вместе с тем, известно, что плотность разновозрастных осадочных пород, вследствие постседиментационных процессов, увеличивается с глубиной. Зависимость плотности осадков от глубины наиболее адекватно описывается зависимостями вида [1, 2]:

$$\rho(\zeta) = B_0 - B_1 \exp(-B_2 \zeta), \quad (1)$$

где B_0 – минеральная (максимальная) плотность отложений; B_1 – характеризует плотность уплотненных осадков, а B_2 – интенсивность воздействия фактора геологического времени.

В случае, когда интервалы изменения глубин отдельных геоблоков невелики, рационально вместо экспоненциального закона (1) использовать его линейную аппроксимацию:

$$\rho(\zeta) = \rho_0 + k \zeta, \quad (2)$$

где ρ_0 – значение плотности на уровне $\zeta=0$; k – вертикальный градиент плотности.

Для трапеции на рис. 1 можно полагать, что плотность меняется вдоль вертикального направления по (1) или (2) законам, а для трапеции, представленной на рис. 2 – плотность меняется по закону (2).

Трёхмерные задачи гравиметрии. При решении трехмерных задач в качестве аппроксимирующих тел удобно использовать вертикальные треугольные призмы (рис. 3) с произвольными верхним и нижним основаниями. Плотность в теле может меняться вдоль вертикальной координаты по экспоненциальному (1) или линейному (2) законам.

Выражение для вертикальной составляющей гравитационного потенциала имеет вид:

$$V_z(x, y, z) = f \iiint_D \rho(\zeta) \frac{(\zeta - z)}{P^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

где x, y, z – координаты точки расчета; ξ, η, ζ – переменные интегрирования; D – вертикальная треугольная призма (рис. 3); $\rho(\zeta)$ – распределение плотности;

$$P = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

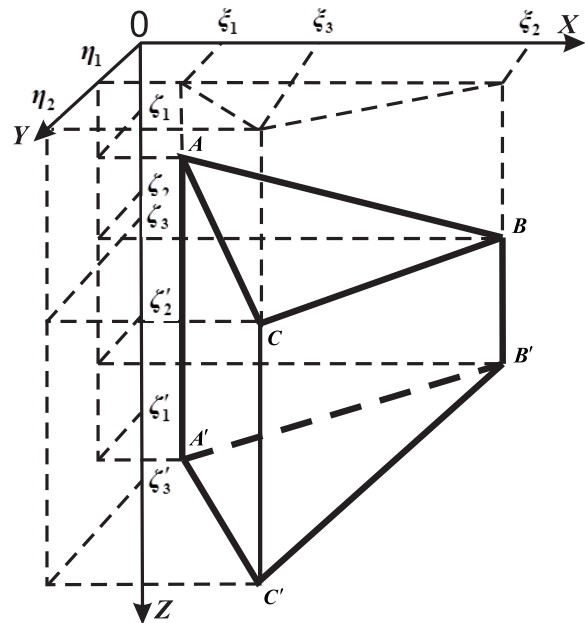


Рис. 3. Вертикальная треугольная призма

При построении моделей крупных геологических объектов, когда необходимо учитывать сферичность Земли, в качестве элементов аппроксимации удобно использовать сферические аппроксимирующие тела [3–5]: многогранник (рис. 4) и треугольная призма (рис. 5).

