

$$S_{m,m+2}^{II} \Leftrightarrow A_{2p-1,\alpha}^{m+1} - A_{2p,\alpha}^{m+2} = 0, A_{2p-1,\alpha}^{m+2} + A_{2p,\alpha}^{m+1} = 0, \\ A_{2p-1,\alpha}^{2q-1} - A_{2p,\alpha}^{2q} = 0, A_{2p-1,\alpha}^{2q} + A_{2p,\alpha}^{2q-1} = 0. \quad (36)$$

Здесь индексы p и q изменяются по закону (9) причем $p < q$.

Из дифференциальных уравнений [1. Ур. (7)] и (11) с учетом (10), (32), (35) и (36) замечаем, что на m -поверхностях $S_{m,m+2}^I$ и $S_{m,m+2}^{II}$ выполняются следующие дифференциальные уравнения

$$S_{m,m+2}^I : \omega_{m+1}^{2p-1} - \omega_{m+2}^{2p} = 0, \omega_{m+1}^{2p} + \omega_{m+2}^{2p-1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_{2p-1}^{m+1} - \omega_{2p}^{m+2} = 0, \omega_{2p}^{m+1} + \omega_{2p-1}^{m+2} = 0; \quad (37)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормально-го расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 5–8.

$$S_{m,m+2}^{II} : \omega_{2p-1}^{m+1} - \omega_{2p}^{m+2} = 0, \omega_{2p}^{m+1} + \omega_{2p-1}^{m+2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \omega_{2p-1}^{2q-1} - \omega_{2p}^{2q} = 0, \omega_{2p-1}^{2q} + \omega_{2p}^{2q-1} = 0. \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что m -поверхность $S_{m,m+2}^{II}$ является частным случаем m -поверхности $S_{m,m+2}^I$.

3.2. В общем случае для m -поверхности S_m в E_n предполагается, что числа m и n удовлетворяют неравенствам [1. Ур. (5)] и $n-m > 2$. В соответствии с (31) заметим, что все результаты, изложенные в пункте 3.1 в случае $n=m+2$, справедливы и для случая $n > m+2$. Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Многомерные поверхности Коши–Римана $S_{m,m+2}^I$ и $S_{m,m+2}^{II}$ существуют.

2. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. – 1962. – № 2. – С. 231–240.
3. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.

Поступила 02.12.2011 г.

УДК 514.76

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ КОШИ–РИМАНА В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: luchinin@tpu.ru

Изучаются геометрические свойства многомерных поверхностей Коши–Римана в евклидовом пространстве. С этой целью привлекаются, в частности, индуцированные связности в касательных и нормальных расслоениях указанных поверхностей.

Ключевые слова:

Многомерные евклидовы пространства, многомерные поверхности, характеристики, связности.

Key words:

Multidimensional Euclidean spaces, multidimensional surfaces, characteristics, connectivity.

Введение

В статье [1] были изучены частные классы m -поверхностей $S_{m,m+2}^I$ и $S_{m,m+2}^{II}$ в n -мерном евклидовом пространстве E_n . Данная статья является продолжением статей [1, 2] и посвящена изучению некоторых геометрических свойств этих поверхностей. Рассматриваются некоторые поля геометрических образов поверхности $S_m \subset E_n$, которые позволяют выявить дополнительные геометрические свойства поверхностей $S_{m,m+2}^I$ и $S_{m,m+2}^{II}$. В случае четномерной m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ изучаются индуцированные связности на $S_m \subset E_n$. На m -поверхностях $S_{m,m+2}^I$ и $S_{m,m+2}^{II}$ в случае $n \geq m+2$ (см. [1. Ур. (37), (38)]) выполняются дифференциальные уравнения:

$$S_{m,m+2}^I : \omega_{2p-1}^{m+1} - \omega_{2p}^{m+2} = 0, \omega_{2p}^{m+1} + \omega_{2p-1}^{m+2} = 0. \\ S_{m,m+2}^{II} : \omega_{2p-1}^{m+1} - \omega_{2p}^{m+2} = 0, \omega_{2p}^{m+1} + \omega_{2p-1}^{m+2} = 0; \\ \omega_{2p-1}^{2q-1} - \omega_{2p}^{2q} = 0, \omega_{2p-1}^{2q} + \omega_{2p}^{2q-1} = 0, \quad (p < q). \quad (1)$$

Все обозначения и терминология, а также значения индексов соответствуют принятым [1–6].

