УДК 517

ЭКСПОНЕНТЫ В ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОРЯДКОВ НА ОСНОВЕ *d*-ОПЕРАТОРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Вводятся и рассматриваются свойства экспонент в дробном анализе целочисленных порядков. Показано, что для d-операторов целочисленных порядков, превышающих 1, характерно наличие свыше одной экспоненты. Показано, что свойства экспонент для чётных и нечётных порядков сильно различаются.

Ключевые слова:
Дробный анализ целочисленных порядков, d-оператор, главная экспонента, дополнительные экспоненты, экспоненты вещественные, экспоненты комплексные, экспоненциальное вырождение.

Key words:
Fractional analysis integer order, d-operator, main exponent, additional exhibitors, exhibitors material, exhibitors complex, exponential degeneration.

Введение

В локальном дробном анализе принципиальное значение имеют элементарные функции. Поэтому при его развитии одной из главных задач является создание системы элементарных функций, как это имеет место в стандартном анализе.

В ряде работ [1, 2] были введены некоторые элементарные функции дробного анализа нецелочисленных и целочисленных порядков.

В локальном дробном анализе для каждого порядка дробного интегродифференцирования имеется свой набор элементарных функций. В частности, между системами элементарных функций в нецелочисленном и целочисленном дробном анализе имеется много общего, но и есть ряд принципиальных отличий. Часть этих функций переходят друг в друга при непрерывном изменении порядка, а часть имеют место только для целочисленных порядков в случае вырождения. Рассмотрим это на примере экспонент.

В работах [1–3] были введены и рассмотрены некоторые свойства экспонент целочисленных порядков, которые в данной работе будут рассмотрены более подробно.

В общем случае для ветви целочисленного порядка k имеется k^2 не равных друг другу экспонент. Дробностепенные ряды всех целочисленных экспонент порядка k, будут выглядеть как

$$\exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) \equiv \exp_k^{(p|\mu)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_\mu x)^{nk-p}}{(kn-p)!} =$$
$$= \frac{(\alpha_\mu x)^{k-p}}{(k-p)!} + \frac{(\alpha_\mu x)^{2k-p}}{(2k-p)!} + \frac{(\alpha_\mu x)^{3k-p}}{(3k-p)!} + \dots$$

Для всех k^2 экспонент выполняются основные свойства экспонент, а именно, они инвариантны относительно дифференцирования порядка k и интегрирования порядка k, но в последнем случае с точностью до сложения с полиномом интегрирования порядка k

$$d^{-k}x : \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) = \alpha_\mu^k \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) = \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x);$$

$$d^k x : \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) = \alpha_\mu^{-k} \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) + C_k(x) =$$
$$= \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) + C_k(x); \quad \mu,\ p = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Здесь $C_k(x)$ полиномы интегрирования целочисленного порядка k

$$C_k(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Здесь $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0$ – константы интегрирования, которых в случае порядка k будет k.

Главное свойство полинома интегрирования порядка k заключается в том, что его производная порядка k равна нулю: $d^{-k}x$: $C_k(x)=0$.

Все экспоненты целочисленных порядков $k>1$ удобно представить в виде квадратной матрицы $k\times k$, которая называется *матрицей экспонент порядка k* [1, 2]

$$\exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x) \equiv \exp_k^{(p|\mu)}(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \exp_k^{(1)}(\alpha_1 x) & \exp_k^{(1)}(\alpha_2 x) & \dots & \exp_k^{(1)}(\alpha_k x) \\ \exp_k^{(2)}(\alpha_1 x) & \exp_k^{(2)}(\alpha_2 x) & \dots & \exp_k^{(2)}(\alpha_k x) \\ \dots & & & \\ \exp_k^{(k)}(\alpha_1 x) & \exp_k^{(k)}(\alpha_2 x) & \dots & \exp_k^{(k)}(\alpha_k x) \end{pmatrix}.$$

Здесь p, $\mu=1,2,3, \dots,k$; α_i, $i=1,2,\dots,k$, *корни инвариантности* [2]. Один корень вещественный, называется *главным корнем*, который всегда равен единице, $\alpha_1=1$. Остальные $k-1$ корней называются вещественными *комплексными корнями*, являющимися в общем случае комплексными числами. В частных случаях, в зависимости от чётности порядка k, комплексные корни могут быть вещественными или мнимыми.

