

УДК 530.3:621.826.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ШАТУНА КРИВОШИПНО-ПОЛЗУННОГО МЕХАНИЗМА МАЛОГАБАРИТНЫХ ПОРШНЕВЫХ МАШИН, ВЫПОЛНЕННОГО В ВИДЕ ПРУЖИНЫ С МЕЖВИТКОВЫМ ДАВЛЕНИЕМ

И.П. Аистов, В.Д. Смирнов

Омский государственный технический университет
E-mail: aistov_i@mail.ru

Приведена математическая модель шатуна кривошипно-ползунного механизма малогабаритных поршневых машин, выполненного в виде цилиндрической пружины с межвитковым давлением, которая может быть распространена на другие пружинные механизмы с винтовыми цилиндрическими пружинами, в том числе с разомкнутыми витками.

Ключевые слова:

Упругие элементы, винтовая цилиндрическая пружина, пружина с межвитковым давлением, поршневая машина

Key words:

Elastic elements, the helical coil spring, spring to interturn pressure, piston machine

Малогабаритные поршневые машины, привод поршней которых выполнен в виде кривошипно-ползунного механизма (КПМ), например, микрокомпрессоры, миниатюрные двигатели Стирлинга, газовые криогенные машины (ГКМ) [1], нашли широкое применение в объектах, где масса, габариты и ресурс являются определяющими факторами. Одним из путей миниатюризации малогабаритных поршневых машин является использование в передаточном механизме привода поршней, гибких шатунов, выполненных в виде упругих элементов. Такой шатун может быть выполнен, в виде жестко закрепленного в поршне и на обойме шатуна тонкого стержня (плоской пружины) [2], или в виде пружины с межвитковым давлением (ПМВД) [3, 4], для использования которых в практических целях, требуется разработка математической модели с целью оценки его работоспособности.

При составлении математической модели и расчетной схемы шатуна, выполненного в виде пружины с межвитковым давлением (рисунок) приняты следующие допущения: ПМВД заменялась эквивалентным стержнем (ЭС) с приведенными характеристиками жесткости стержня на сдвиг A_1 , изгиб A_2 (верхняя строчка в формуле – относится к случаю разомкнутых витков ПМВД, нижняя – к сомкнутым виткам) и растяжение A_3 [5, 6]:

$$A_1 = \frac{8H_0 B_b}{\pi D^3 i_p}; \quad A_3 = \frac{4B_p H_0}{\pi D^3 i_p};$$

$$A_2 = \begin{cases} \frac{2H_0}{\pi D i_p} \frac{1}{1/B_p + 1/B_n}, \\ \frac{3 + B_p/B_n}{1 + B_p/B_n} \frac{B_p h}{\pi D}, \end{cases}$$

где $H_0 = l = i_p h$, i_p , h , $D = 2R$, B_p , B_n и B_b – начальная длина, число рабочих витков, высота (диаметр) сечения витка, средний диаметр навивки (R – сред-

ний радиус); крутильная жесткость сечения витка, изгибная жесткость сечения витка относительно ее нормали и изгибная жесткость сечения витка относительно ее бинормали для ПМВД, соответственно; изгибающий момент $M(z)$, действующий в сечениях ЭС, равен крутящему моменту M_{pj} , действующему в j -м витке, т. е. $M(z) = M_{pj}$.

Распорными («цепными») усилиями, возникающими в пружине вследствие изменения длины упругой линии ЭС при размыкании витков с изгибом $P_{цепн} = A_3 \int_0^l (v'(z))^2 dz / 2l$ (здесь $v(z)$ – прогиб оси ЭС, l – длина ЭС), пренебрегаем [5].

Ввиду особенности конструкции кривошипно-ползунного механизма (КПМ), прогибы $v(z)$ ЭС принимаются малыми.

