МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

Е. С. Иванникова, Н. А. Машлыкин
Научный руководитель профессор С.Н. Харламов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия

Идеальная жидкость – это жидкость без внутреннего трения. Она является абстракцией. Реальные жидкости обладают внутренним трением, называемым вязкостью, в той или иной степени. Вязкость проявляется в том, что движение, возникшее в жидкости или газе, постепенно прекращается, за отсутствием действующих на это причин. Сопротивление жидкости к изменению формы описывают внутренним трением (динамической вязкостью). Величину внутреннего трения жидкости t

$$\tau = \pm\mu\frac{dy}{dx}, \qquad (1)$$

где $\frac{dy}{dx}$ – градиент в направлении перпендикулярном течению, μ абсолютная и динамичная вязкость жидкости. Кинематическая вязкость определяется как отношение динамической вязкости к плотности:

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}.$$

Одной из задач расчета течения является определение поля давлений в зависимости от времени и координат. В геометрической области в каждой точке вязкой жидкости имеется три компоненты давления, для несжимаемой жидкости:

$$P_x = P - 2\mu\frac{dU_x}{dx};P_y = P - 2\mu\frac{dU_y}{dx};P_z = P - 2\mu\frac{dU_z}{dx}. \qquad (2)$$

При необходимости нахождения среднего давления решают систему уравнений Навье-Стокса.

Рассматриваем область течения D, которая ограничена твердыми стенками C2, C3, C4 и свободной поверхностью C1. Высота данного канала h, а ширина l. Жидкость несжимаемая, вязкая, а течение установившееся, стационарное и не турбулентная (рисунок 1).

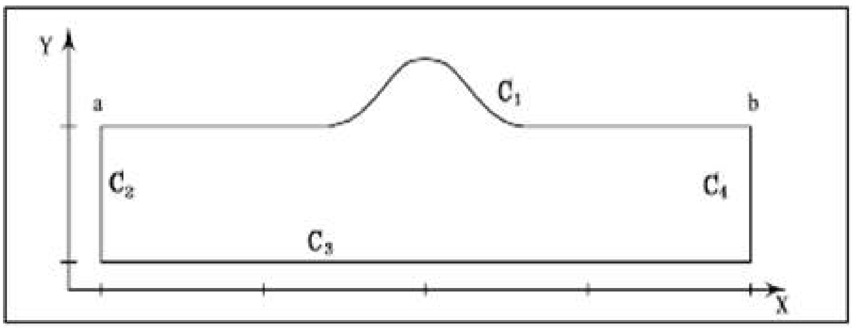

Рис. 1. Течение вязкой жидкости в канале прямоугольной форме

Общая задача гидродинамики сводится к решению дифференциальных уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + v\Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Система уравнений образуется из уравнений движения по трем направлениям уравнения вязкости (неразрывности). Так как наша жидкость несжимаемая, тогда ρ =const и, так как движение установившееся, то:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Траектории движения частиц будут параллельными относительно друг друга и прямолинейными, потому что движение нашей жидкости безвихревое. Это определяет компоненты скорости: w=0, v=0.

Учитывая то, что движение параллельное и прямолинейное, проекция u (вектора скорости) будет постоянной и будет меняться только в поперечном направлении к траекториям:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

$$F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

F_x=g sin=α, так как в данном варианте sin=1, то направление всех сил приравняется к ускорению свободного падения.

Давление выражаем, как сумму статической составляющей и динамической:

$$p = p_c + p_д \qquad (5)$$

Из уравнения равновесия определяем статическое давление:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Динамическое давление не будет зависеть от y и z. Так как левая часть уравнения зависима от x, это определяет то, что левые и правые части должны быть равны к одной величине:

$$\frac{\partial P_д}{\partial x} = const. \qquad (7)$$

Это объясняет постоянный перепад давления на единицу длины. Исходя из этого, задача свелась к дифференциальному уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P_д}{\partial x}. \qquad (8)$$

В уравнении (13) правая часть является постоянной величиной (границы, вдоль которых течет вода, неподвижны и не деформируются, что удовлетворяет условию параллельного прямолинейного движения). Приводим задачу к задаче Пуассона для при нужных граничных условиях, используя условия прилипания. Уравнение сводится к уравнению Лапласа заменой, потому что правая часть остается постоянной:

$$u = \varphi + \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_д}{\partial x}(y^2 + z^2). \qquad (9)$$

При замене задача будет сводится к уравнению Лапласа для функции φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (10)$$

- при граничных условиях на неподвижных стенках:

$$\varphi(0,z) = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_д}{\partial x}z^2; \varphi(l,z) = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_д}{\partial x}(z^2 + l^2); \varphi(y,0) = -\frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_д}{\partial x}y^2, \quad (11)$$

- на свободной границе:

$$\varphi(y,h) = U - \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_д}{\partial x}(y^2 + h^2), U = const. \qquad (12)$$

После некоторых преобразований уравнение Лапласа примет вид:

$$\varphi(y,z) = \sum_n \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_Д}{\partial x} cos\frac{\pi n y}{l}\left[A_n cos\frac{\pi n z}{h} + B_n sin\frac{\pi n z}{h}\right]. \qquad (13)$$

После чего получаем искомое давление:

$$\square_Д(\square,\square) = \sum_n \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_Д}{\partial x} cos\frac{\pi n y}{l}\left[A_n cos\frac{\pi n z}{h} + B_n sin\frac{\pi n z}{h}\right] + \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P_Д}{\partial \square}(y^2 + z^2). \qquad (14)$$

Литература

1. Сборник задач по уравнениям математической физики \ Под ред. В. С. Владимирова.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
2. Динамика вязкой не сжимаемой жидкости \ Слёзкин Н.А.–М.: 1955. – 519 с.
3. КМГЭ для решения плоских задач Гидродинамики \ Учебное пособие \ К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов. – Кемерово: 2001.