УДК 519.872

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ ПРИБОРОВ И ПОЛУМАРКОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

А.А. Назаров, И.А. Семенова

Томский государственный университет
E-mail: inna_ac@mail.ru

Рассматривается система массового обслуживания с входящим SM-потоком и неограниченным числом обслуживающих приборов. Исследование проводится методом просеянного потока и методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания. Проведенный анализ позволяет получить асимптотические семиинварианты до третьего порядка.

Ключевые слова:
Метод просеянного потока, асимптотический анализ, входящий SM-поток, система Колмогорова.

Key words:
Method of the sifted flow, asymptotic analysis, input SM flow, Kolmogorov's system.

Математические модели систем массового обслуживания широко применяют при решении важных практических задач, возникающих в связи с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления, для задач экономико-математического моделирования.

В качестве математических моделей страховых компаний, кредитно-депозитных организаций и многих других экономических и социально-экономических систем предлагается рассматривать системы с неограниченным числом приборов. Например, количество возможных договоров между клиентами и кредитно-депозитной организацией практически не ограничено. Сроки, на которые заключаются договоры, имеют весьма широкий спектр продолжительностей, поэтому достаточно адекватно могут моделироваться некоторой случайной величиной с заданной функцией распределения их значений. Поток клиентов, обращающихся в кредитно-депозитную организацию, может быть как пуассоновским, так и коррелированным.

Наиболее общим ординарным потоком однородных событий является полумарковский или SM-поток (Semi-Markovian process). Идея введения такого потока была выдвинута П. Леви (1954) и В. Смитом (1955). Анализ распределения числа событий, наступивших в SM-потоке за некоторое время, можно найти в работах [1, 2]. Системы массового обслуживания с таким входящим потоком интенсивно изучаются в настоящее время [3, 4].

В данной работе проводится исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает SM-поток, функция распределения времени обслуживания произвольная. Исследование проводится методом просеянного потока и методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания.

Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает SM-поток событий, заданный полумарковской матрицей $\mathbf{A}(x)$. Продолжительности обслуживания заявок стохастически независимы, одинаково распределены и имеют произвольную (но не экспоненциальную) функцию распределения $B(x)$. Поступающая заявка занимает любой из свободных приборов. Завершив обслуживание, заявка покидает систему (рис. 1).

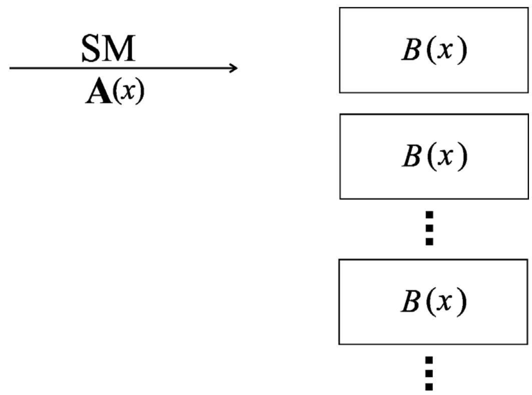

Рис. 1. *Математическая модель системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов*

Рассматривается трёхмерный случайный процесс $\{s(t),z(t),i(t)\}$, который является марковским с непрерывным временем, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события в SM-потоке, а дискретный процесс $\sigma(t)$ определяется как $s(t)=\xi(n+1)$, если $t_n<t\le t_{n+1}$, где моменты восстановления t_n определяются равенством

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \tau(i),$$

то есть процесс $s(t)$ на интервале $t_n<t\le t_{n+1}$ принимает и сохраняет значение $\xi(n+1)$, здесь $\xi(n)$ – эргодическая цепь Маркова с дискретным временем и матрицей $\mathbf{P}=[p_{\nu k}]$ вероятностей перехода за один шаг, процесс $\tau(i)$ принимает неотрицательные значения из непрерывного множества и определяет длины интервалов в SM-потоке. Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в момент времени t. Матрицу $\mathbf{A}(x)$ с элементами $A_{\nu k}(x)$ будем называть полумарковской. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова $\xi(n)$ определяется равенством

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}(\infty).$$

Для элементов полумарковской матрицы имеет место равенство

$$A_{\nu k}(x)=G_{\nu k}(x)p_{\nu k},$$

где $G_{\nu k}(x)$ – условная функция распределения длины интервала полумарковского потока при условии, что в начале этого интервала вложенная цепь Маркова приняла значение ν, а в конце его примет значение k. Матрицу $\mathbf{A}(x)$ можно записать в виде произведения Адамара двух матриц $\mathbf{G}(x)$ и $\mathbf{P}$

$$\mathbf{A}(x)=\mathbf{G}(x)*\mathbf{P},$$

и можно полагать, что полумарковский поток задан двумя матрицами $\mathbf{G}(x)$ и $\mathbf{P}$.