1. Поля некоторых инвариантных геометрических образов

Для выяснения свойств m -поверхностей $S_{m,m+2}^I$ и $S_{m,m+2}^{II}$ рассмотрим в случаях 1) и 2) на m -поверхности S_m поля некоторых инвариантных геометрических образов.

1) Каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ поставим в соответствие гиперплоскость $\Gamma_{n-1} \supset L_m$, определяемую уравнением $x_a x^a = 0$. Тогда в соответствии с [3] получаем, что множество Φ_{n-1}^m всех касательных (фокальных) к $S_m \subset E_n$ гиперплоскостей Γ_{n-1} , проходящих вдоль направления [2. Ур. (9)] через L_m и бесконечно близкую к L_m первого порядка, определяется в тангенциальных координатах x_a ортонормального репера R уравнением

$$\Phi^{a_1 a_2 \dots a_m} x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_m} = 0, (a_1, a_2, \dots, a_m = \overline{m+1, n}).$$

Здесь симметрические величины $\Phi^{a_1 a_2 \dots a_m}$ определяются по формулам и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \Phi^{a_1 a_2 \dots a_m} &= \frac{1}{m!} \cdot \frac{\omega_1^{a_1} \wedge \omega_2^{a_2} \wedge \dots \wedge \omega_m^{a_m}}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^m} = \\ &= \frac{1}{m!} A_{[1]1}^{a_1} A_{[2]2}^{a_2} \dots A_{[m]m}^{a_m}, \end{aligned}$$

$$d\Phi^{a_1 a_2 \dots a_m} + \Phi^{a a_2 \dots a_m} \omega_a^{a_1} + \Phi^{a_1 a \dots a_m} \omega_a^{a_2} = \Phi_{\gamma}^{a_1 a_2 \dots a_m} \omega^{\gamma}, \quad (2)$$

причем явный вид величин $\Phi_{\gamma}^{a_1 a_2 \dots a_m}$ для нас несуществен.

Замечание 1.1. Из (7) и (8) и в соответствии с [3. С. 1318], [6] заключаем, что в случае m -поверхности $S_m \subset E_{m+2}$ гиперконус Φ_{n-1}^m вырождается в общем случае в множество Φ_m , состоящее из m касательных гиперплоскостей $\Gamma_{n-1} \supset L_m$.

2) Поскольку в случае $n=m+2$ в соответствии [2. Ур. (19)] на m -поверхности $S_m \subset E_{m+2}$ каждая касательная m -плоскость L_m в точке расщепляется на двумерные площадки $L_m = (\bar{A}, \bar{e}_{2p-1}, \bar{e}_{2p})$, то в касательном расслоении (S_m, L_m) определены распределения

$$\Delta_{m,2}^p : A \rightarrow L_2^p. \quad (3)$$

Следовательно, интегральные кривые на m -поверхности S_m с текущей точкой A распределений (3) определяются следующими в общем случае не вполне интегрируемыми дифференциальными уравнениями