На рис. 1 введены следующие обозначения: x, y, z – система координат, в пространстве которых записываются уравнения равновесия шатуна (начало отсчета от заделки витка ПМВД в поршне); $v(l)$ и $\theta(l)$ – прогиб и угол поворота сечения ЭС о координатой $z=l$; $Q(z)$ и $N(z)$ – поперечная и продольная силы, действующие в сечении ЭС; l – длина ЭС (или «гибкой» части шатуна); f – длина «жесткой» части шатуна, в которую включаются нераскрытые при изгибе ПМВД витки; f_0 – радиус обоймы шатуна; r – радиус кривошипа КПМ; $\Delta(t) = r \sin(\Omega t)$ – текущее отклонение кривошипа от оси поршня (Ω – угловая скорость вращения кривошипа); $P(\Delta)$ – сила, действующая на поршень КПМ.

Принимаем, что при стационарном режиме работы ГКМ: $v(z, t) = v(z)$; $\theta(z, t) = \theta(z)$; $N(z, t) = N(z)$; $M(z, t) = M(z)$.

Закон движения поршня кривошипа ГКМ известен:

$$N(z) = P(t) = P(\Delta),$$

где $\Delta = r \sin(\Omega t)$, r – радиус кривошипа; $\Omega = \text{const}$ – угловая скорость кривошипа.

Принимается, что при $N(z) > 0$ – происходит растяжение шатуна, при $N(z) < 0$ – сжатие шатуна:

$$N(z) \geq P_0 + P^*;$$

$$P^* = \frac{1 + B_p/B_n}{3 + B_p/B_n} \frac{|M(z)|}{0,5D},$$

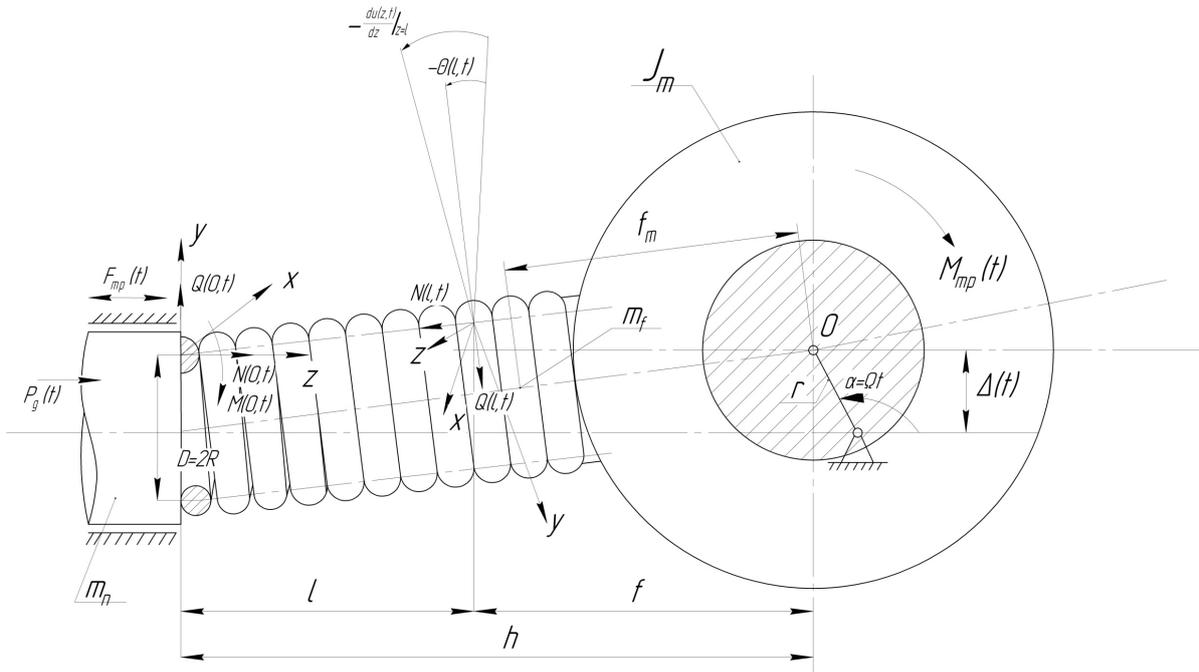


Рисунок. Расчетная схема шатуна, выполненного в виде ПМВД

где P_0 – величина предварительного поджатия витков; P^* – сила взаимодействия витков вследствие изгиба шатуна. Условие раскрытия витков пружины без их размыкания относительно друг друга запишем в виде:

$$M(z) \geq M_0,$$

где $M_0 = 0,5P_0D$ – величина момента предварительного поджатия витков пружины.

Рассмотрим дифференциальное уравнение прогибов $v(z)$ ЭС в статике, на которые заменяется ПМВД [5]:

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} - \frac{N(z)}{A_2} \left(1 - \frac{N(z)}{A_1} \right) \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = 0, \quad (1)$$

с зависимостями для балки Тимошенко [5]

$$\theta(z) = -v'(z) / (1 - N(z) / A_1);$$

$$M(z) = A_2 \theta'(z); \quad Q(z) = -A_1 (v'(z) - \theta(z)).$$

Дифференциальное уравнение (1) является нелинейным вследствие переменной по длине ЭС продольной силы $N(z) = \text{var}$ (верхняя строчка в формуле – относится к случаю разомкнутых витков ПМВД, нижняя – к сомкнутым виткам):

$$N(z) = \begin{cases} P(\Delta) - P_0 - \frac{A_3}{2l} \int_0^l (v'(z))^2 dz, \\ \pm P_0 \pm P(\Delta) - \frac{|M(z)|}{0,5D} \frac{1 + B_p / B_n}{3 + B_p / B_n}, \end{cases}$$

и следующих краевых условий закрепления шатуна:

$$\begin{aligned} v(0) = 0; \quad v(l) - \theta(l)f = \Delta - r(1 - \cos \theta(l)); \\ \theta(0) = 0; \quad M(l) + Q(l)f + N(l)R = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Нелинейное дифференциальное уравнение (1) с краевыми условиями (2) можно свести к рению задачи Коши:

$$\frac{dv}{dz} = \theta^*; \quad \frac{d\theta^*}{dz} = M^*; \quad \frac{dM^*}{dz} = Q^*; \quad \frac{dQ^*}{dz} = \varphi^*,$$

с начальными условиями

$$v(0) = 0; \quad \theta^*(0) = 0; \quad M^*(0) = m; \quad Q^*(0) = q, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \frac{P(\Delta) + P_0}{A_2} (1 + k_1) M^* + \\ &+ \frac{A_R}{A_2} (1 + 2k_1) (M^*)^2 + \frac{A_R}{A_1 A_2} (M^*)^3; \\ m &= -M(0)(1 + k_1) / A_2; \\ q &= -Q(0)(1 + k_1)^2 / A_2; \\ A_R &= \frac{A_2}{R} \frac{1 + B_p / B_n}{3 + B_p / B_n} \frac{1}{1 + k_1}; \\ k_1 &= (P(\Delta) + P_0) / A_1. \end{aligned}$$

Поиск начальных условий (3) осуществлялся по схеме последовательных приближений метода Ньютона [7]:

$$\left\| \begin{matrix} m^{(2)} \\ q^{(2)} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} m^{(1)} \\ q^{(1)} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial m} & \frac{\partial \psi_1}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial m} & \frac{\partial \psi_2}{\partial q} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{matrix} \right\|,$$

где ψ_1, ψ_2 – функции, зависящие от неизвестных начальных условий m и q и условий закрепления шатуна:

$$\begin{aligned}\psi_1(m, q) &= v(l, m, q) + \theta^*(l, m, q) f^* - \Delta; \\ \psi_2(m, q) &= M^*(l, v, q) + Q^*(l, m, q) f^* - M_R; \\ f^* &= f / (1 + k_1); \quad M_R = \frac{P(\Delta) + P_0}{A_2} (1 + k_1) R.\end{aligned}$$

В качестве первого приближения, рассматривалась линейная постановка с допущением о постоянстве по длине ЭС продольной силы $-N(z) = P(\Delta) = \text{const}$, что позволило свести уравнение (1) к линейному виду

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} - k^2 \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = 0, \quad (4)$$

где $k^2 = (P(\Delta)/A_2)(1 + P(\Delta)/A_1)$.