Корни инвариантности выражаются формулой

$$\alpha_k = 1^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{i2\pi n}{k}\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{k}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi n}{k}\right);$$
$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1.$$

Каждый элемент в матрице экспонент является экспонентой порядка k. Первый столбец матрицы экспонент составляют вещественные экспоненты, а все остальные комплексные экспоненты.

Наличие нескольких экспонент в локальном дробном анализе для операторов с порядками больше единицы называется *экспоненциальным вырождением.*

Свойства экспонент целочисленных порядков чётных и нечётных порядков, очень сильно различаются, поэтому их стоит рассмотреть отдельно.

Свойства экспонент чётных и нечётных порядков

Экспоненты чётных порядков всегда являются или чётными, или нечётными функциями.

Экспоненты чётных и нечётных порядков можно записать

$$\exp_{2k-1}^{(p|\mu)}(x) \equiv \exp_{2k-1}^{(p)}(\alpha_\mu x);$$

$$p,\ \mu = 1, 2, 3, \dots, 2k-1;\ k \in \mathbb{N};$$

$$\exp_{2k}^{(p|\mu)}(x) \equiv \exp_{2k}^{(p)}(\alpha_\mu x);$$

$$p,\ \mu = 1, 2, 3, \dots, 2k;\ k \in \mathbb{N}.$$

Ряд главной экспоненты чётных порядков будет

$$\exp_{2k}(x) \equiv \exp_{2k}^{(1)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2mk-1}}{(2mk-1)!} = $$

$$= \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \frac{x^{6k-1}}{(6k-1)!} + \frac{x^{8k-1}}{(8k-1)!} + \dots$$

Ряды дополнительных экспонент чётных порядков будут

$$\exp_{2k}^{(2)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2nk-2}}{(2nk-2)!} = \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} +$$

$$+ \frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} + \frac{x^{6k-2}}{(6k-2)!} + \frac{x^{8k-2}}{(8k-2)!} + \dots;$$

$$\exp_{2k}^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2nk-3}}{(2nk-3)!} = \frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} +$$

$$+ \frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!} + \frac{x^{6k-3}}{(6k-3)!} + \frac{x^{8k-3}}{(8k-3)!} + \dots;$$

$$\dots$$

$$\exp_{2k}^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2nk-k}}{(2nk-k)!} =$$

$$= \frac{x^{2k-k}}{(0)!} + \frac{x^{4k-k}}{(3k)!} + \frac{x^{6k-k}}{(5k)!} + \frac{x^{8k-k}}{(7k)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)k}}{(2nk-k)!} = \frac{x^k}{1} + \frac{x^{3k}}{(3k)!} + \frac{x^{5k}}{(5k)!} + \frac{x^{7k}}{(7k)!} + \dots;$$

$$\dots$$

$$\exp_{2k}^{(2k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2nk-2k}}{(2nk-2k)!} =$$

$$= \frac{x^{2k-2k}}{(0)!} + \frac{x^{4k-2k}}{(2k)!} + \frac{x^{6k-2k}}{(4k)!} + \frac{x^{8k-2k}}{(6k)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)k}}{(2(n-1)k)!} = 1 + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{4k}}{(4k)!} + \frac{x^{6k}}{(6k)!} + \dots;$$

Ряд главной экспоненты и всех дополнительных экспонент можно записать одним равенством

$$\exp_{2k}(x) \equiv \exp_{2k}^{(p)}(x) \equiv \exp_{2k}^{(p|1)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{2mk-p}}{(2mk-p)!} =$$

$$= \frac{x^{2k-p}}{(2k-p)!} + \frac{x^{4k-p}}{(4k-p)!} + \frac{x^{6k-p}}{(6k-p)!} + \dots;$$

$$p, k \in \mathbb{N};\ p = 1, 2, 3, \dots, 2k.$$

Экспоненты целочисленных чётных порядков имеют высокую степень симметрии. Например, главная экспонента $\exp_{2k}(x) \equiv \exp_{2k}^{(1)}(x)$ будет нечётной функцией

$$\exp_{2k}^{(1)}(-x) = -\exp_{2k}^{(1)}(x).$$

И вообще, все экспоненты чётных порядков с нечётными номерами тоже будут нечётными функциями, что можно записать в виде равенства

