УДК 519.635.8:53.09

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЫ

Р.А. Кректулева

Томский политехнический университет
E-mail: rakrekt@mail.ru

Получено аналитическое решение системы гиперболических уравнений, включающей уравнения баланса массы, количества движения, энергии и нелинейное уравнение состояния. Задача решена в гидродинамической постановке для случая слабого ударно-волнового нагружения конденсированного твердого тела с градиентным изменением свойств по координате.

Ключевые слова:
Гиперболические уравнения, моделирование, уравнение состояния, градиентная среда, изоэнтропическое течение, точное решение.

Key words:
Hyperbolic-type equations, simulation, equations of state, graded medium, isentropic flower, exact solution.

Введение

Поиск точных решений систем уравнений в частных производных имеет особое значение в механике сплошных сред и, в частности, в гидродинамике. Точные аналитические решения являются надежным способом оценки правильности решения систем разностных уравнений, а в ряде случаев они заметно ускоряют решение прикладных задач, являются основой инженерных расчетов. В алгоритме поиска точных решений, как правило, используется два приема: замена переменных, с помощью которых исходная система существенно упрощается либо упрощение уравнения состояния среды, которую часто принимают несжимаемой [1–3].

В данной работе предложен способ получения точного решения, в котором не используются указанные упрощения. Более того, рассматриваются нелинейные сжимаемые среды с градиентным распределением свойств, то есть учитывается пространственная неоднородность среды в каком-либо направлении. Такие среды встречаются повсеместно. Это – расплавы многофазных материалов (легкая фракция с поверхности плавно переходит в более тяжелую с глубиной), зона перехода от одного материала к другому при наплавке, сварные соединения, толща морских и океанских глубин, атмосфера и многое другое. Начиная с 80-х гг. прошлого века, активизировалось теоретическое изучение данного класса материалов. Их поведение под действием интенсивных динамических нагрузок обладает рядом специфических особенностей по сравнению с однородными материалами, что потребовало развития новых методов исследования. Так, специально разработанными численными методами было установлено, что распространение ударной волны по градиентному материалу сопровождается возникновением изоэнтропических волн сжатия и разгрузки, которые придают материалу новые функциональные возможности [4, 5].

Более глубокому и полному пониманию обнаруженного эффекта в конденсированных средах сопутствует поиск аналитических решений. В данной работе развивается подход, позволяющий расширить класс точно решаемых задач изоэнтропического течения.

Математическая постановка задачи и метод решения

Рассмотрим одномерное движение жидкости, как сплошной среды, в предположении отсутствия трения и теплообмена. Поскольку каждый элемент жидкости не теряет свою энергию на эти процессы, то плавное, медленное изменение ее состояния должно протекать при постоянной энтропии. Однако при резких перепадах характеристик течения энтропия среды может меняться скачком [6]. Гидродинамику течения подобных жидкостей при неоднородном распределении начальных свойств будем описывать системой уравнений, включающей в себя законы сохранения массы, импульса, энергии и уравнения состояния среды. В массовых (лагранжевых) координатах эта система примет вид [4]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{\rho_0}{\rho},\\ \frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial r},\\ dE=\frac{P}{\rho^2}d\rho+TdS,\\ U=\frac{\partial x}{\partial t},\\ P=P(\rho),\end{gathered}\tag{1}$$

где x – пространственная переменная; r – массовая переменная; ρ_0 – начальная плотность среды; ρ – текущая плотность; U – массовая скорость; P – давление; t – время; E – внутренняя энергия; T – температура; S – энтропия.

Традиционно в механике сплошных сред изучение изоэнтропических течений связано с газами и жидкостями. Это обусловлено, с одной стороны, возможностью экспериментальной проверки существования таких течений, а с другой стороны, наличием аналитического решения для упрощенных моделей сред [6, 7], для которых уравнение состояния можно свести к простому соотношению вида

$$P = A(\rho/\rho_0)^k, \tag{2}$$

здесь A и k – константы материала.

Так, уравнение состояния (2) при k=3 позволяет систему гиперболических уравнений одномерного изоэнтропического течения (1) решить аналитически [7]. Для всех других значений k (равно, как и для других нелинейных уравнений состояния) обычно система (1) решается численно.

Рассмотрим способ, позволяющий находить точные решения системы (1) для более сложных уравнений состояния. В качестве примера возьмем уравнение состояния конденсированной среды вида:

$$P = A(1 - V/V_0) + B(1 - V/V_0)^2, \tag{3}$$

где A и B – константы материала, а V_0 – его начальный удельный объем.