Решение уравнения (4) может быть предоставлено с помощью нормальной системы фундаментальных функций $V_i(z)$ ($i=1,4$) в виде [8]:

$$v(z) = C_1 V_1(z) + C_2 V_2(z) + C_3 V_3(z) + C_4 V_4(z), \quad (5)$$

где постоянные интегрирования C_i ($i=1,4$) получены из условия закрепления шатуна (2).

В работе [9] показано, что основное влияние на динамические нагрузки шатуна ГКМ, оказывают угловые колебания нижней обоймы шатуна КПП ГКМ. Для учета динамических напряжений, возникающих в витках шатуна-ПМВД КПП от угловых колебаний нижней обоймы, вместо условий закрепления шатуна (2) в статике рассматривались следующие условия закрепления шатуна:

$$\begin{aligned}\theta(0, t) &= 0; \\ v(l, t) - \theta(l, t) f &= r \sin(\Omega t); \\ M(l, t) + Q(l, t) f + N(l, t) R &= \end{aligned} \quad (6)$$

$$= (J_m + m_f f_m^2) \ddot{\theta}(l, t) + B_d \dot{\theta}(l, t) + m_f f_m \Omega^2 r \sin(\Omega t),$$

где J_m – момент инерции головки шатуна относительно оси вращения кривошипа; m_f, f_m – масса нераскрытых витков пружины, отнесенных к «жесткой» части шатуна и расстояние от центра тяжести нераскрытых витков до оси вращения кривошипа, соответственно; B_d – коэффициент демпфирования, характеризующий диссипативные силы сопротивления.

1. Считаем, что периодическое усилие на поршень $P(t)$ с периодом $T = 2\pi/\Omega$ – задано.

2. Прогибы упругой линии шатуна $v(z, t)$ удовлетворяют решению дифференциального уравнения равновесия шатуна в статике (4), записанного с использованием нормальной системы фундаментальных функций (5), то есть рассматривается дорезонансный режим кинематического возбуждения шатуна от кривошипа с угловой скоростью Ω по отношению к собственным частотам самого шатуна.

Учитывая соотношения балки Тимошенко и пренебрегая массой витков ПМВД, включенную в «жесткую» часть шатуна f_m , перепишем граничные условия (6) в виде:

$$\begin{aligned}v(0, t) &= 0; \quad \theta(0, t) = 0; \\ C_3 V_3(l, t) + C_4 V_4(l, t) &= \Delta + \theta(l, t) f; \\ -(v''(l, t) + v'''(l, t) f / (1 + k_1)) + M_R &= \\ &= \bar{J}_m \ddot{\theta}(l, t) + B_d \dot{\theta}(l, t),\end{aligned} \quad (7)$$

В формулах (7) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}M_R &= \frac{N(l, t)}{A_2} (1 + k_1) R; \quad k_1 = -\frac{N(l, t)}{A_1}; \\ \bar{J}_m &= \frac{J_m}{A_2} (1 + k_1).\end{aligned}$$