$$\exp_{2k}^{(2l-1)}(-x) = -\exp_{2k}^{(2l-1)}(x);\quad l = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Экспоненты чётных порядков с чётными номерами будут чётными, что можно записать в виде соотношений

$$\exp_{2k}^{(2l)}(x) = \exp_{2k}^{(2l)}(-x);\quad l = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Все экспоненты целочисленных чётных порядков, как вещественные, так и комплексные можно записать

$$\exp_{2k}^{(p|\mu)}(x) \equiv \exp_{2k}^{(p)}(\alpha_\mu x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\alpha_\mu x)^{2mk-p}}{(2mk-p)!} =$$

$$= \frac{(\alpha_\mu x)^{2k-p}}{(2k-p)!} + \frac{(\alpha_\mu x)^{4k-p}}{(4k-p)!} + \frac{(\alpha_\mu x)^{6k-p}}{(6k-p)!} + \dots;$$

$$p, \mu = 1, 2, 3, \dots, 2k.$$

В силу высокой симметрии целочисленных экспонент чётных порядков и большой простоты корней инвариантности, имеет место *частичное снятие экспоненциального вырождения*, когда некоторые из k^2 экспонент, порядка $k>1$, будут равны друг другу, или линейно выражаться друг через друга. Вопрос с частичным снятием вырождения требует отдельного рассмотрения.

Если аргумент экспонент целочисленных чётных порядков будет мнимым, тогда главная экспонента и все экспоненты с нечётными номерами будут мнимыми функциями.

Для главной экспоненты ряд будет следующим

$$\exp_{2k}(ix) \equiv \exp_{2k}^{(1)}(ix) = -i\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{mk} x^{2mk-1}}{(2mk-1)!} =$$

$$= -i\left(\begin{aligned} &\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!} + \\ &+ \frac{(-1)^k x^{6k-1}}{(6k-1)!} + \frac{x^{8k-1}}{(8k-1)!} \dots \end{aligned} \right).$$

Основные экспоненты (главная и дополнительные) нечётных номеров с мнимым аргументом будут выражаться в виде рядов

$$\exp_{2k}^{(2l-1)}(ix)=i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(mk-l)}x^{2mk-2l+1}}{(2mk-2l+1)!};\ l=1,2,3,\ldots,k.$$

Дополнительные экспоненты чётных целочисленных порядков с мнимым аргументом и с чётными номерами будут вещественными функциями, а их ряды будут

$$\exp_{2k}^{(2l)}(ix)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(mk-l)}x^{2mk-2l}}{(2mk-2l)!};\ l=1,2,3,\ldots,k.$$

Основные экспоненты нечётных целочисленных порядков с мнимым аргументом будут мнимыми функциями.

Для целочисленных нечётных порядков ряд основных экспоненты будет

$$\exp_{2k-1}^{(p)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(2k-1)n-p}}{((2k-1)n-p)!}=\frac{x^{(2k-1)-p}}{((2k-1)-2)!}+$$
$$+\frac{x^{2(2k-1)-p}}{(2(2k-1)-2)!}+\frac{x^{3(2k-1)-p}}{(3(2k-1)-2)!}+$$
$$+\frac{x^{4(2k-1)-p}}{(4(2k-1)-2)!}+\ldots;\quad p=1,2,3,\ldots,2k-1;\ k\in\mathbb{N}.$$

Ряд главной экспоненты для целых целочисленных нечётных порядков будет

$$\exp_{2k-1}(x)\equiv\exp_{2k-1}^{(1)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(2k-1)n-1}}{((2k-1)n-1)!}=$$
$$=\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!}+\frac{x^{6k-4}}{(6k-4)!}+\frac{x^{8k-5}}{(8k-5)!}+\ldots$$

