БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО ЗАКОНА ФУРЬЕ

И.А. Панасенко
Научный руководитель профессор С.Н. Харламов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск, Россия

Процессы переноса тепла являются одним из основных разделов современной науки. Одним из основных физических свойств, рассматриваемых в этой области, является теплопроводность. Аналитическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества; она рассматривает вещество как однородное и изотропное.

Основной закон теплопроводности может быть сформулирован так: плотность теплового потока прямо пропорциональна напряженности температурного поля, или плотность теплового потока прямо пропорциональна градиенту температуры, т. е.:

$$q = \lambda E = -\lambda\, grad\, T = -\lambda \nabla T = -\lambda 1_n \frac{\partial T}{\partial n} \tag{1}$$

где λ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности;
E – вектор напряженности температурного поля;
l_n — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в сторону увеличения температуры.

Чтобы выяснить физический смысл коэффициента теплопроводности, напишем это соотношение для стационарного одномерного температурного поля

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} \equiv 0 \right) \tag{2}$$

Если градиент температуры будет величиной постоянной, то можно написать:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = const \tag{3}$$

На основании этого получаем:

$$\frac{Q}{S\tau} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} \tag{4}$$

где Q —количество тепла, протекающего за время τ;
S — площадь изотермической поверхности.

Обозначив объемную концентрацию внутренней энергии тела через u_v, скалярную величину градиента температуры можно написать так:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left(\frac{\partial T}{\partial u_\upsilon} \right) \frac{\partial u_\upsilon}{\partial n} = \frac{1}{C_\upsilon} \frac{\partial u_\upsilon}{\partial n} \tag{5}$$

где $C_\upsilon = \left(\frac{\partial u_\upsilon}{\partial T} \right)_\upsilon = c_\upsilon \gamma$ — изохорная объемная теплоемкость тела (Дж/м^3*град);

c_v — удельная изохорная теплоемкость (Дж/кг*град), γ — плотность тела (кг/м^3).

Следовательно, уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$q = -1_n \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -a_\upsilon \nabla u_\upsilon \tag{6}$$

где $a_\upsilon = \frac{\lambda}{C_\upsilon} = \frac{\lambda}{c_\upsilon \gamma}$ — коэффициент температуропроводности при постоянном объеме тела

Коэффициент a_v равен количеству тепла, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, при перепаде объемной концентрации внутренней энергии в 1 Дж/м^3 на единицу длины нормали, имеет размерность [a_v]=м^2/сек и по своему физическому смыслу характеризует молекулярный перенос внутренней энергии тела.

При постоянном давлении (p=const) коэффициент температуропроводности определяется соотношением:

$$a_p = \frac{\lambda}{C_p} = \frac{\lambda}{c_p \gamma} \tag{7}$$

где $C_p = c_p \gamma = \left(\frac{\partial H_\upsilon}{\partial T} \right)_p$ объемная изобарная теплоемкость тела, c_p – удельная изобарная теплоемкость тела;

H_v — объемная концентрация энтальпии (Дж/м^3).

По своему физическому смыслу коэффициент температуропроводности a_p характеризует перенос энтальпии тела путем молекулярного движения.

Закон теплопроводности теперь можно написать так:

$$q = -1_n \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial H_\upsilon} \right) \frac{\partial H_\upsilon}{\partial n} = -a\ \nabla H_\upsilon \tag{8}$$

Для твердых тел удельная изохорная теплоемкость c_v мало отличается от удельной изобарной теплоемкости c_p, поэтому можно считать $c_v = c_p = c$. В аналитической теории теплопроводности твердых тел коэффициенты температуропроводности считают одинаковыми независимо от условий сопряжения тела с окружающей средой, т. е.

Для твердых тел удельная изохорная теплоемкость c_v мало отличается от удельной изобарной теплоемкости c_p, поэтому можно считать $c_v = c_p = c$. В аналитической теории теплопроводности твердых тел коэффициенты температуропроводности считают одинаковыми независимо от условий сопряжения тела с окружающей средой, т. е.

$$a = a_p = a_\upsilon = \frac{\lambda}{c_\gamma} \tag{9}$$

Вернемся к основному соотношению. Скалярная величина вектора теплового потока равна

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \tag{10}$$

Составляющие вектора q представим в виде проекций по осям координат x, y, z и определим количество тепла, проходящее через элементарную площадку dS_l, расположенную под углом φ к изотермической поверхности (точнее, к плоскости, касательной к изотермической поверхности):

$$q_l = q\cos\varphi = \frac{dQ}{d\tau}\frac{1}{dS_n}\cos\varphi = \frac{dQ}{d\tau}\frac{1}{dS_l} \tag{11}$$

где $dS_n = dS_l \cos\varphi$ проекция площадки dS_l на изотермическую поверхность.