Учитывая соотношение:

$$C_3 V_3'(l, t) + C_4 V_4'(l, t) = -\theta(l, t) (1 + k_1),$$

Решаем его совместно с третьим уравнением краевого условия (7), относительно постоянных C_3 и C_4 через Δ и $\theta(l, t)$

$$\begin{aligned}C_3 &= -\frac{\theta(l, t) (1 + k_1)}{\Phi_*(t)} \bar{d} - \frac{\Delta}{\Phi_*(t)} - V_4'(l, t); \\ C_4 &= \frac{\theta(l, t) (1 + k_1)}{\Phi_*(t)} \bar{e} + \frac{\Delta}{\Phi_*(t)} V_3'(l, t),\end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{e} &= V_3(l, t) + V_3'(l, t) f; \quad \bar{d} = V_4(l, t) + V_4'(l, t) f; \\ \Phi_*(t) &= V_3'(l, t) V_4(l, t) - V_3(l, t) V_4'(l, t); \\ f_1 &= f / (1 + k_1).\end{aligned}$$

Подставляя полученное решение (8) в четвертое граничное условие (7), получаем уравнение угловых колебаний нижней обоймы шатуна – ПМВД в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(l, t) + B_d \dot{\theta}(l, t) + \frac{A_2}{J_m} \frac{\Phi(t)}{\Phi_*(t)} \theta(l, t) &= \\ = -\frac{A_2}{J_m} \left\{ \frac{N(l, t)}{A_2} (1 + k_1) R + \Delta \frac{\theta_\Delta(l, t)}{\Phi(t)} \right\},\end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \bar{e} \bar{g} - \bar{d} \bar{l}; \quad \theta_\Delta(l, t) = \bar{g} V_3'(l, t) - \bar{l} V_4'(l, t); \\ \bar{g} &= V_4''(l, t) + V_4'''(l, t) f; \quad \bar{l} = V_3''(l, t) + V_3'''(l, t) f.\end{aligned}$$

Уравнение (9) содержит периодический коэффициент при члене $\theta(l, t)$

$$\Omega_0^2(t) = \frac{A_2}{J_m} \frac{\Phi(t)}{\Phi_*(t)}. \quad (10)$$

Считаем, что $\ddot{\theta}(l, t) \approx -\Omega^2 \theta(l, t)$. Тогда, с учетом обозначений (10), можно записать:

$$\theta(l, t) \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2(t)} \right) = - \left(M_R \frac{\Phi_*(t)}{\Phi(t)} + \Delta \frac{\theta_\Delta(l, t)}{\Phi(t)} \right). \quad (11)$$

Правая часть уравнения (11) представляет собой статический угол поворота нижней обоймы:

$$\theta_{cm}(l) = - \left(\Delta \frac{\theta_{\Delta}(l)}{\Phi} + M_R \frac{\Phi_*}{\Phi} \right).$$

Таким образом, решение уравнения (11) можно представить приближенно в виде

$$\theta(l, t) = \theta_{cm}(l) / \left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2(t)} \right).$$

Тогда по заданному отклонению Δ и найденному повороту нижней обоймы $\theta_{cm}(l)$ по формулам (8) находим постоянные интегрирования C_3 и C_4 . Затем определяем изгибающий момент, действующий в сечениях ЭС

$$M(z, t) = -A_2 \frac{C_3 V_3''(z, t) + C_4 V_4''(z, t)}{1 + k_1}.$$

Принимая, что изгибающий момент $M(z, t)$, действующий в сечениях ЭС, равен (верхняя строчка в формуле – относится к случаю разомкнутых витков ПМВД, нижняя – к сомкнутым виткам):

$$M_{pj}(t) = \begin{cases} M(z, t) \sin(2\pi j) - N(z, t) R \cos \theta(z, t), \\ M(z, t) \sin(2\pi j) + N(z, t) (1 - \cos(2\pi j)), \end{cases}$$

где M_{pj} – крутящий момент, действующий в j -м витке пружины, оценить напряженное состояние в витках ПМВД с учетом угловых колебаний нижней обоймы можно по следующей формуле:

$$\tau_j(t) = k_p \frac{M_{pj} - M_o}{W_p}; \quad j = 1, 2, \dots, i_p,$$

где $M_o = 0,5 P_0 R$ – величина момента сил предварительного поджатия витков (P_0 – сила предварительного поджатия витков); k_p – коэффициент, учитывающий кривизну витков; W_p – полярный момент сопротивления сечения витка; i_p – число рабочих витков.