Ряды дополнительных экспонент нечётных целочисленных порядков будут

$$\exp_{2k-1}^{(2)}(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(2k-1)n-2}}{((2k-1)n-2)!}=\frac{x^{(2k-1)-2}}{((2k-1)-2)!}+$$
$$+\frac{x^{2(2k-1)-2}}{(2(2k-1)-2)!}+\frac{x^{3(2k-1)-2}}{(3(2k-1)-2)!}+\ldots;$$
$$\exp_{2k-1}^{(3)}(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(2k-1)n-3}}{((2k-1)n-3)!}=\frac{x^{(2k-1)-3}}{((2k-1)-3)!}+$$
$$+\frac{x^{2(2k-1)-3}}{(2(2k-1)-3)!}+\frac{x^{3(2k-1)-3}}{(3(2k-1)-3)!}+\ldots;$$
$$\ldots$$
$$\exp_{2k-1}^{(k)}(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(2k-1)n-k}}{((2k-1)n-k)!}=\frac{x^{(2k-1)-k}}{((2k-1)-k)!}+$$
$$+\frac{x^{2(2k-1)-k}}{(2(2k-1)-k)!}+\frac{x^{3(2k-1)-k}}{(3(2k-1)-k)!}+\ldots;$$
$$\ldots$$

$$\exp_{2k-1}^{(2k-1)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{(2k-1)n-2k+1}}{((2k-1)n-2k+1)!}=$$
$$=\frac{x^{0}}{(0)!}+\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\frac{x^{2(2k-1)}}{(2(2k-1))!}+\frac{x^{3(2k-1)}}{(3(2k-1))!}+\ldots$$

В полученных рядах чётные порядки степенных функций чередуются с нечётными порядками степенных функций элементов рядов.

Для отрицательного аргумента в экспонентах нечётных порядков, получим знакочередующиеся ряды. Соответствующий ряд для главной экспоненты будет

$$\exp_{2k-1}(-x)=\exp_{2k-1}^{(1)}(-x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}x^{2mk-m-1}}{(2mk-m-1)!}=$$
$$=\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!}+\frac{x^{6k-4}}{(6k-4)!}-$$
$$-\frac{x^{8k-5}}{(8k-5)!}+\frac{x^{10k-6}}{(10k-6)!}+\ldots$$

Экспоненты целочисленных нечётных порядков мнимых аргументов будут комплексными функциями

$$\exp_{2k-1}(ix)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{mk}(-i)^{m-1}x^{2mk-m-1}}{(2mk-m-1)!}=$$
$$=-\frac{(-1)^{k}x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\frac{ix^{4k-3}}{(4k-3)!}+\frac{(-1)^{k}x^{6k-4}}{(6k-4)!}-$$
$$-\frac{ix^{8k-5}}{(8k-5)!}-\frac{(-1)^{k}x^{10k-6}}{(10k-6)!}+\ldots$$

Для отрицательных мнимых аргументов ряд экспонент будет

$$\exp_{2k-1}(-ix)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{mk}i^{m-1}x^{2mk-m-1}}{(2mk-m-1)!}=$$
$$=-\frac{(-1)^{k}x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\frac{ix^{4k-3}}{(4k-3)!}+\frac{(-1)^{k}x^{6k-4}}{(6k-4)!}+$$
$$+\frac{ix^{8k-5}}{(8k-5)!}-\frac{(-1)^{k}x^{10k-6}}{(10k-6)!}+\ldots$$

Экспоненты целочисленных нечётных порядков мнимого аргумента, имеют чередующиеся чётные и нечётные члены ряда. Также будут чередоваться вещественные члены ряда, в случае чётных степеней аргумента, с мнимыми членами ряда, в случае нечётных степеней ряда.

Инвариантные функции

При наличии экспоненциального вырождения для случая целочисленных порядков больших единицы, целесообразно ввести инвариантные функции.

Определение. Функцию, инвариантную относительно дифференцирования порядка k и инвариантную относительно интегрирования порядка k, причём интегрирование с точностью до сложения с полиномом интегрирования порядка k, будем называть *инвариантной функцией порядка k*.

Тривиальный случай простой инвариантной функции является нулевая функция (ноль), которая является инвариантной функцией для любого вещественного порядка.

В случае целочисленных порядков больше единицы, инвариантные функции являются суммой инвариантных функций, или линейной суперпозицией экспонент.

Экспоненты любого целочисленного вещественного порядка k можно рассмотреть в более общем виде – со сдвигом β=const, $\exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x+\beta_\mu)$. *Экспоненты со сдвигом* являются инвариантными функциями того же порядка. В более общем виде экспоненты, со сдвигом можно записать для случая, когда каждая из экспонент порядка k будет иметь свой сдвиг, β_μ=const; $\beta_\mu \in \mathbb{R}$; $\mu=1,2,3,...,k$. Условия инвариантности для экспонент со сдвигом будут

$$d^{-k}x : \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x+\beta_\mu) = \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x+\beta_\mu);$$

$$d^{k}x : \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x+\beta_\mu) = \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x+\beta_\mu) + C_k(x).$$

Экспоненты с нулевым сдвигом являются наиболее простыми (примитивными) инвариантными функциями.

