ТЕПЛОФИЗИКА

УДК 621.039.534.54:621.364:634.3

О ЗАКОНЕ СВЯЗИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИЗБЫТОЧНЫХ ТЕМПЕРАТУР АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

В.С. Логинов
Томский политехнический университет, г. Томск
E-mail: loginov@ped.tpu.ru

В [1] предложена зависимость между избыточными нестационарными температурами в теле конечных размеров (или превышениями температур в теле над температурой окружающей средой), в котором внутренние источники теплоты отсутствуют.

Эта зависимость имеет вид

$$\Phi(X,Y,Fo)=\Phi(X^*,Y,Fo)\Phi(X,Y^*,Fo)\Big/\Phi(X^*,Y^*,Fo)\quad, \qquad (1)$$

здесь Ф(X,Y,Fo) – избыточная температура (напряженность магнитного поля, относительное распределение нейтронного потока) в теле;

X^*,Y^*,X,Y,Fo – соответственно безразмерные фиксированные и текущие координаты, число Фурье.

Эта зависимость подтверждает известный «метод произведения решений»[2,3]. Далее в [1] было показано, что существует аналогичная зависимость (1) между стационарными избыточными температурами в активном элементе конечных размеров, внутри которого действуют постоянные источники теплоты, независящие от координат.

Зависимость (1) была обоснована в [1] на том основании, что в большинстве случаев в аналитических решениях задач теплопроводности можно ограничиться одним первым членом ряда.

Это справедливо только в стадии регулярного теплового режима.

В реальном энергетическом оборудовании внутренние источники теплоты (удельные электрические потери, относительное распределение потоков нейтронов и т.д.) в их активных элементах распределены неравномерно по координатам и во времени.

Для конкретного активного элемента они зависят от геометрических размеров, электротеплофизических свойств [4-8].

В [9] на основе опытных данных [5-7 и др.] было показано, что зависимость (1) может быть использована для восстановления распределения напряженности магнитного поля в магнитных системах скобообразного типа или относительного распределения нейтронного потока в активной зоне реактора. Эта зависимость (1), справедливая в стадии теплового режима, выполняется не всегда с заданной точностью при других стадиях тепловых процессов, а только при строго определенном сочетании физических и геометрических параметров.

Целью данной работы является формулировка условий, которые позволят найти такое сочетание условий охлаждения, теплофизических свойств и геометрических размеров при нестационарном тепловом режиме, когда будет точно выполняться связь (1).

Теорема. Пусть функция внутренних источников теплоты имеет вид

$$W(X,Y,Fo)=W_1(X)W_2(Y)E(Fo), \qquad (2)$$

где $W_1(X)$, $W_2(Y)$, $E(Fo)$ – непрерывные и интегрируемые функции, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$W_{1XX}=-\mu_i^2 W_1, W_{2YY}=-\mu_i^2 W_2, 0\prec X\prec 1, 0\prec Y\prec R, Fo\succ 0, \qquad (3)$$

краевым условиям

$$W(X,Y,0)=f(X,Y)=W_1(X)W_2(Y), E(0)=1;$$

$$W_X(0,Y,Fo) \ - \ Bi_2 W(0,Y,Fo)=0;$$

$$W_X(1,Y,Fo) \ + \ Bi_1 W(1,Y,Fo)=0;$$

$$W_Y(X,0,Fo)- \ Bi_4 W(X,0,Fo)=0; \qquad (4)$$

$$W_Y(X,R,Fo)+Bi_3 W(X,R,Fo)=0;$$

μ_i -собственные числа. Они являются корнями двух трансцендентных уравнений

$$ctg\mu_i=\frac{\mu_i^2-Bi_1Bi_2}{\mu_i(Bi_1+Bi_2)}, \qquad (5)$$

$$ctg\mu_i R=\frac{\mu_i^2-Bi_3Bi_4}{\mu_i(Bi_3+Bi_4)} \ . \qquad (6)$$

Тогда уравнение температурного поля в твэле будет иметь вид

$$\theta(X,Y,Fo)=W_1(X)W_2(Y)\xi(Fo) \ , \qquad (7)$$

здесь $\xi(Fo)=\exp(-2\mu_i^2 Fo)+Po_0\int\limits_0^{Fo}E(Fo')\exp[-2\mu_i^2(Fo-Fo')]dFo', (8)$