$$\Delta_{m,2}^p : \omega^{\alpha} = 0, \quad \alpha \neq 2p-1, 2p. \quad (4)$$

Каждой точке $A \in S_m \subset E_{m+2}$ в плоскости P_2^1 сопоставим точку с радиус-вектором $\bar{X} = \bar{A} + x^{\hat{a}} \bar{e}_{\hat{a}}$. Из [2. Ур. (8), (9)] следует, что множество Ψ_1^p всех точек $X \in P_2^1$, отвечающих точке $A \in S_m \subset E_{m+2}$, которые вдоль интегральных кривых (4) описывают линии с касательными, принадлежащими соответствующим $(n-2)$ -плоскостям Γ_{n-2}^p , проходящим через P_2^1 и все двумерные площадки $L_2^q = (\bar{A}, \bar{e}_{2p-1}, \bar{e}_{2q})$, кроме $L_2^p = (\bar{A}, \bar{e}_{2p-1}, \bar{e}_{2p})$, $(p \neq q)$, определяются уравнениями

$$A_{\hat{a}\hat{b}}^{(p)} x^{\hat{a}} x^{\hat{b}} + 2A_{\alpha\alpha_p}^{\alpha p} x^{\hat{a}} + 2 = 0, \quad x^{\alpha} = 0, \quad (5)$$

где при каждом p (см. [2. Ур. (19)]) симметрические величины $A_{\hat{a}\hat{b}}^{(p)}$ определяются по формулам и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} A_{\hat{a}\hat{b}}^{(p)} &= A_{(a|2p-1|}^{2p-1} A_{b|2p}^{2p} - A_{(a|2p-1|}^{2p} A_{b|2p}^{2p-1}; \\ dA_{\hat{a}\hat{b}}^{(p)} - A_{\hat{c}\hat{b}}^{(p)} \omega_a^{\hat{c}} - A_{\hat{a}\hat{c}}^{(p)} \omega_b^{\hat{c}} &= A_{\hat{a}\hat{b}\gamma}^{(p)} \omega^{\gamma}, \\ (p = \overline{1, s-1} \Leftarrow m = 2s; p = \overline{1, s} \Leftarrow m = 2s+1). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь явный вид величин $A_{\hat{a}\hat{b}\gamma}^{(p)}$ для нас не существен.

Из (1) заключаем, что множество Ψ_1^p в плоскости P_2^1 , отвечающей точке $A \in S_m \subset E_{m+2}$, является коникой (кривой второго порядка).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1. Все m касательных гиперплоскостей множества Φ_{n-1} поверхности $S_{m,m+2}^I$ в случае $m=2s$ (s — положительное целое число) являются мнимыми. В случае же $m=2s+1$ множество Φ_{n-1} содержит одну вещественную касательную гиперплоскость к $S_{m,m+2}^I$, а все остальные мнимые. При этом предполагается, что $S_{m,m+2}^I$ не является тангенциально вырожденной в смысле М.А. Акивиса [4]. Если m -поверхность $S_{m,m+2}^I$ является тангенциально вырожденной в смысле [4], то при любых m (четных или нечетных) касательные гиперплоскости из множества Φ_{n-1} к поверхности $S_{m,m+2}^I$ являются неопределенными.

Доказательство. Из (2) и [1. Ур. (35), (36)] заключаем, что все касательные к $S_{m,m+2}^I$ гиперплоскости из Φ_{n-1} определяются соответственно из уравнений

$$\begin{aligned} [(x_{m+1})^{2s} + (x_{m+1})^s (x_{m+2})^s + (x_{m+2})^{2s}] \cdot \det[A_{\alpha\beta}^{m+1}] &= 0, \\ (m = 2s), \\ (x_{m+1})^{2s} + (x_{m+1})^s (x_{m+2})^s + (x_{m+2})^{2s} \cdot x_a G^{\hat{a}} &= 0, \\ (m = 2s+1). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь величины $G^{\hat{a}}$ определяются по формулам и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} G^{\hat{a}} &= \begin{vmatrix} A_{11}^{m+1} & A_{12}^{m+1} & \dots & A_{1,m-1}^{m+1} & A_{1m}^{\hat{a}} \\ A_{21}^{m+1} & A_{22}^{m+1} & \dots & A_{2,m-1}^{m+1} & A_{2m}^{\hat{a}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}^{m+1} & A_{m2}^{m+1} & \dots & A_{m,m-1}^{m+1} & A_{mm}^{\hat{a}} \end{vmatrix}, \\ dG^{\hat{a}} + G^{\hat{b}} \omega_b^{\hat{a}} &= G_{\alpha}^{\hat{a}} \omega^{\alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь явный вид величин $G_{\alpha}^{\hat{a}}$ для нас несуществен.