Для исследования такой системы воспользуемся методом просеянного потока.

Метод просеянного потока

Пусть на вход системы с неограниченным числом приборов поступает SM-поток заявок. Для реализации метода просеянного [5] потока рассмотрим две оси времени (рис. 2), на первой из которых обозначим моменты наступления событий входящего потока (верхняя ось, рис. 2).

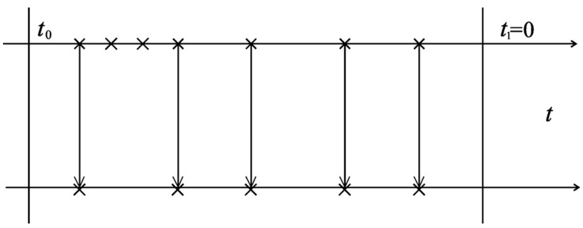

Рис. 2. *Схематическая модель применения метода просеянного потока*

Выделим некоторый момент времени t_1. Не нарушая общности, можно считать, что $t_1=0$. Обозначим вероятность

$$S(t)=1-B(t_1-t),\tag{1}$$

которая имеет смысл вероятности того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t<t_1$, в момент времени t_1 будет находиться в системе, занимая для своего обслуживания один из приборов системы.

Просеянный поток на второй оси времени, рис. 2, будем формировать следующим образом. Выделим некоторый момент времени $t_0<t_1$. Каждая заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени $t_0<t<t_1$, с вероятностью $S(t)$ формирует событие просеянного потока в тот же момент времени t.

Очевидно, что заявки, не попавшие в просеянный поток, завершат обслуживание и покинут систему до момента t_1, в то время как все заявки просеянного потока в момент t_1 будут находиться в системе, занимая её приборы.

Для просеянного потока обозначим $n(t)$ – число событий этого потока, наступивших до момента времени t, то есть на интервале $[t_0,t)$. В силу способа формирования просеянного потока, полагая, что в момент времени t_0 система обслуживания свободна, т. е. в ней нет обслуживаемых заявок $i(t_0)=0$, имеет место равенство числа $n(t_1)$ событий, наступивших в просеянном потоке к моменту времени t_1, и числа $i(t_1)$ приборов, занятых в рассматриваемой системе, в момент времени t_1, т. е.

$$i(t_1)=n(t_1).\tag{2}$$

Равенство (2) является основным для дальнейших исследований, т. к. проблему исследования наиболее сложной системы обслуживания с неограниченным числом приборов сводит к задаче анализа просеянного нестационарного потока, определяемого процессом $n(t)$. Найдя характеристики этого случайного процесса в произвольный момент времени t, где $t_0\le t\le t_1$, положим $t=t_1$, тогда, в силу равенства (2), его характеристики совпадают с характеристиками величины $i(t_1)$.

Метод просеянного потока исследования системы SM|GI|∞

Для исследования рассматриваемой системы SM|GI|∞ применим метод просеянного потока. Для распределения вероятностей $P(s,z,n,t)$ трёхмерного марковского процесса $\{s(t),z(t),n(t)\}$,

$$P(s,z,n,t)=P\{s(t)=s,z(t)<z,n(t)=n\}$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(s,z,n,t)}{\partial t}=\frac{\partial P(s,z,n,t)}{\partial z}-\frac{\partial P(s,0,n,t)}{\partial z}+$$

$$+\sum_{\nu}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial P(\nu,0,n-1,t)}{\partial z}S(t)+\\&+\frac{\partial P(\nu,0,n,t)}{\partial z}(1-S(t))\end{aligned}\right\}A_{\nu s}(z).\tag{3}$$