которая является решением системы уравнений

$$\xi'(Fo)+2\mu_i^2\xi(Fo)=Po_0E(Fo),$$

$$\xi(Fo=0)=1 \, . \qquad (8a)$$

При этом данная функция $\theta(X,Y,Fo)$ удовлетворяет связи (1), уравнению энергии

$$\theta_{Fo}=\theta_{XX}+\theta_{YY}+Po_0W_1(X)W_2(Y)E(Fo), 0\prec X\prec 1, \quad 0\prec Y\prec R, Fo\succ 0$$

(9)

и краевым условиям аналогичным (4), (8a).

Доказательство. Аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности с внутренними источниками теплоты при краевых условиях аналогичных (4), полученное методом конечных интегральных преобразований [10], можно записать так

$$\theta(X,Y,Fo)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{T(\mu_n,\gamma_m,Fo)K_1(\mu_n,X)K_2(\gamma_m,Y)}{\int\limits_0^1 K_1^2(\mu_n,X')dX'\int\limits_0^R K_2^2(\gamma_m,Y')dY'}\quad, \qquad (10)$$

здесь

$K_1(\mu_n,X)=\mu_n\cos(\mu_n X)+Bi_2\sin(\mu_n X)$ -

ядро конечного интегрального преобразования по координате X;

μ_n - собственные числа, найденные из (5);

$$K_2(\gamma_m,Y)=\gamma_m\cos\gamma_m Y+Bi_4\sin\gamma_m Y \text{ -}$$

ядро конечного интегрального преобразования по координате Y;

γ_m - собственные числа, полученные из (6);

$$T(\mu_n,\gamma_m,Fo)=\exp[-(\mu_n^2+\gamma_m^2)Fo]\{C+\int\limits_0^{Fo}\exp[(\mu_n^2+\gamma_m^2)Fo'+\to$$

$$\to+\int\limits_0^{Fo}\overline{\overline{Po(\mu_n,\gamma_m,Fo')}}\exp[(\mu_n^2+\gamma_m^2)Fo']dFo'\},$$

где $C=\int\limits_0^1\int\limits_0^R f(X',Y')K_1(\mu_n,X')K_2(\gamma_m,Y')dX'dY'$; (11)

$$\overline{\overline{Po(\mu_n,\gamma_m,Fo')}}=\int\limits_0^1\int\limits_0^R Po(X',Y',Fo')K_1(\mu_n,X')K_2(\gamma_m,Y')dX'dY'.$$

Среди функций внутренних источников теплоты найдётся такая непрерывная функция

$$Po(X,Y,Fo)=Po_0W_1(X)W_2(Y)E(Fo)\quad,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы (2) – (6):

$$\left|\begin{array}{l} W_1(X)=\mu_i\cos\mu_i X+Bi_2\sin\mu_i X\quad, \\ W_2(Y)=\mu_i\cos\mu_i Y+Bi_4\sin\mu_i Y\quad, \\ f(X,Y)=W_1(X)W_2(Y)\quad. \end{array}\right| \qquad (12)$$

После подстановки выражений (12) в решение (10) с учетом всех выражений (11) и ортогональных свойств собственных функций получим $\theta(X,Y,Fo)=W_1(X)W_2(Y)\xi(Fo)$,

которое совпадает с выражениями (7),(8).

С другой стороны, если искомое уравнение температурного поля удовлетворяет связи (1), то оно удовлетворяет уравнению энергии (9) и краевым условиям (4), (8а).