Определение. Если инвариантную функцию невозможно разложить на другие инвариантные функции того же порядка, то такую инвариантную функцию будем называть *простой инвариантной функцией* порядка k.

Простые инвариантные функции пропорциональны экспонентам.

Определение. Инвариантные функции будем называть *сложными инвариантными функциями*, если она состоит из суммы r ($k>r>1$) простых инвариантных функций.

Из сказанного следует справедливость утверждения.

Теорема. Суперпозиция экспонент целочисленного порядка k, будет инвариантной функцией порядка k.

Очевидно, что все функции пропорциональные экспонентам порядка k, если коэффициент пропорциональности не равен нулю, являются простыми инвариантными функциями того же порядка. Если коэффициент пропорциональности равен единице, то получим экспоненту (экспоненты в случае целочисленных порядков больше единицы).

Поэтому, суперпозицию экспонент целочисленного порядка $k>1$, будет *сложной инвариантной функцией* порядка $k>1$. Наиболее общая запись сложной инвариантной функции порядка k будет

$$\mathrm{Invf}_k(a_p, \beta_\mu; x) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{\mu=1}^{k} a_p \exp_k^{(p)}(\alpha_\mu x+\beta_\mu);$$

$$a_p, \alpha_\mu, \beta_\mu = \mathrm{const};\ a_p, \alpha_\mu, \beta_\mu \in \mathbb{R};\ p, \mu = 1, 2, 3, ..., k.$$

Здесь a_p и β_μ любые вещественные, или комплексные константы.

Условия инвариантности для функций $\mathrm{Invf}_k(a_p,\beta_\mu;x)$ будут

$$d^{-k}x : \mathrm{Invf}_k(a_p, \beta_\mu; x) = \mathrm{Invf}_k(a_p, \beta_\mu; x);$$

$$d^{k}x : \mathrm{Invf}_k(a_p, \beta_\mu; x) = \mathrm{Invf}_k(a_p, \beta_\mu; x) + C_k(x).$$

Для частного случая стандартного анализа, когда порядок k=1, сложная инвариантная функция будет состоять из одного слагаемого

$$\mathrm{Invf}_1(a_1, \beta_1; x) = a_1 \exp_1(x+\beta_1);$$

$$a_1, \beta_1 = \mathrm{const};\ a_1, \beta_1 \in \mathbb{C}.$$

Для нецелочисленных порядков s, когда порядок будет нецелочисленным, сложная инвариантная функция тоже будет состоять из одного слагаемого

$$\mathrm{Invf}_s(a, \beta; x) = a \exp_s(x+\beta);$$

$$a, \beta = \mathrm{const};\ a, \beta \in \mathbb{C}.$$

Инвариантные функции образуют *пространство инвариантных функций порядка k* которое будем обозначать IF_k.

Легко видеть, что пространство инвариантных функций порядка nk будет являться подпространством *пространства инвариантных функций порядка k*

$$\mathrm{IF}_k \subset \mathrm{IF}_{nk};\quad k, n = 1, 2, 3, ...$$

Размерность этих пространств зависит от чётности порядка

$$\dim \mathrm{IF}_{2k-1} = k^2;\ \ \dim \mathrm{IF}_{2k} < k^2;\ \ k, n = 1, 2, 3, ...$$

В случае чётных порядков размерность пространства IF_{2k} меньше k^2 в силу частичного снятия вырождения.

Для порядков равных единице и нецелочисленных порядков размерность будет равна единице, $\dim\mathrm{IF}_1=1$; $\dim\mathrm{IF}_s=1$; $s\neq 1,2,3,...$

Теорема. Инвариантные функции порядка k являются инвариантными функциями и для порядков nk.

Это утверждение является следствием разложения экспонент меньшего порядка на сумму экспонент более высоких порядков [4].

В случае нецелочисленных порядков и для порядка k=1, линейное пространство будет одномерным, а в случае целочисленных порядков $k>1$, размерность превысит 1. Если размерность $k>1$ будет нечётной, то размерность линейного пространства равна k^2 в силу экспоненциального вырождения. Если размерность k чётная, то размерность линейного пространства будет больше 1 и меньше k^2 в силу частичного снятия экспоненциального вырождения. Точная размерность линейного пространства в случае чётных порядков требует отдельного рассмотрения.