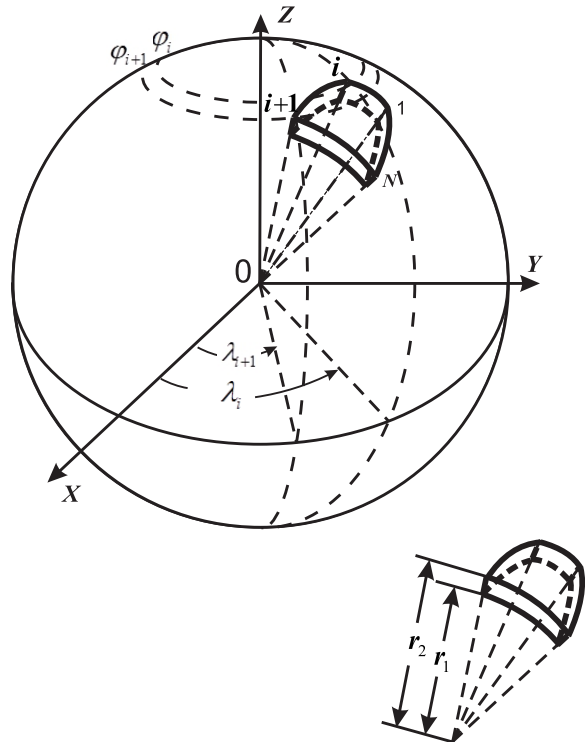


Рис. 4. Сферический многогранник

Определение сферического многогранника. В сферической системе координат $\Sigma_{\text{сф}}(0; r; \varphi; \lambda)$ выделяется тело (рис. 4), имеющее $2 \times N$ вершин λ, φ . N вершин тела расположены на сфере радиуса r_2 и имеют координаты $r_2, \varphi_i, \lambda_i; i=1, 2, \dots, N$, а остальные N вершин тела расположены на сфере радиуса r_1 ($r_1 < r_2$) и имеют координаты $r_1, \varphi_i, \lambda_i; i=1, 2, \dots, N$.

Каждая боковая грань тела лежит в плоскости большого круга, проведенного через смежные вершины $r_2, \varphi_i, \lambda_i; r_2, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ и начало системы координат.

Верхняя и нижняя грани тела образованы соответствующими сегментами сфер радиусов r_2 и r_1 — сферическими многоугольниками. Каждая сторона (ребро) верхней (нижней) грани представляет собой дугу большого круга, соединяющую смежные вершины $r_2, \varphi_i, \lambda_i; r_2, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$ и $r_1, \varphi_i, \lambda_i; r_1, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1}$. Боковые ребра тела представлены отрезками прямых, соединяющих вершины с координатами $r_1, \varphi_i, \lambda_i$ и $r_2, \varphi_i, \lambda_i$. Определенное таким образом тело будем называть сферическим многогранником.

Определение сферической треугольной призмы. В сферической системе координат $\Sigma_{\text{сф}}(0; r; \varphi; \lambda)$ выделяется тело (рис. 5), имеющее вершины с координатами $(r_1^a, \varphi_1, \lambda_1), (r_1^b, \varphi_1, \lambda_1), (r_2^b, \varphi_2, \lambda_2), (r_2^a, \varphi_2, \lambda_2), (r_3^a, \varphi_3, \lambda_3), (r_3^b, \varphi_3, \lambda_3)$. Каждая боковая грань тела лежит в плоскости большого круга, проведенного через смежные вершины $(r_i^a, \varphi_i, \lambda_i); (r_{i+1}^a, \varphi_{i+1}, \lambda_{i+1})$ и начало системы координат.

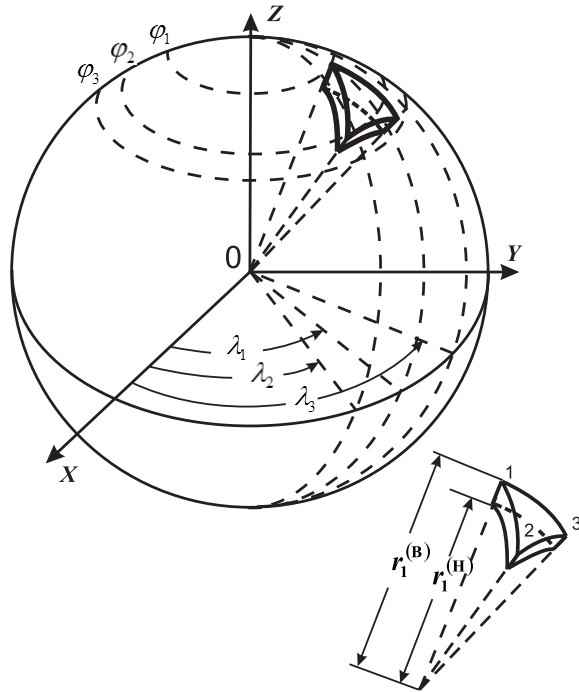


Рис. 5. Сферическая треугольная призма

Уравнение для верхней грани имеет вид:

$$r^{(\hat{a})}(\varphi, \lambda) = a^{(\hat{a})}\varphi + b^{(\hat{a})}\lambda + c^{(\hat{a})}.$$

Соответственно нижняя грань описывается уравнением:

$$r^{(i)}(\varphi, \lambda) = a^{(i)}\varphi + b^{(i)}\lambda + c^{(i)}.$$

Плотность выделенных сферических тел полагается постоянной.