Как видно из связи (1), искомая функция температурного поля представляет собой произведение трех функций, т.е. имеем функцию с разделяющими переменными:

$$\theta(X,Y,Fo)=\eta(X)G(Y)\psi(Fo)\quad, \qquad (13)$$

которая после подстановки в дифференциальное уравнение (9) даёт

$$\psi_{Fo} = \frac{\eta_{XX}}{\eta}\psi(Fo) + \frac{G_{YY}}{G}\psi(Fo) + \frac{Po_0 W_1(X) W_2(Y) E(Fo)}{\eta(X) G(Y)} . \quad (14)$$

Допустим, что $\eta_{XX}/\eta = -\mu_i^2,\ G_{YY}/G = -\mu_i^2,\ \psi(0) = L(\mu_i)$,

тогда $W_1(X) = \eta(X)\quad ,W_2(Y) = G(Y)$, (14a)

где μ_i - параметр разделения переменных,

$$L(\mu_i) = \int_0^1\int_0^R W_1(X')W_2(Y')dX'dY' \quad .$$

С учётом этих допущений уравнение (14) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d\psi}{dFo} = -2\mu_i^2\psi(Fo) + Po_0 E(Fo) \quad (15)$$

при начальном условии

$$\psi(Fo = 0) = L(\mu_i) \quad . \quad (16)$$

Решение уравнения (15) с учётом (16) имеет вид зависимости (8),т.е.

$$\psi(Fo) = \xi(Fo) \quad .$$

Подставляя в (13) функции согласно зависимостям (8),(14a) получим уравнение (7), что и требовалось доказать.

Обсуждение результатов. В реальных случаях закон связи (1) не всегда справедлив. С целью выяснения роли нестационарного теплового режима было проведено исследование тепловых состояний нажимной плиты турбогенератора [4] при изменении параметров, влияющих на функцию Po(X,Y,Fo).

Известно [2], что на точность расчёта температурного поля оказывает влияние ограниченное число членов, например, ряда (10) и число Fo .

Выбор ограниченного числа членов ряда зависит от минимальной невязки уравнения энергии

$$\varsigma = \frac{\partial^2\theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} + Po(X,Y,Fo) - \frac{\partial\theta}{\partial Fo} . \quad (18)$$

Это следует на примере расчета для конкретного нестационарного теплового режима нажимной плиты турбогенератора [4], для которой были приняты следующие исходные данные: R=7.5, Po_0=112, N=M=s=0, D=-1/R^2, Bi_1=0.8, Bi_2=1.6, Bi_3=0.4, Bi_4=1.2.

При этих данных решение (10) было проверено при Fo=5.0 с численными данными [4], которые совпали практически полностью.

При этих условиях закон связи [1] выполняется с точностью менее 5%.

Иная наблюдается картина, если не учитывать минимальную невязку ζ по (18) и общее число членов ряда (10). Так при Fo=0.1 и числе членов ряда k=p=10 заметно (до 14.5%) отличаются значения температур θ(X,Y,Fo), если учитывать k=10, p=20. В последнем случае наблюдается самая минимальная невязка ζ и закон связи [1] выполняется с максимальной погрешностью ±5,5% .

При изменении функции тепловыделения (рис.1) (N=s=2) и неизменных условиях охлаждения, и геометрических размерах будут наблюдаться противоречивые результаты. Например, в точке X=0, Y=0 θ=3.656, ζ=10,32 (k=p=10) и θ=3.838, ζ=0.0 при k=10, p=20. В зоне максимальной температуры (X=0.25, Y=0.25R) соответственно наблюдается в первом случае θ =4.879, а во втором случае –4.84 .

Максимальная погрешность -ε,% восстановления температур по закону связи [1] (подробно другие примеры рассмотрены, например, в [8,9,12]) для этого случая составляет ±17.4% .

Выводы:

1. При проектировании активных элементов энергетического оборудования рекомендуется проведение анализа погрешностей расчёта температурного поля с учётом изменения картины тепловыделения в процессе эксплуатации.
2. Целесообразно при разработке численных или приближенных методов расчёта нестационарных температурных полей в активных элементах наряду с сопоставлением опытных данных по конкретной энергетической машине приводить данные по невязке уравнения энергии.

Обозначения:

$\theta = \dfrac{T(x,y,\tau) - T_{ж}}{T_M}$ - безразмерная температура, $T(x,y,\tau)$, $T_ж$, T_M- соответствующие температуры; индексы: ж- среда, М- масштаб ;

$Po(X,Y,Fo) = \dfrac{q_V(x,y,\tau)b^2}{\lambda_x T_M}$ - число Померанцева;

$Bi_{1,2} = \dfrac{\alpha_{1,2} b}{\lambda_x}; Bi_{3,4} = \dfrac{\alpha_{3,4} b}{\sqrt{\lambda_x, \lambda_y}}$ - числа Био;

$X = \dfrac{x}{b}; Y = \dfrac{y}{b}\sqrt{\dfrac{\lambda_x}{\lambda_y}}; R = \dfrac{H}{b}\sqrt{\dfrac{\lambda_x}{\lambda_y}}$ - безразмерные координаты; ***b***, ***H*** - геометрические размеры; λ_x, λ_y-коэффициенты теплопроводности;

α_i (i=1,2,3,4)- коэффициент теплообмена; Fo=$\dfrac{a\tau}{b^2}$ -число Фурье.