Начальные условия для решения этой системы в момент времени t_0 определим равенством

$$P(s,z,n,t_0)=\begin{cases}R(s,z), & \text{если } n=0,\\ 0, & \text{если } n>0.\end{cases}$$

где компоненты $R(s,z)$ вектора $\mathbf{R}(z)$ по определению равны

$$R(s,z)=P\{s(t)=s,z(t)<z\}.$$

Обозначив

$$H(s,z,u,t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{jun}P(s,z,n,t),$$

из (3) получим следующую задачу

$$\frac{\partial H(s,z,u,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(s,z,u,t)}{\partial z}-\frac{\partial H(s,0,u,t)}{\partial z}+$$
$$+\{1+S(t)(e^{ju}-1)\}\sum_{\nu}\frac{\partial H(\nu,0,u,t)}{\partial z}A_{\nu s}(z),$$
$$H(s,z,u,t_0)=R(s,z).$$

Эту систему запишем в виде матричного уравнения, обозначив вектор-строку

$$\mathbf{H}(z,u,t)=\{H(1,z,u,t),H(2,z,u,t),\cdots\},$$

получим

$$\frac{\partial \mathbf{H}(z,u,t)}{\partial t}=\frac{\partial \mathbf{H}(z,u,t)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{H}(0,u,t)}{\partial z}\times$$
$$\times\{\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}+(e^{ju}-1)S(t)\mathbf{A}(z)\}, \tag{4}$$
$$\mathbf{H}(z,u,t_0)=\mathbf{R}(z),$$

где распределение $\mathbf{R}(z)$ имеет вид [6]

$$\mathbf{R}(z)=\kappa_1\mathbf{r}\int_0^z(\mathbf{P}-\mathbf{A}(x))dx,$$

здесь $\mathbf{A}(x)$ – полумарковская матрица; $\mathbf{P}$ – стохастическая матрица вероятностей переходов вложенной цепи Маркова; $\mathbf{r}$ – стационарное распределение вероятностей значений вложенной цепи Маркова, а величина κ_1 определяется равенством

$$\kappa_1=\frac{1}{\mathbf{rAE}},$$

где матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A}=\int_0^\infty(\mathbf{P}-\mathbf{A}(x))dx.$$

Уравнение (4), определяющее характеристики системы SM|GI|∞, будем решать в асимптотическом условии растущего времени, полагая, что среднее значение времени обслуживания $b\to\infty$.

Метод асимптотических семиинвариантов исследования системы SM|GI|∞

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания (в теории потоков) называется исследование уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы (потока) при выполнении некоторого асимптотического (предельного) условия, вид которого конкретизируется для различных моделей и поставленных задач исследования [4].

В данной работе предлагается модификация метода асимптотического анализа – метод асимптотических семиинвариантов. Этот метод реализуется в нахождении последовательности асимптотик возрастающего порядка, в которой асимптотика первого порядка, аналогично закону больших чисел, определяет асимптотическое среднее значение числа занятых приборов. Асимптотика второго порядка, аналогично центральной предельной теореме, позволяет построить гауссовскую аппроксимацию распределения вероятностей состояний системы. Асимптотики более высокого порядка определяют соответствующие семиинварианты и аппроксимации распределения вероятностей, выполняющие более детальное исследование рассматриваемой характеристики [7].

Асимптотика первого порядка

Обозначим $\varepsilon=1/b$ и в уравнении (4) выполним замены

$$t\varepsilon=\tau,\quad t_0=\tau_0,\quad S(t)=S_1(\tau),\quad u=\varepsilon w,$$
$$\mathbf{H}(z,u,t)=\mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon), \tag{5}$$

получим задачу

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{F}_1(0,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\times$$
$$\times\{\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}+(e^{j\varepsilon w}-1)S_1(\tau)\mathbf{A}(z)\},$$
$$\mathbf{F}_1(z,w,\tau_0,\varepsilon)=\mathbf{R}(z). \tag{6}$$

Теорема 1. *Предельное, при* $\varepsilon\to0$, *значение* $\mathbf{F}_1(z,w,\tau)$ *решения* $\mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon)$ *уравнения* (6) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_1(z,w,\tau)=\mathbf{R}(z)\exp\left\{jw\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz\right\},$$