Теорема. Все экспоненты нечётного порядка k образуют линейно независимую систему функций. Это следует из того, что определитель Вронского отличен от нуля.

Элементами данного линейного пространства являются инвариантные функции порядка k.

Теорема. Главная и дополнительные экспоненты целочисленного нечётного порядка k образуют k-мерное линейное пространство относительно операции сложения и умножения на число.

Теорема. Главная и все дополнительные экспоненты порядка k образуют линейно независимую систему функций. Это следует из того, что определитель Вронского отличен от нуля

$$W_k = \det(\exp_k^{(p|\mu)}(x)) \neq 0.$$

Теорема. Всё экспоненты порядка нецелочисленных порядков и целочисленного порядка, равного единице, образуют одномерное линейное пространство.

Исходя из полученных результатов, можно сформулировать утверждение.

Теорема. Любая линейная комбинация инвариантных функций является инвариантной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Особенности некоторых элементарных функций дробного анализа целочисленных порядков // Перспективы развития фундаментальных наук: Труды VII Междунар. конф. студентов и молодых учёных. – Томск, 20–23 апреля 2010 г. – Томск, 2010. – С. 536–537.
2. Чуриков В.А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.
3. Чуриков В.А. Экспоненциальное вырождение в дробном анализе целочисленных порядков // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Междунар. Российско-Болгарского симп. – г. Нальчик, аул Хабез, 25–30 июня, 2010 г. – Нальчик, 2010. – С. 251–254.
4. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.

Поступила 29.08.2011 г.

УДК 621.52+511.52

НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДТ-АНАЛОГА $L(t)R(t)$-АЛГОРИТМА

С.О. Симонян, А.К. Василян, М.Д. Тамазян

Государственный инженерный университет Армении (Политехник), г. Ереван
E-mail: cybinf@seua.am; ssimonyan@seua.am; aram028@yahoo.com; mher.tamazyan@gmail.com

Предложен простой численно-аналитический метод, с помощью которого легко определяются характеристические показатели матрицы монодромии.

Ключевые слова:
Неавтономная матрица, собственные значения-функции, матрица монодромии, дифференциально-тейлоровские преобразования, характеристические показатели.
Key words:
Non-autonomous matrix, own values-functions, monodrom matrix, differential-Taylor transformation, characteristical showings.

Введение. Допустим, что мы имеем неавтономную систему с периодическими коэффициентами, которая задана в следующем виде [1]

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \qquad (1)$$

где $A(t)=(a_{ij}(t))$, $i,j=\overline{1,n}$, $X(t)=(x_1,(t),...,x_n(t))^T$ а элементы матрицы $A(t)$ периодические, т. е. $A(t+T)=A(t)$, где T – период.

Пусть $\Phi(T,t)$ – матрица монодромии системы (1), которая имеет вид [2]

$$\Phi(T,t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(T,t) & \varphi_{12}(T,t) & \cdots & \varphi_{1n}(T,t) \\ \varphi_{21}(T,t) & \varphi_{22}(T,t) & \cdots & \varphi_{2n}(T,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1}(T,t) & \varphi_{n2}(T,t) & \cdots & \varphi_{nn}(T,t) \end{bmatrix},$$

а

$$P(\lambda(t)) =$$
$$= (\lambda(t) - \lambda_1(t))^{m_1}(\lambda(t) - \lambda_2(t))^{m_2} \cdots (\lambda(t) - \lambda_k(t))^{m_k},$$
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m \leq n$$

– минимальный многочлен матрицы $\Phi(T,t)$ [3]. Функции

$$b_j(t) = \frac{1}{T}\ln\lambda_j(t), \quad j = \overline{1,k}, \qquad (2)$$

где T – период; $\lambda_j(t)$; $i=\overline{1,k}$ – собственные значения-функции матрицы $\Phi(T,t)$ – называются характеристическими показателями решений системы (1).

Согласно [3], зная значения характеристических показателей, можно говорить об устойчивости системы (1). Будем искать характеристические показатели (2) для неавтономных матриц с помощью ДТ-аналога $L(t)R(t)$-алгоритма [4].