В таблице представлены результаты расчетов касательных напряжений.

В расчетах учтены дополнительные динамические напряжения, возникающие вследствие вращения обоймы шатуна малогабаритной поршневой машины.

Полученные результаты хорошо согласуются с комплексом ресурсных испытаний шатунов, вы-

полненных в виде ПМВД, работающих в составе малогабаритных поршневых машин [4].

Таблица. Результаты прочностного расчета шатуна – ПМВД при продольно-поперечном изгибе

| Параметры КПП и значение сжимающей силы | Расчетная модель | Касательные напряжения τ_j по j -м виткам, МПа | | | | | | | | |
|--|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ГКМ КВО 630: $\Delta = 1 \cdot 10^3$ м $f_0 = 15 \cdot 10^3$ м $l = 23 \cdot 10^3$ м $\beta = 0,304$ $d = 1 \cdot 10^3$ м $D = 5 \cdot 10^3$ м $i_p = 8$ $P(t) = 14,7$ Н | Линейная в статике: $N(z) = \text{const}$ | 275 | 225 | 230 | 205 | 175 | 140 | 105 | 65 | 30 |
| | Нелинейная в статике: $N(z) = \text{var}$ | 115 | 112 | 109 | 106 | 104 | 100 | 97 | 94 | 90 |
| | Линейная, с учетом угловых колебаний обоймы | 250 | 220 | 215 | 195 | 170 | 160 | 175 | 80 | 42 |
| | Нелинейная, с учетом угловых колебаний обоймы | 112 | 111 | 110 | 108 | 106 | 103 | 97 | 97 | 95 |

Выводы

Приведена математическая модель шатуна кривошипно-ползунного механизма малогабаритных поршневых машин, выполненного в виде цилиндрической пружины с межвитковым давлением. Уравнение прогибов пружины представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с нелинейными краевыми условиями. Решение нелинейного дифференциального уравнения сводилось к задаче Коши с поиском начальных условий методом Ньютона. В качестве первого приближения рассматривалась линейная постановка задачи с допущением о постоянной продольной силе, действующей на пружину. Предложенная модель может быть использована в проектировочных и прочностных расчетах упругого привода скоростных малогабаритных поршневых машин в микрокомпрессорной и микрокриогенной технике.

Статья рекомендована Организационным комитетом V Международной научно-технической конференции «Современные проблемы машиностроения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Грезин А.К., Зиновьев В.С. Микрокриогенная техника. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
- Газовая криогенная машина: авт. свид. 1101632 СССР. № 3752941/23-06; заявл. 15.11.83; опубл. 06.05.84 // Открытия. Изобретения, 1984. – № 25.
- Газовая криогенная машина: авт. свид. 1508057 СССР. № 4321211/23-06; заявл. 27.10.87; опубл. 23.08.89 // Открытия. Изобретения, 1989. – № 34.
- Бородин, А.В. и др. Применение пружин растяжения в приводе вытеснителя криогенного охладителя // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1989. – № 5. – С. 7–8.
- Хвингия М.В. Вибрации пружин. – М.: Машиностроение, 1969. – 288 с.

- Губанова И.И. Устойчивость пружин с соприкасающимися витками при сжатии // Вопросы динамики и прочности. – Рига: АН ЛатвССР, 1962. – Вып. 8. – С. 52–64.
- На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1984. – 296 с.
- Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (предс.) – Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
- Бородин А.В. и др. Учет динамических нагрузок в кривошипно-шатунном механизме с гибким шатуном // Химическое и нефтяное машиностроение. – 1989. – № 10. – С. 18–20.

Поступила 22.03.2011 г.