где вектор-функция $\mathbf{R}(z)$ *и параметр* κ_1 *определены выше.*

Доказательство. В задаче (6) выполним предельный переход при $\varepsilon\to0$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1(z,w,\tau)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{F}_1(0,w,\tau)}{\partial z}\{\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}\}=0,$$

отсюда получим, что $\mathbf{F}_1(z,w,\tau)$ является решением однородного уравнения, поэтому имеет вид

$$\mathbf{F}_1(z,w,\tau)=\mathbf{R}(z)\Phi_1(w,\tau), \tag{7}$$

здесь вектор-функция $\mathbf{R}(z)$ определена выше, а скалярную функцию $\Phi_1(w,\tau)$ определим следующим образом. В задаче (6) выполним предельный переход при $z\to0$ и покомпонентное суммирование векторов, получим

$$\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}_1(\infty,w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\mathbf{E}=\frac{\partial \mathbf{F}_1(0,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\mathbf{E}(e^{j\varepsilon w}-1)S_1(\tau),$$
$$\mathbf{F}_1(\infty,w,\tau_0,\varepsilon)\mathbf{E}=1.$$

Выполнив здесь предельный переход при $\varepsilon\to0$ и замену (7), получим равенства

$$\frac{\partial \Phi_1(w,\tau)}{\partial \tau}\mathbf{R}(\infty)\mathbf{E}=\Phi_1(w,\tau)\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{E}jwS_1(\tau),$$
$$\Phi_1(w,\tau_0)\mathbf{R}(\infty)\mathbf{E}=1,$$

которые перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial \Phi_1(w,\tau)}{\partial \tau}=\Phi_1(w,\tau)\kappa_1 jwS_1(\tau), \tag{8}$$
$$\Phi_1(w,\tau_0)=1.$$

Решение задачи (8) очевидно имеет вид

$$\Phi_1(w,\tau)=\exp\left\{jw\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz\right\}.$$

Теорема доказана.

В силу замен (5), а также равенства (7), можно записать приближённое (асимптотическое) равенство

$$\mathbf{H}(z,u,t)=\mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon)\approx\mathbf{F}_1(z,w,\tau)=$$
$$=\mathbf{R}(z)\exp\left\{ju\kappa_1\int_{t_0}^{t}S(z)dz\right\},$$

поэтому для характеристической функции величины $n(t)$ запишем

$$Me^{jun(t)}=\mathbf{H}(\infty,u,t)\mathbf{E}\approx\exp\left\{ju\kappa_1\int_{t_0}^{t}S(z)dz\right\}.$$

При $t=t_1=0$ для характеристической функции процесса $i(t)$ в стационарном режиме получим

$$h_1(u)=Me^{jui(t)}=Me^{jun(0)}\approx$$
$$\approx\exp\left\{ju\kappa_1\int_{-\infty}^{0}S(z)dz\right\}=\exp\{ju\kappa_1\beta_1\}.$$

Определение. Функцию

$$h_1(u)=\exp\{ju\kappa_1\beta_1\}$$

будем называть асимптотикой первого порядка характеристической функции числа занятых приборов в системе, а величину $\kappa_1\beta_1$ – асимптотическим семиинвариантом первого порядка.

Асимптотика второго порядка

Для более детального исследования рассматриваемой системы обслуживания, получим асимптотику второго порядка.

В уравнении (4) выполним замену

$$\mathbf{H}(z,u,t)=\mathbf{H}_2(z,u,t)\exp\left\{ju\kappa_1\int_{t_0}^{t}S(z)dz\right\},\tag{9}$$

получим

$$\frac{\partial\mathbf{H}_2(z,u,t)}{\partial t}+\mathbf{H}_2(z,u,t)ju\kappa_1S(t)=$$
$$=\frac{\partial\mathbf{H}_2(z,u,t)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{H}_2(0,u,t)}{\partial z}\times$$
$$\times\{\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}+(e^{ju}-1)S(t)\mathbf{A}(z)\},$$
$$\mathbf{H}_2(z,u,t_0)=\mathbf{R}(z).\tag{10}$$

Обозначив $\varepsilon^2=1/b$, в задаче (10) выполним замены

$$\varepsilon^2t=\tau,\quad \varepsilon^2t_0=\tau_0,\quad S(t)=S_1(\tau),\quad u=\varepsilon w,$$
$$\mathbf{H}_2(z,u,t)=\mathbf{F}_2(z,w,\tau,\varepsilon),\tag{11}$$

получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}_2(z,w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\mathbf{F}_2(z,w,\tau,\varepsilon)j\varepsilon w\kappa_1S_1(\tau)=$$
$$=\frac{\partial\mathbf{F}_2(z,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{F}_2(0,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\times$$
$$\times\{\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}+(e^{j\varepsilon w}-1)S_1(\tau)\mathbf{A}(z)\},\tag{12}$$
$$\mathbf{F}_2(z,w,\tau_0,\varepsilon)=\mathbf{R}(z).$$

Теорема 2. *Предельное, при* $\varepsilon\to0$, *значение* $\mathbf{F}_1(z,w,\tau)$ *решения* $\mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon)$ *уравнения* (12) *имеет вид*

$$\mathbf{F}_2(z,w,\tau)=$$
$$=\mathbf{R}(z)\exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz+2\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz\right]\right\},$$

где величина κ_2 *определяется равенством*

$$\kappa_2=\frac{\partial\boldsymbol{f}_2(0)}{\partial z}\mathbf{E},$$

а вектор-функция $\boldsymbol{f}_2(z)$ *удовлетворяет условию* $\boldsymbol{f}_2(\infty)\mathbf{E}=0$ *и является решением уравнения*

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}_2(z)}{\partial z}+\frac{\partial\boldsymbol{f}_2(0)}{\partial z}(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I})+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{A}(z)-\kappa_1\mathbf{R}(z)=0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Определение. Функцию

$$h_2(u)=\exp\left\{ju\kappa_1\beta_1+\frac{(ju)^2}{2}[\kappa_1\beta_1+2\kappa_2\beta_2]\right\},\tag{13}$$

будем называть асимптотикой второго порядка характеристической функции числа занятых приборов в системе, а величину $[\kappa_1\beta_1+2\kappa_2\beta_2]$ – асимптотическим семиинвариантом второго порядка, где $\beta_2=\int_0^\infty(1-B(z))^2dz.$

Асимптотика третьего порядка

Для нахождения асимптотики третьего порядка сформулируем следующее утверждение:

Теорема 3. *Предельное, при* $\varepsilon\to0$, *значение* $\mathbf{F}_1(z,w,\tau)$ *решения* $\mathbf{F}_1(z,w,\tau,\varepsilon)$ *уравнения*

$$\varepsilon^3\frac{\partial\mathbf{F}_3(z,w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+$$
$$+\mathbf{F}_3(z,w,\tau,\varepsilon)\left\{\begin{matrix}\left[j\varepsilon w+\dfrac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right]\kappa_1S_1(\tau)+\\+(j\varepsilon w)^2\kappa_2S_1^2(\tau)\end{matrix}\right\}=$$
$$=\frac{\partial\mathbf{F}_3(z,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{F}_3(0,w,\tau,\varepsilon)}{\partial z}\times$$
$$\times\{\mathbf{A}(z)-\mathbf{I}+(e^{j\varepsilon w}-1)S_1(\tau)\mathbf{A}(z)\},$$

имеет вид

$$\mathbf{F}_3(z,w,\tau)=\mathbf{R}(z)\exp\left\{\frac{(jw)^3}{6}\left[\begin{matrix}\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz+\\+6\kappa_2\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz+\\+6\kappa_3\int_{\tau_0}^{\tau}S_1^3(z)dz\end{matrix}\right]\right\},$$

где величина κ_3 *определяется равенством*

$$\kappa_3=\frac{\partial\boldsymbol{f}_3(0)}{\partial z}\mathbf{E},$$

а вектор-функция $\mathbf{f}_3(z)$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{f}_3(\infty)\mathbf{E}=0$ *и является решением уравнения*

$$\frac{\partial \mathbf{f}_3(z)}{\partial z}+\frac{\partial \mathbf{f}_3(0)}{\partial z}(\mathbf{A}(z)-\mathbf{I})+\frac{\partial \mathbf{f}_2(0)}{\partial z}\mathbf{A}(z)-$$
$$-\kappa_1\mathbf{f}_2(z)-\kappa_2\mathbf{R}(z)=0.$$