В соответствии с (7) и [1. Ур. (36), (37)] ниже рассматриваются следующие случаи:

- 1) $\det[A_{\alpha\beta}^{m+1}] = 0 \Rightarrow \omega_m^{m+1} = \tilde{g}^{\alpha} \omega_{\alpha}^{m+2}$, $m=2s$; (9)
- 2) $G^{\hat{a}} = 0 \Rightarrow \omega_m^{m+1} = f^{\alpha} \omega_{\alpha}^{m+2}$, $\omega_m^{m+2} = f^{\alpha} \omega_{\alpha}^{m+1}$, $m=2s+1$; (10)
- 3) $\det[A_{\alpha\beta}^{m+1}] \neq 0$, $m=2s$;
- 4) $G^{\hat{a}}$ — одновременно не равны нулю, $m=2s+1$.

Из (9) и (10) замечаем, что в каждом из рассматриваемых случаев 1) и 2) каждой точке $A \in S_{m,m+2}^I$ отвечает направление $t = (A, \bar{e}_{\alpha}) \in L_m$, определяемое системой

$$t^{\alpha} A_{\alpha\alpha}^{m+1} = 0, t^{\alpha} = 0 \Rightarrow A_{\alpha\alpha}^{\hat{a}} t^{\alpha} = 0. \quad (11)$$

Вдоль этого направления касательная m -плоскость L_m в точке $A \in S_{m,m+2}^I$ является постоянной во всех точках прямой t типа (11). Это означает, что в рассматриваемых случаях m -поверхность $S_{m,m+2}^I$ является тангенциально вырожденной ранга 1 в смысле М.А. Акивиса [4].

Из (7)–(11) заключаем, что в случаях 1 и 2 касательные гиперплоскости из множества Φ_{n-1} являются неопределенными.

Так как в случаях 3 и 4 m -поверхность $S_{m,m+2}^I \subset E_{m+2}$ не является тангенциально вырожденной ранга 1, то из (14) в этих случаях вытекает справедливость теоремы 1.2.

Теорема 1.2. Коники Ψ_1^p в нормальной плоскости P_2^1 точки $A \in S_{m,m+2}^I$ при каждом фиксированном p является окружностью с центром в точке A и радиуса

$$R_p = \frac{1}{\sqrt{(A_{m+1,2p-1}^{2p-1})^2 + (A_{m+1,2p-1}^{2p})^2}}.$$

Здесь p – фиксировано и изменяется по закону (6).

Доказательство. Из [1. Ур. (28)] с учетом (3) получаем следующие соотношения на m -поверхности:

$$A_{a,2p-1}^{2p-1} = -A_{a,2p}^{2p}, A_{a,2p}^{2p-1} = A_{a,2p-1}^{2p}.$$

Отсюда в силу (6) получаем

$$\begin{aligned} A_{m+1,m+1}^{(p)} &= A_{m+2,m+2}^{(p)} = -2\{(A_{m+1,2p-1}^{2p-1})^2 + (A_{m+1,2p-1}^{2p})^2\}, \\ A_{m+1,m+2}^{(p)} &= A_{m+2,m+1}^{(p)} = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость теоремы 1.2.

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 1.3. Полярной точки $A \in S_{m,m+2}^I$ относительно коники Q_1^2 в случае четного является несобственная прямая нормальной плоскости P_2^1 к $S_{m,m+2}^I$ в точке A , т. е. точка является центром коники Q_1^2 .