Сформулированная выше одномерная задача гидродинамического течения в пространственных координатах может быть представлена следующей системой интегральных уравнений [6, 8]:

$$\oint \rho dx - \rho U dt = 0,$$
$$\oint \rho U dx - (P + \rho U^2) dt = 0,$$
$$\oint \rho\left(E + \frac{U^2}{2}\right) dx - \rho U\left(E + \frac{U^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) dt = 0,$$
$$P = P(\rho). \tag{4}$$

Проведем ряд преобразований системы интегральных уравнений (4), суть которых сводится к следующему. При переходе от интегральной формы уравнений к дифференциальной форме, как известно, происходит своеобразное кодирование информации, в результате которого часть сведений о процессе становится менее доступной. Например, это касается ударных волн, то есть разрывных решений. Чтобы их получить из системы (1), необходимо использовать дополнительные приемы, в частности, метод характеристик. В то же время система интегральных уравнений (4) включает в себя в явном виде решения с ударными волнами (они носят название уравнений сохранения Ренкина–Гюгонио). Следует отметить, что при поиске аналитического решения дифференциального уравнения важная роль отводится догадке. Требуется придумать цепочку преобразований, которая бы привела исходное уравнение к более простому, решение которого уже известно. В случае системы дифференциальных уравнений объем закодированной информации значительно возрастает, и расшифровать ее на основе только интуиции чаще всего не удается. Следовательно, надо попытаться извлечь необходимую информацию из интегральных соотношений.

В нашем случае решение системы (1) существенно упростится, если получить дополнительную информацию о моделируемом процессе, например, в виде $P(U)$ – связи давления P и массовой скорости U – и связи $P(D_S)$ – давления P и скорости распространения фронта изоэнтропической волны D_S. Попробуем получить эту информацию, исходя из законов сохранения, записанных в форме (4).

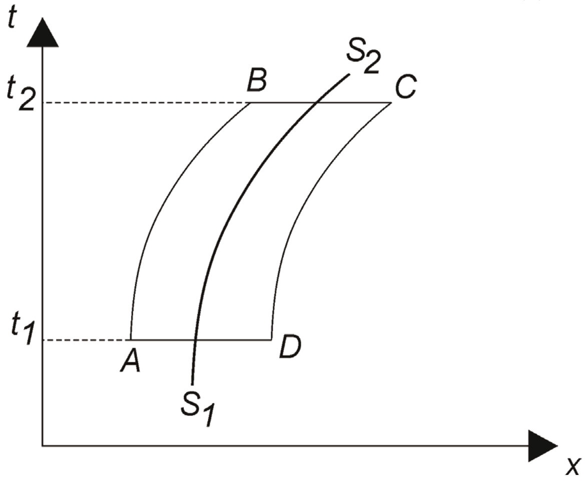

Рисунок. *Схема перехода от интегрирования по контуру к интегрированию вдоль линии*

Поскольку рассматриваются одномерные течения, то изменение параметров течения будет происходить в плоскости, которая перемещается в пространстве с некоторой скоростью $D_S(t)$, определяемой как: $D_S(t)=dx/dt$. Будем считать, что направление скорости частиц конденсированного тела U совпадает с направлением $D_S(t)$. При этом траекторией, по которой передается изоэнтропическое возмущение в координатах x~t, будет некоторая линия S_1S_2. Рассмотрим контур $ABCD$, включающий и траекторию S_1S_2. Пусть возмущение среды распространяется слева направо. Параметры в невозмущенной области обозначим индексом «1», в возмущенной области – индексом «2». Далее, устремим стороны контура AB и CD к линии S_1S_2. Это приведет к тому, что интегралы по верхнему и нижнему основаниям BC и AD в пределе будут равны нулю. Тогда интегральные уравнения (4) примут вид

$$\int_{S_1}^{S_2} (\rho_2 dx - \rho_2 U_2 dt) + \int_{S_2}^{S_1} (\rho_1 dx - \rho_1 U_1 dt) = 0,$$
$$\int_{S_1}^{S_2} [\rho_2 U_2 dx - (P_2 + \rho_2 U_2^2) dt] +$$
$$+ \int_{S_2}^{S_1} [\rho_1 U_1 dx - (P_1 + \rho_1 U_1^2) dt] = 0,$$
$$\int_{S_1}^{S_2} \left[\rho_2\left(E_2 + \frac{U_2^2}{2}\right) dx - \rho_2 U_2 \left(E_2 + \frac{U_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2}\right) dt\right] +$$
$$+ \int_{S_2}^{S_1} \left[\rho_1\left(E_1 + \frac{U_1^2}{2}\right) dx - \rho_1 U_1 \left(E_1 + \frac{U_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1}\right) dt\right] = 0. \tag{5}$$