Определение. Функцию

$$h_3(u)=\exp\left\{\begin{aligned}&ju\kappa_1\beta_1+\frac{(ju)^2}{2}[\kappa_1\beta_1+2\kappa_2\beta_2]+\\&+\frac{(ju)^3}{6}[\kappa_1\beta_1+6\kappa_2\beta_2+6\kappa_3\beta_3]\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

будем называть асимптотикой третьего порядка характеристической функции числа занятых приборов в системе, а величину $[\kappa_1\beta_1+6\kappa_2\beta_2+6\kappa_3\beta_3]$ – асимптотическим семиинвариантом третьего порядка, где $\beta_3=\int_0^\infty(1-B(z))^3dz$.

Область применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации

С помощью полученных асимптотик (13), (14) и обратного преобразования Фурье запишем асимптотическое распределение вероятностей числа занятых приборов в системе

$$P_2(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jui}h_2(u)du, \quad (15)$$

$$P_3(i)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jui}h_3(u)du. \quad (16)$$

Полученные распределения будем называть асимптотической аппроксимацией второго (15) и третьего (16) порядков допредельного распределения вероятностей.

Для системы с неограниченным числом приборов и полумарковским входящим потоком при детерминированном времени обслуживании, продолжительности b, стационарное распределение вероятностей $P(i)=P\{i(t)=i\}$ числа $i(t)$ приборов, занятых в момент времени t, имеет вид

$$P(i)=\frac{\kappa_1 r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{y^2}(1-e^{-jyb})(\mathbf{I}-\mathbf{A}^*(y))^2\mathbf{A}^{*n-1}(y)\mathbf{E}dy, \quad (17)$$

где $\mathbf{A}^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{j\alpha z}d\mathbf{A}(z)$.

Теперь сравним распределения вероятностей числа занятых приборов, полученные методом асимптотического анализа и допредельным способом. Для этого найдем расстояние Колмогорова между этими распределениями

$$\Delta_n=\max_{0\le m<\infty}\left|\sum_{i=0}^{m}P_n(i)-\sum_{i=0}^{m}P(i)\right|, \quad n=2,3,$$

где $P_n(i)$ – функция распределения, полученная с помощью асимптотического анализа, а $P(i)$ – функция распределения для допредельной ситуации (17).

Например, полумарковская матрица $\mathbf{A}(x)=\mathbf{G}(x)^*\mathbf{P}$, где $\mathbf{G}(x)$ – гамма-функция распределения $F(x)=\Gamma(\alpha,\beta)$ с параметрами $\alpha_1=5$, $\beta_1=5$, $\alpha_2=10$, $\beta_2=20$, $\alpha_3=15$, $\beta_3=45$,

$$\mathbf{G}(x)=\begin{bmatrix}\Gamma(5,5)&\Gamma(10,20)&\Gamma(10,20)\\\Gamma(15,45)&\Gamma(5,5)&\Gamma(10,20)\\\Gamma(15,45)&\Gamma(15,45)&\Gamma(5,5)\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0,3&0,3&0,4\\0,4&0,5&0,1\\0,3&0,2&0,5\end{bmatrix}.$$

Для различных значений b значения Δ_n составили (таблица).

Таблица. *Область применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации*

N \ b	5	10	50	100
Δ_2	0,0475	0,0284	0,0119	0,0090
Δ_3	0,0343	0,0192	0,0058	0,0042

На рис. 3 показана одна из графических реализаций распределения вероятностей состояний системы, полученных асимптотически $P_2(i)$, $P_3(i)$ и в допредельной ситуации $P(i)$ при заданных значениях параметров.