Под прямой задачей для рассматриваемых сферических тел понимается определение радиальной составляющей гравитационного потенциала:

$$V_r(R, \varphi_0, \lambda_0) = \int_D f \rho \iint (R - r \cos \omega) P^{-3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\lambda. \quad (3)$$

Здесь R, φ_0, λ_0 — координаты точки расчета поля в сферической системе координат; r, φ, λ — переменные интегрирования; ρ — плотность сферического тела D ; ω — угол при центре сферы между направлениями на точки R, φ_0, λ_0 и r, φ, λ , соответственно;

$$P^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \omega,$$

$$\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda).$$

Алгоритмы решения прямых задач гравиметрии

Создание эффективных методов решения прямых задач — одна из фундаментальных задач теории интерпретации гравитационных полей и ее решению посвящено множество работ.

Идея аппроксимации геологической среды с помощью трапеций с произвольными верхним и нижним основаниями принадлежит Г.Я. Голиздре [6]. В.И. Старостенко и А.Н. Заворотко [7] приводят аналитические выражения для компонент поля от трапеции с постоянной плотностью.

Алгоритмы решения прямых задач для тел с экспоненциальной плотностью можно подразделить на приближенные и точные (аналитические). Приближенные алгоритмы приведены в работах [8–10]. Т.В. Балк с соавторами [8] гравитационный эффект определили путем аппроксимации тела набором полосок, плотность в пределах каждой полоски полагая постоянной и равной значению экспоненты (1) в центре полоски, а гравитационный эффект вычислили как сумму гравитационных эффектов полосок. В [9, 10] тело также разбивалось системой полосок. R. Murthy и B. Rao [9] использовали линейную аппроксимацию экспоненты, позже B. Rao [10] — квадратическую.

В работах [11–13] получены аналитические решения для двумерных тел (многоугольников [11] и трапеций [12, 13]) с линейной и экспоненциальной плотностью. Ю.В. Пятаковым [12, 13] приведены результаты тестирования и дан анализ полученных выражений в особых точках. Аналитическое решение [12] позволило в явном виде определить выражения для частных производных матрицы Якоби при решении обратной нелинейной задачи. В.И. Старостенко и его учениками [14] выполнена математическая постановка и дано решение обратной нелинейной задачи гравиметрии для сред с экспоненциальной зависимостью плотность-глубина.

В.Н. Страховым [11] получено аналитическое решение прямой задачи гравиметрии для многоугольников с криволинейными сторонами, частным случаем которых является параболическая трапеция (рис. 2).

Аналитические решения прямой трехмерной задачи для многогранников и призм с линейной, а также полиномиальной плотностью приводились в работах [15–17]. Ю.В. Пятаковым и В.И. Исаевым [18] получено и исследовано решение прямой трехмерной задачи для произвольного многогранника с экспоненциально изменяющейся с глубиной плотностью.

Алгоритмы решения прямых задач гравиметрии для сферических тел приведены в работах [3–5]. В.И. Старостенко и А.Г. Манукяном [3] получено решение задачи для прямоугольного параллелепипеда, В.Ю. Косыгиным с соавторами [4] – для сферического многогранника, а В.И. Старостенко и О.В. Легостаевой [5] рассмотрен алгоритм решения задачи для сферической призмы с произвольными верхним и нижним основаниями. Интегралы (3) для данных аппроксимирующих тел не выражаются в аналитическом виде. Для их приближенного вычисления использованы квадратурные формулы Гаусса–Лежандра.