Теорема 1.4. В случае $m=2s+1$ характеристика $\text{Ch } G_{m+1}(L_1^m)$ гиперплоскости $G_{m+1}=L_{m-1} \cup P_2^1$, отвечающей точке $A \in S_{m,m+2}^I$, вдоль кривой на m -поверхности с касательной $L_1^m=(\bar{A}, \bar{e}_m) \subset L_m$ пересекает нормальную 2-плоскость P_2^1 ($n=m+2$) по прямой, параллельной прямой Γ_1 , о которой идет речь в теореме 1.3.

Замечание 1.2. Поскольку m -поверхность $S_{m,m+2}^{II}$ является частным случаем m -поверхности $S_{m,m+2}^I$, то и для m -поверхности $S_{m,m+2}^{II}$ с учетом [1. Ур. (35)] и (1) имеют место теоремы 1.1–1.4.

В этом пункте рассматриваются некоторые распределения линейных подпространств, которые будут использованы в следующем разделе. При этом все рассуждения проводятся для случая m -поверхности $S_{m,m+2}^{II}$, (m – четное, т. е. $m=2s$).

Распределение $\Delta_{m,2}^{(1)p}$, интегральные линии которого на m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m-2}$, описываемые точкой A , определяются дифференциальными уравнениями

$$\Delta_{m,2}^{(1)p} \Leftrightarrow \omega_{2p-1}^{\tilde{\alpha}_p} = 0 \Rightarrow \omega_{2p}^{\tilde{\alpha}_p} = 0. \quad (12)$$

Здесь $\tilde{\alpha}_p, \tilde{\beta}_p \neq 2p, 2p-1; p=\overline{1,s}; m=2s, p$ – фиксировано.

Рассмотрим (см. [1. Ур. (10), (11)]) матрицу $[A_{2p-1,\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\alpha}_p}]$, (p – фиксировано) и будем предполагать, что ее ранг равен $m-2$. Для определенности отличным от нуля минором порядка $m-2$ будем считать

$$A_{2p-1,\tilde{\gamma}_p}^{\tilde{\alpha}_p} B_{\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\gamma}_p} = A_{2p-1,\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\alpha}_p} A_{\tilde{\gamma}_p}^{\tilde{\alpha}_p}, (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\beta}_p, \tilde{\gamma}_p \neq 2p-1, 2p;$$

p – фиксировано).

Тогда можно ввести в рассмотрение величины $B_{\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\alpha}_p}$ по формулам

$$A_{2p-1,\tilde{\gamma}_p}^{\tilde{\alpha}_p} B_{\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\gamma}_p} = A_{2p-1,\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\alpha}_p} A_{\tilde{\gamma}_p}^{\tilde{\alpha}_p}, (\tilde{\alpha}_p, \tilde{\beta}_p, \tilde{\gamma}_p \neq 2p-1, 2p;$$

p – фиксировано).

Определим следующие величины, которые с учетом [1. Ур. (10), (11)] удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} A_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} &= -A_{2p-1,\alpha_p}^{\tilde{\beta}_p} A_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p}; \\ dA_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} + A_{\alpha_p}^{\tilde{\beta}_p} \omega_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p} - A_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p} \omega_{\alpha_p}^{\beta_p} &= \tilde{A}_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} \omega^{\gamma_p}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь явный вид величин $\tilde{A}_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p}$ для нас несущественен.

Заметим с учетом (12), (13), [1. Ур. (10), (11)] и [2. Ур. (1)] что $\Delta_{m,2}^{(1)p} : A \rightarrow \tilde{L}_2^p \subset L_m$, где двумерная площадка $\tilde{L}_2^p$ в соответствии [2. Ур. (7)–(11)] определяется уравнениями $x^{\tilde{\alpha}_p} = A_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} x^{\alpha_p}$, $x^{\tilde{\alpha}_p} = 0$, причем дифференциальные уравнения в (13) являются дифференциальными уравнениями распределения $\Delta_{m,2}^{(1)p}$.