Литература:

1. Бойков Г.П. Закон связи между избыточными температурами тел конечных размеров // Инженерно-физический журнал, 1962, Т.5, №3.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности.- М.: Высшая школа, 1967.
3. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник/ Е.В.Аметистов, В.А.Григорьев, Б.Т. Емцев и др.; Под общ. ред. В.А. Григорьева и В.М.Зорина.- М.: Энергоиздат, 1982.
4. Данько В.Г. Тепловой расчёт нажимного фланца турбогенератора//Электротехника, 1970, №10.
5. Один аналитический метод расчета магнитных систем скобообразного типа / Б.А. азаров, Г.Б. Жевна, А.В. Подольский, Д.С. Торф // Журнал технической физики, 1980, Т.50, в.12.
6. Гурченок А.А. Исследование процесса охлаждения в магнитопроводах трансформаторов на электрических моделях// Энергетика. Известия вузов, 1960, №3.

7. Логинов В.С, Гейзер А.А. Экспериментальная проверка закона связи между избыточными температурами в обмотке бетатрона типа ПМБ-6.// Известия Томск. политехн. ин-та, 1974, Т. 279.
8. Коновалова Л.С., Логинов В.С. Расчет максимальной температуры магнитопроводов трансформаторов и бетатронов// Электротехника, 1982, №11.
9. Логинов В.С., Милютин Г.В., Чистякова Г.П. Экспресс-анализ картины полей по информации на границе активного элемента ускорителя и реактора// Инженерно-физический журнал, 1989,Т.56, №1.
10. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высш.шк., 1970.
11. Логинов В.С. О законе связи между избыточными температурами в полом активном цилиндрическом элементе// Известия РАН. Энергетика, 1995, №3.
12. Моделирование тепловыделяющих систем: Учебное пособие/ А.Р. Дорохов, А.С. Заворин, А.М. Казанов, В.С. Логинов – Томск: Изд-во НТЛ, 2000.
13. Логинов В.С. Приближенный расчет интенсивности теплообмена на поверхности магнитопроводов трансформаторов и бетатронов// Электротехника, 1983, №7.

УДК 536.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛО – И МАССООБМЕНА В ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Г.Г. Медведев, А.Р. Дорохов, В.И. Максимов
Томский политехнический университет, г. Томск
E-mail: maks@ped.tpu.ru

В работе [1,2] приведены экспериментальные данные по коэффициентам массоотдачи при обтекании потоком влажного воздуха смоченной «гладкой» поверхности в адиабатных условиях и на влажной поверхности, которая располагалась за уступом или на дне прямоугольной полости (каверны). Как было отмечено, при обтекании гладкой поверхности и поверхности с уступом величина коэффициента массоотдачи существенно не отличается. Однако при обтекании каверны он выше других, что обусловлено наличием вихря и отсутствием застойной зоны. За уступом, с повышением скорости потока газа, застойная зона заменяется обширным вихрем, при котором массообмен, в силу турбулентности потока, начинает возрастать и становится выше, чем у пластины.

В данной работе с целью проверки достоверности поставленных опытов была проведена обработка полученных данных согласно известной зависимости:

$$St_h = St_T \pm St_D \frac{r\Delta\bar{c}}{c_{p2}\Delta\bar{T}}. \qquad (1)$$

Результаты сравнения показаны на рис.1. Незначительное отклонение экспериментальных точек от диагональной линии свидетельствует о приемлемой точности проведенных опытов. Кроме того, результаты опытов были сопоставлены с известными в литературе зависимостями [3,4]. Для случая проницаемой пластины при несущественном влиянии неизотермичности на теплофизические свойства несущего