Понятие оптимальных алгоритмов решения прямых задач

Прямые задачи гравиметрии являются классическими и восходят к XIX в. [19]. Для некоторых тел выведены десятки принципиально идентичных, но различающихся по виду вычислительных формул. При этом, одни из формул оказываются чересчур громоздкими и неудобными для программирования на ЭВМ, другие позволяют вычислять поле не во всех внешних по отношению к телу точках, третьи – более универсальны, однако требуют при реализации повышенной точности представления чисел.

В.Н. Страховым [20] были сформулированы основные требования к алгоритмам решения прямых задач: *точность*, *быстродействие* и *устойчивость*. Результаты вычислительных экспериментов [17] позволяют уверенно конкретизировать суть этих требований.

Суть первого требования состоит в том, что вычислительный алгоритм должен обеспечивать изначально заданную *точность* решения. Поскольку любые вычисления происходят с конечным числом значащих цифр, то существуют ошибки округления. Поэтому, результат, полученный даже по точной аналитической формуле, будет содержать некоторые ошибки, т. е. будет приближенным. В некоторых случаях такие ошибки могут достигать значительных величин и тем самым приводить к неверным результатам. Чтобы избежать этого, необходим анализ ошибок округления и анализ используемой численной схемы.

Требование *быстродействия* предполагает, что время решения прямой задачи с заданной точностью должно быть минимальным. Несомненно, что максимальную точность и быстродействие удаётся получить в тех случаях, когда для элементов полей оказывается возможным получить явные аналитические выражения в элементарных трансцендентных функциях. Таким образом, проблемы аналитического и точного численного решения прямых задач оказываются взаимосвязанными.

У термина *устойчивость* для прямой задачи своя специфика. Смысл его раскрывается следующим образом. Существует множество точек пространства, в которых расчеты по аналитическим выражениям без их предварительного анализа невозможны. Вычисляемые величины, входящие в выражения для решения, могут обращаться в бесконечность или претерпевать разрыв, вместе с тем результат должен быть непрерывной функцией. В точках, близких к указанному, так называемому множеству устранимых особых точек, точность вычислений может падать.

Для трехмерных тел в виде однородных многогранников множеством устранимых особых точек является его остов (совокупность ребер и вершин). Аналитическое решение прямых задач гравиметрии для данных тел может быть представлено совокупностью элементарных и трансцендентных функций (логарифмическими и обратными тригонометрическими функциями). Устранимые особенности порождаются логарифмическими функциями, поэтому в работах [19, 21] даны представления их аргументов, позволяющие избежать вычислительной неустойчивости, возникающей при расчетах. В этих же работах рекомендовано использование в качестве обратных тригонометрических функций – функции $\arctg$ и разработана рациональная процедура, обеспечивающая повышение быстродействия вычислительных алгоритмов.

Для сферических трехмерных тел вычислительный алгоритм решения прямой задачи целесообразно строить с использованием квадратурных формул Гаусса–Лежандра, которые обладают наивысшей степенью точности при заданном количестве узлов интегрирования. Для сферического многогранника (рис. 4) интегрирование выражения (3) *предлагаем выполнить по двум переменным r , φ , что позволяет строить эффективные в плане быстродействия и устойчивости алгоритмы*. Сферическая треугольная призма (рис. 5) обладает более универсальными аппроксимационными свойствами (верхняя и нижняя грани этого тела произвольны). Однако аналитическое интегрирование (3) в этом случае можно выполнить только по одной переменной и для численного решения задачи приходится строить кубатурный вычислительный процесс. Для улучшения сходимости вычислительного процесса в точках, лежащих в непосредственной близости к аппроксимирующему телу, *предлагаем использовать метод аддитивного выделения особенностей*.

Особенности реализации алгоритмов решений прямых задач

Использование базовых операций FPU. В состав процессоров обычно входит блок операций с плавающей точкой (FPU — Floating-Point Unit), реализующий программно-аппаратную обработку вещественных чисел. Эти устройства в десятки и сотни раз увеличивают скорость выполнения арифметических операций с числами с плавающей точкой. Кроме того, они содержат значения ряда констант и могут выполнять трансцендентные операции.

Оптимальную программную реализацию алгоритмов решения прямых задач *предлагаем* выполнять с использованием средств языка Ассемблер, поскольку он позволяет осуществить наиболее эффективное применение необходимых базовых команд FPU [22].