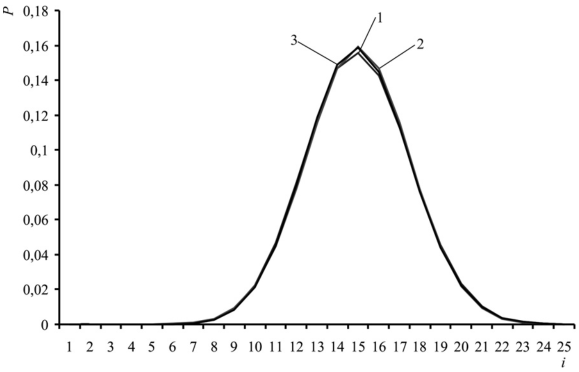

Рис. 3. *Графическая реализация полученных результатов при b=10: 1) допредельное распределение вероятностей P(i); 2) асимптотическая аппроксимация второго порядка $P_2(i)$ допредельного распределения вероятностей; 3) асимптотическая аппроксимация третьего порядка $P_3(i)$ допредельного распределения вероятностей*

Полагая приемлемой погрешность аппроксимации, равную значению 0,02 расстояния Колмогорова, можно сделать вывод о том, что применение метода асимптотического анализа к исследованию системы с SM|GI|∞ целесообразно при $b\ge50$, применяя асимптотическую аппроксимацию второго порядка, и уже при $b\ge10$ для асимптотики третьего порядка.

Выводы

Проведено исследование системы с неограниченным числом обслуживающих приборов и входящим SM-потоком методом асимптотических семиинвариантов. Предложен метод просеянного потока для исследования таких систем массового обслуживания. Получены асимптотические семиинварианты первого, второго и третьего порядков, а также показана область применимости асимптотических результатов в допредельной ситуации.

Работа выполнена при продержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2011 гг.)», проект № 11803.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопухова С.В. Исследование полумарковского потока асимптотическим методом третьего порядка // Информационные технологии и математическое моделирование: Матер. VI Междунар. научно.-практ. конф. – Томск, 2007. – Ч. 2. – С. 30–34.
2. Назаров А.А., Лопухова С.В., Гарайшина И.Р. Исследование полумарковского потока событий // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13. – Спецвыпуск 5. – С. 56–62.
3. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Минск: БГУ, 2000. – 175 с.
4. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
5. Назаров А.А., Семенова И.А. Исследование системы MMP|GI|∞ методом просеянного потока // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С. 74–84.
6. Лопухова С.В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 167 с.
7. Назаров А.А., Семенова И.А. Исследование RQ-систем методом асимптотических семиинвариантов // Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3 (12). – С. 85–96.

Поступила 20.01.2012 г.

УДК 519.9

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА ПЕРВОЙ КРАЙНЕЙ ПОДСИСТЕМЫ ДЛЯ ЗАДАННОЙ СОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

С.Г. Небаба, О.Н. Вылегжанин

Томский политехнический университет
E-mail: onv@am.tpu.ru

Разработан алгоритм поиска крайней подсистемы для заданной системы линейных неравенств, определена область допустимых значений для этой подсистемы и предложен метод нахождения зависимых неравенств. Алгоритм включает учет возможных ограничений-равенств, а также приведение матрицы системы неравенств к матрице полного столбцового ранга. Работа алгоритма демонстрируется на тестовом примере.

Ключевые слова:
Система линейных неравенств, крайняя подсистема, учет ограничений-равенств, область допустимых значений, зависимые неравенства.

Key words:
System of linear inequalities, extreme subsystem, accounting of equality constraints, range of permitted values, dependent inequalities.

Подавляющее большинство задач оценки и прогноза реальных производственно-экономических ресурсов и результатов их использования сводится к нахождению решения (области допустимых решений) для некоторой системы неравенств, выражающих ограничения по тем или иным ресурсам. Эти неравенства представляются в виде линейных функций, либо легко могут быть приведены к ним с использованием ряда допущений.

Нахождение решения системы линейных неравенств при наличии некоторой целевой функции обычно относят к задачам математического программирования. Эти задачи относятся к задачам исследования конкретных производственно-хозяйственных ситуаций, которые в том или ином виде интерпретируются как задачи об оптимальном использовании ограниченных ресурсов.

На практике нередко отсутствует целевая функция, на нахождение оптимального значения которой направлено большинство моделей математического программирования, и на основании учета ограничений в виде системы линейных неравенств определяется множество точек, выпуклая оболочка которых является областью допустимых значений задачи.

В связи с этим возникает задача построения алгоритма, позволяющего найти область допустимых значений для любой заданной системы линейных неравенств при наличии ограничений-равенств.

Отдельные свойства систем линейных неравенств рассматривались еще в первой половине XIX в. в связи с некоторыми задачами аналитической механики, решение которых сводилось к системам такого рода. Их систематическое изучение