Из равенства выше получаем:

$$dQ = q_l dS_l d\tau = q(dS_l \cos\varphi)d\tau = q dS_n d\tau \tag{12}$$

Количество тепла Q, протекающее за время τ через поверхность S конечных размеров, равно

$$Q = \lambda \int_0^\tau \int_{(S)} \frac{\partial T}{\partial l} dS_l d\tau \tag{13}$$

Следовательно, для определения количества тепла, протекшего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри тела. Нахождение температурного поля и составляет главную задачу аналитической теории теплопроводности.

Скорость распространения тепла равна

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\lambda}{c_\gamma \tau_r}} \tag{14}$$

где τ_r — постоянная времени или время релаксации.

Процессы релаксации, как и процессы диффузии, неразрывно связаны с хаотическим тепловым движением молекул. Если период релаксации очень велик по сравнению с обычным временем наблюдения, то жидкость ведет себя, как твердое тело. Если период релаксации очень мал, то тело ведет себя как вязкая жидкость.

Для вязкоупругих (неньютоновских) жидкостей напряжение сдвига p зависит от меры деформации сдвига p

Вблизи от поверхности тела это соотношение можно написать так:

$$p = \eta \frac{d\varepsilon}{d\tau} - \frac{\eta}{G}\frac{dp}{d\tau} \tag{15}$$

где η — коэффициент вязкости, G — модуль упругости на сдвиг, $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$ — скорость деформации сдвига.

Величина $\frac{\eta}{G}$ равна периоду релаксации $\tau_r = \frac{\eta}{G}$. Обозначим скорость деформации через $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{d\tau}$. Тогда будем иметь

$$p = \eta\dot{\varepsilon} - \tau_r \frac{dp}{d\tau} \tag{16}$$

Если период релаксации мал ($\tau_r \to 0$), то из уравнения (16) получаем уравнение Ньютона вязкого течения жидкости для ламинарного плоскопараллельного потока:

$$p = \eta\dot{\varepsilon} = -\eta \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \tag{17}$$

где y — нормаль к направлению движения x, ω_x — скорость движения жидкости.

Уравнение (17) является приближенным, справедливым для частного случая плоскопараллельного ламинарного потока. В общем случае напряжение трения равно

$$p = -\eta\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x}\right) \tag{18}$$

Поясним понятие скорости распространения изотермы. Пусть имеется изотермическая поверхность, уравнение которой

$$T(x, y, z, \tau) = const \tag{19}$$

Полный дифференциал от уравнения этой поверхности равен

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial T}{\partial n} dn = 0 \tag{20}$$

Это уравнение можно написать так:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial n}\frac{dn}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega_T \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{21}$$

Из уравнения баланса тепла для одномерного температурного поля имеем

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} = c_\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{22}$$

Вместо q_x подставим из уравнения (19) соответствующее выражение

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q_x}{\partial \tau} \tag{23}$$

Полагая λ и τ_r постоянными, будем иметь

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^2 q_x}{\partial x \partial \tau} = c_\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{24}$$

Если продифференцировать (22) по τ, то будем иметь

$$\frac{\partial^2 q_x}{\partial x \partial \tau} = -c_\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \tag{25}$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (24) можно написать так:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{26}$$

Для трехмерного температурного поля дифференциальное уравнение теплопроводности по аналогии можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \nabla^2 T \tag{27}$$

Сделаем анализ уравнения (27), которое можно написать так:

$$c_\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\lambda}{\omega_r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = \lambda \nabla^2 T \tag{28}$$

так как, согласно соотношению (14) $\omega_r^2 = \frac{a}{\tau_r}$. При малых давлениях газа величина c_γ мала ($c_\gamma \to 0$), а средняя длина свободного пробега молекулы, от которой зависит эта величина, значительно увеличивается. Поэтому первым членом уравнения (28) можно пренебречь. Тогда получаем дифференциальное уравнение распространения тепла, совпадающее с гиперболическим волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = \omega_r^2 \nabla^2 T \tag{29}$$

Литература

1. Исаченко В.П. Теплопередача М., “Энергия”, 1975. – 488с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. Для вузов. – М.: Дрофа, 2003. – 840с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности М., “Высшая школа”, 1966. – 600с.
4. Юдаев Б.Н. Теплопередача. Учебник для втузов. М., “Высшая школа”, 1973. – 360с.