Для вычисления обратных тригонометрических функций в алгоритмах *предлагаем* использовать команду FRATAN [23]. Данная команда имеет два аргумента x и y и вычисляет значение функции $\arctg(x/y)$. Результат команды имеет тот же знак, что и операнд x . Время выполнения команды соответствует времени выполнения трех арифметических операций деления.

Для расчета логарифмических функций *предлагаем* использовать команду FYL2X, которая вычисляет выражение вида: $y \log_2(x)$. Пользуясь результатом выполнения этой команды, можно вычислить значение логарифмов по любому основанию.

Помимо операции FYL2X, в блоке FPU имеется команда FYL2XP1, вычисляющая выражение $y \log_2(x+1)$ при условии: $|x| < 1 - 1/\sqrt{2}$. Команда FYL2XP1 обеспечивает высокую точность вычисления логарифмов, когда их аргументы находятся вблизи единицы. В алгоритмах решения прямых задач такая ситуация возникает в тех случаях, когда расчетная точка находится на больших удалениях от аппроксимирующего элемента и возможны потери точности общего решения из-за погрешности вычислений.

Использование технологий параллельного программирования. Расчетные схемы в задачах интерпретации с использованием алгоритмов решений прямых задач обычно организованы по типу вложенных циклических процедур — внешний цикл по точкам расчетной сети системы наблюдений, вложенные циклы — по аппроксимирующим элементам и т. д. При этом одна итерация цикла не зависит от результатов выполнения других итераций. Такие алгоритмические конструкции удобны для реализации в них стандарта OpenMP, позволяющего более полно использовать вычислительные ресурсы многоядерных процессоров [24].

Обсуждение и выводы

Если геологическая структура имеет существенную вытянутость, то можно допустить, что вблизи эпицентра компонента аномального поля, направленная вдоль простираения структуры, отсутствует. К таким структурам относятся ряд рудных и нефтяных объектов. Моделирование гравитационного поля в этом случае *целесообразно* выполнять с помощью двумерных аппроксимирующих тел — трапеций.

Если наблюдения проводятся на поисковой площади с линейными размерами порядка десятков и первых сотен км, то направления нормалей к поверхности геоида можно считать практически одинаковыми. Измеренная гравитационная аномалия в этом случае будет представлять собой аномалию вертикальной составляющей гравитационного поля. Для моделирования таких объектов *целесообразно* использовать вертикальные треугольные призмы.

При решении региональных задач, когда изучаемые структуры имеют протяженность порядка тысячи километров и более, необходимо учитывать сферичность Земли и в качестве аппроксимирующих элементов использовать сферические тела. Сферический многогранник *целесообразно* использовать для интерпретации данных морских и спутниковых измерений, а сферическую треугольную призму — для данных наземной съемки.

К числу оптимальных алгоритмов, реализующих решение прямых задач для трехмерных тел в виде многогранников, следует отнести отмеченные в настоящей статье алгоритмы В.Н. Страхова. Для сферических тел оптимально использование схемы решения, данное в работах В.И. Старостенко.

Программную реализацию алгоритмов решения прямых задач *рекомендуем* осуществлять с учетом специфических особенностей архитектуры современных вычислительных средств и технологий программирования. В алгоритмах, реализующих квадратурные вычислительные процессы, *рекомендуем* использование методов аддитивного выделения особенностей, позволяющих обеспечить устойчивость и быстродействие численных методов.