Интегрирование вдоль линии S_1S_2 эквивалентно интегрированию по времени в пределах t_1–t_2. Учтем также, что вдоль траектории S_1S_2

$$dx = D_s dt.$$

Тогда система (5) примет вид:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\rho_2 D_s - \rho_2 U_2)dt - \int_{t_1}^{t_2}(\rho_1 D_s - \rho_1 U)dt = 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\rho_2 U_2 D_s - P_2 - \rho_2 U_2^2)dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}(\rho_1 U_1 D_s - P_1 - \rho_1 U_1^2)dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho_2\left(E_2 + \frac{U_2^2}{2}\right)D_S - \rho_2 U_2\left(E_2 + \frac{U_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2}\right)\right]dt -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\left[\rho_1\left(E_1 + \frac{U_1^2}{2}\right)D_S - \rho_1 U_1\left(E_1 + \frac{U_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1}\right)\right]dt = 0. \quad (6)$$

В силу произвольности моментов времени t_1 и t_2 их можно опустить. Так, первое из уравнений (6) перепишется в виде:

$$\rho_2(D_S - U_2) - \rho_1(D_S - U_1) = 0.$$

Перегруппируем члены этого уравнения в удобном для дальнейшего исследования виде:

$$D_S(\rho_2 - \rho_1) - \rho_2 U_2 + \rho_1 U_1 = 0. \quad (7)$$

Добавим к уравнению (7) члены $\pm\rho_1 U_2$ и учтем, что величины с индексами «1» и «2» различаются на бесконечно малую величину. Получим, что

$$D_S\partial\rho - U_2\partial\rho - \rho_1\partial U = 0.$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$D_S = U_2 + \frac{\partial U}{\partial\rho}\rho_1. \quad (8)$$

Второе уравнение из (6) запишем в виде

$$\rho_2 U_2(D_S - U_2) - \rho_1 U_1(D_S - U_1) - P_2 + P_1 = 0.$$

Подставим в него значение U_2, определяемое из соотношения (8) и проведем те же операции, что и выше, в результате чего получим следующее выражение:

$$D_S = U_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Таким образом, путем соответствующих замен и подстановок, третье уравнение в системе (6) приводится к виду

$$dE = \frac{P_2 d\rho}{\rho_2^2}, \quad (10)$$

что отвечает первому началу термодинамики при изоэнтропическом деформировании.

Выведем еще одно полезное соотношение. Добавляя к уравнению (7) члены $\pm\rho_2 U_1$ и проводя указанным выше способом преобразования, получим выражение

$$D_S = U_1 + \frac{\partial U}{\partial\rho}\rho_2. \quad (11)$$

Соотношение (10) не несет новой информации, а, вот, уравнения (9) и (11) представляют несомненный интерес.

Представим, что справа от линии S_1S_2 начальное состояние среды невозмущенное, среда покоится, т. е. U_1=0, тогда уравнения (9) и (11) объединяются в следующие равенства (индексы опущены):

$$D_S = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)^{\frac{1}{2}} = -\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}. \quad (12)$$

Для удобства вычислений заменим в равенстве (12) плотность объемом (ρ=1/V):

$$D_S = \left(-\frac{\partial P}{\partial V}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial U}{\partial V}. \quad (13)$$

Поскольку предполагается, что скорость $D_S \neq 0$, то из (13) вытекает, что давление P и массовая скорость U являются функциями объема, а это значит, что второе уравнение в системе (1) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial t} = -V_0\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (14)$$

Подставляя в (14) значение P, определяемое соотношением (3), и учитывая второе равенство (13), получим, что

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V_0^{\frac{1}{2}}\frac{\partial V}{\partial r}\left[A + 2B\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Это уравнение является динамическим уравнением изоэнтропы. По существу оно включает в себя всю необходимую информацию о процессе изоэнтропического течения. Зная зависимость $V(r,t)$ при соответствующих начальных и граничных условиях можно с точностью до константы определить и все остальные параметры течения, входящие в (1).

Изоэнтропическое течение в градиентной среде

Под градиентными средами понимаются такие среды, исходные свойства которых плавно изменяются по объему. В данном случае целесообразно рассмотреть среду с переменной плотностью или, что то же самое, с переменным удельным объемом, поскольку ρ=1/V. Пусть начальный удельный объем линейно увеличивается (или уменьшается) по координате в соответствии с формулой

$$V_0(x,0) = a + bx, \quad (16)$$

где a и b – константы. Тогда решение уравнения в частных производных (15) с начальным условием (16) будет представлять решение задачи Коши, которая в общем виде записывается следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + b(V)\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad -\infty < x < \infty,$$

$$V(x,0) = \varphi(x) \qquad -\infty < x < \infty.$$

Решение задачи Коши задается соотношением

$$V = \varphi[x - b(V)t]. \quad (17)$$

Согласно формуле (17) решение уравнения (15) с начальным условием (16) можно выразить в явном виде

$$V_{1,2}=a+br-\frac{b^2t^2C_2}{2}\pm$$
$$\pm bt\left(\frac{b^2t^2C_2^2}{8}-C_2(a+br)+C_1\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (18)$$

здесь $C_1=V_0(A+2B)$, $C_2=2B$.