Авторы статьи занимаются построением и компьютерной реализацией алгоритмов решения задач определения составляющих гравитационного, магнитного, температурного полей, а также распределения скоростей движения и напряжений неоднородных сред. Концептуально принимается, что теория решения трехмерных задач математической физики допускает *универсальное использование методов теории потенциалов и многомерных интегральных уравнений для построения алгоритмов эффективного численного решения прямых задач весьма разных по физическому смыслу*. Такой концептуальный подход и результаты его реализации будут приведены в следующей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Исаев В.И., Косыгин В.Ю., Лобова Г.А., Пятаков Ю.В. Интерпретация данных высокоточной гравиразведки. Вертикальный градиент плотности // Известия Томского политехнического университета. — 2011. — Т. 319. — № 1. — С. 83–90.
- Исаев В.И., Старостенко В.И. Оценка нефтегазоматеринского потенциала осадочных бассейнов Дальневосточного региона по данным гравиметрии и геотермии // Геофизический журнал. — 2004. — Т. 26. — № 2. — С. 46–61.
- Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Физика Земли. — 1983. — № 12. — С. 34–50.
- Kosygin V.Yu., Pyatakov Yu.V., Krasikov V.N. Direct Gravity Problem for a Spherical Polyhedron // Geology of Pacific Ocean. — 1997. — V. 13. — P. 857–868.
- Старостенко В.И., Легостаева О.В. Прямая задача гравиметрии для неоднородной произвольно усеченной вертикальной прямоугольной призмы // Физика Земли. — 1998. — № 12. — С. 31–44.
- Голизра Г.Я. Решение прямой задачи гравиметрии для трехмерных масс // Материалы геофизических исследований на Украине. — Киев: Наукова думка, 1972. — С. 54–66.
- Старостенко В.И., Заворотко А.Н. Методика и результаты применения регуляризирующего алгоритма при решении обратной нелинейной задачи гравиметрии // Геофиз. сб. АН УССР. — 1976. — Вып. 71. — С. 29–40.
- Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк П.И., Турутанов Е.Х. О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным (на примере впадин Байкальской рифтовой зоны) // Физика Земли. — 1988. — № 3. — С. 81–86.
- Murthy R., Rao B. Gravity anomalies of two-dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth // Geophysics. — 1979. — V. 44. — № 9. — P. 1525–1530.
- Rao B. Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast // Geophysics. — 1986. — V. 84. — № 1. — P. 207–212.
- Страхов В.Н. К теории логарифмического потенциала при переменной плотности возмущающих масс // Физика Земли. — 1975. — № 12. — С. 64–81.
- Пятаков Ю.В. Решение прямой задачи гравиметрии для неоднородных сред // Геофизический журнал. — 1991. — Т. 13. — № 5. — С. 79–85.
- Pyatakov Yu.V., Isaev V.I. Solution of an Inverse Linear 2-D Gravitometric Problem for Sedimentary Cross-Sections // Geophys. J. — 1997. — V. 16. — P. 393–406.
- Старостенко В.И., Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Решение обратной задачи гравиметрии для контактов осадочных пород // Геофизический журнал. — 1993. — Т. 15. — № 1. — С. 62–71.
- Миненко П.А. Моделирование подземных гравитационных аномалий в Кривбассе // Доклады АН УССР. Серия Б. — 1979. — № 9. — С. 704–709.
- Кравцов Г.Г. Аналитическое представление внутреннего и внешнего полей притяжения тел с переменной плотностью, ограниченных поверхностями первого порядка // Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. — Киев: Наукова думка, 1981. — С. 105–112.
- Исаев В.И., Пятаков Ю.В. Решение прямой задачи гравиметрии для трёхмерных блоково-градиентно-слоистых сред // Геофизический журнал. — 1990. — Т. 12. — № 3. — С. 72–79.
- Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Решение прямой задачи гравиметрии для произвольного многогранника с экспоненциально изменяющейся с глубиной плотностью // Геофизический журнал. — 1995. — Т. 17. — № 6. — С. 40–50.
- Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. — Киев: Наукова думка, 1983. — С. 3–87.
- Страхов В.Н. О проблеме решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии для материального стержня с полиномиальной плотностью // Геофизический журнал. — 1985. — Т. 7. — № 5. — С. 3–9.
- Страхов В.Н., Лапина М.Н. Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для однородных многогранников // Геофизический журнал. — 1986. — Т. 8. — № 6. — С. 20–31.
- Магда Ю.С. Использование ассемблера для оптимизации программ на C++. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 496 с.
- Григорьев В.Л. Микропроцессор i486. Книги 2,3,4. — М.: ГРАНАЛ, 1993. — 382 с.
- Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. — М.: Изд-во МГУ, 2009. — 77 с.

Поступила 13.10. 2011 г.