Разделив выражение (18) на V_0 и проинтегрировав его обе части по r, получим значение пространственной переменной x в виде:

$$x=x_0+\frac{1}{V_0}\left\{\begin{array}{l} r\left(a+\dfrac{br}{2}-\dfrac{b^2t^2C_2}{2}\right)\mp \\ \mp\dfrac{2t}{3C_2}\left[\dfrac{b^2t^2C_2^2}{8}-C_2(a+br)+C_1\right]^{\frac{3}{2}}\end{array}\right\}. \qquad (19)$$

Значение $P(x,t)$ определяется подстановкой выражения (18) в уравнение (3). Дифференцируя пространственную координату x по времени t, из соотношения (19) находим массовую скорость $U(x,t)$.

В решении (19) знак «$\mp$» перед квадратной скобкой относится к изоэнтропическому сжатию («–») или к изоэнтропическому растяжению («+»).

Из решения (18) следует, что при постоянном начальном значении функции объема (полагаем b=0) изоэнтропическое течение, как таковое, отсутствует, то есть уравнение (15) имеет тривиальное решение

$$V=a=\text{const}.$$

Ситуация становится иной, если начальное распределение объема в некоторой точке меняется скачком, что характерно для слоистых сред, например, как в соотношении (20):

$$V=\begin{cases} a, & r<0 \\ \dfrac{a}{2}, & r\geq 0. \end{cases} \qquad (20)$$

В этом случае целесообразно искать решение уравнения (15) методом характеристик. При r<0 это уравнение выглядит как:

$$r=r_0+tV_0^{\frac{1}{2}}\left[A+2B\left(1-\frac{a}{V_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (21)$$

При r≥0 оно будет таким:

$$r=r_0+tV_0^{\frac{1}{2}}\left[A+2B\left(1-\frac{a}{2V_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

На характеристиках, как известно, решения постоянны: вдоль характеристики (21) $V=a$, вдоль характеристики (22) $V=a/2$.

Из уравнений характеристик видно, что характеристики пересекаются между собой, следовательно, в момент их пересечения будет возникать ударная волна, и решение перестает быть изоэнтропическим.

Из этих примеров видно, что дополнение системы (1) полученными термодинамическими соотношениями (13) существенно упрощает поиск ее решения, не уменьшая информации о процессе. Применение соотношений (13) может быть полезным при решении не только задачи Коши, но и смешанной задачи, с заданными начальными и граничными условиями.

Выводы

1. Предложен алгоритм поиска точного решения системы дифференциальных уравнений гидродинамического типа за счет введения дополнительной информации, полученной из анализа интегрального аналога данной системы.
2. Выведены аналитические соотношения, устанавливающие связь параметров изоэнтропического течения (массовую скорость, скорость фронта изоэнтропического движения, давление, плотность) между собой.
3. В результате проведенных преобразований получены точные решения системы гиперболических уравнений гидродинамического типа, из которых установлены условия существования стационарных, изоэнтропических и ударно-волновых течений для однородных, градиентных и слоистых сред. Полученные решения для однородных и слоистых жидкостей соответствуют классическим представлениям механики сплошных сред. Решения для нелинейных градиентных сред являются новыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А.Д., Аристов С.Н. Системы уравнений гидродинамического типа: точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 428. – № 2. – С. 180–185.
2. Броман Г.И., Руденко О.В. Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180. – № 1. – С. 97–104.
3. Ludlow D.K., Clarkson P.A., Baccom A.P. New Similarity Solution of the Unsteady ncompressible Boundary – Layer equations // J. Mech. and Appl. Math. – 2000. – V. 53. – P. 175–206.
4. Кректулева Р.А. Закономерности трансформации плоских ударных волн в градиентных средах // Механика деформируемого твердого тела / под ред. В.П. Глазырина. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1992. – С. 35–40.
5. Герасимов А.В., Кректулева Р.А. Поведение материалов с градиентными упрочняющими покрытиями при интенсивных динамических нагрузках // Перспективные материалы. – 1997. – № 6. – С. 13–18.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
7. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М.: Наука, 1971. – 854 с.
8. Люкшин Б.А., Герасимов А.В., Кректулева Р.А., Люкшин П.А. Моделирование физико-механических процессов в неоднородных конструкциях. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. – 272 с.

Поступила 07.07.2011 г.