Распределение $\Delta_{m,m-2}^{(2)p}$, интегральные линии на m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m-2}$ которого определяются дифференциальными уравнениями

$$\Delta_{m,2}^{(2)p} \Leftrightarrow \omega_{m+1}^{\tilde{\alpha}_p} = 0 \Rightarrow \omega_{m+2}^{\tilde{\alpha}_p} = 0.$$

Рассмотрим симметрические величины $C_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p}$, определяемые по формулам $A_{m+1,\tilde{\gamma}_p}^{\tilde{\alpha}_p} C_{\beta_p}^{\tilde{\gamma}_p} = \delta_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p}$, $\det[A_{m+1,\tilde{\beta}_p}^{\tilde{\alpha}_p}] \neq 0$, что позволяет ввести в рассмотрение величины $C_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p}$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} C_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} &= -A_{m+1,\alpha_p}^{\tilde{\beta}_p} C_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p}; \\ dC_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} + C_{\alpha_p}^{\tilde{\beta}_p} \omega_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p} - C_{\beta_p}^{\tilde{\alpha}_p} \omega_{\alpha_p}^{\beta_p} &= C_{\alpha_p}^{\tilde{\alpha}_p} \omega^{\gamma_p}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом (14) замечаем, что каждой точке $A \in S_m$ распределение $\Delta_{m,2}^p$ сопоставляет двумерную площадку $\tilde{\Gamma}_2^p$, т. е.

$$\Delta_{m,2}^{(2)p} : A \rightarrow \tilde{\Gamma}_2^p \subset L_m, \tilde{\Gamma}_2^p \Leftrightarrow x^{\tilde{\gamma}_p} = C_{\gamma_p}^{\tilde{\gamma}_p} x^{\gamma_p}, x^{\tilde{\alpha}_p} = 0.$$

Распределение $\Delta_{m,m-2}^{(3)p}$, интегральные кривые которого на m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_n$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\Delta_{m,m-2}^{(3)p} : \omega_{m+1}^{\alpha_p-1} = \omega_{m+2}^{2p-1} = 0 \Rightarrow \omega_a^{2p} = 0. \quad (15)$$

Как и выше показывается, что распределение (15) определяется $(m-2)$ -мерной площадкой $\tilde{\Gamma}_{m-2}^p \Leftrightarrow A_{\alpha\alpha}^{2p-1} x^\alpha = 0, x^{\tilde{\beta}} = 0$, ортогональной с учетом (15) и двумерной площадке $\tilde{\Gamma}_2^p$. Из [2. Ур. (4)] замечаем, что дифференциальные уравнения распределения (15) имеют вид

$$dA_{\alpha\alpha}^{2p-1} - A_{\beta\alpha}^{2p-1} \omega_a^{\tilde{\beta}} - A_{\alpha\beta}^{2p-1} \omega_\alpha^\beta + A_{\alpha\alpha}^{2p} \omega_{2p-1}^{2p-1} = A_{\alpha\alpha\beta}^{2p-1} \omega^\beta.$$

Выясним геометрический смысл распределений:

$$\Delta_{m,2}^{(1)p} : A \rightarrow L_2^1; \Delta_{m,2}^{(2)p} : A \rightarrow \tilde{\Gamma}_2^p; \Delta_{m,m-2}^{(3)p} : A \rightarrow \tilde{\Gamma}_{m-2}^p,$$

определенных на m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ (m – четное).

Рассмотрим линейное подпространство

$$\Gamma_m^p = L_{m-2}^p \cup P_2^1; L_2^p \not\subset \Gamma_m^p,$$

(P_2^1 – нормальная плоскость, p – фиксировано), (16)

проходящее через точку $A \in S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ ($m=2s$) и параллельное всем векторам $\bar{e}_i \in E_{m+2}$, кроме векторов $\bar{e}_{2p-1}, \bar{e}_{2p}$. Каждой точке $A \in S_{m,m+2}^{II}$ поставим в соответствие точки $X \in L_m$ и $Y \in \Gamma_m^p$ с радиус-векторами

$$\bar{X} = \bar{A} + x^\alpha \bar{e}_\alpha,$$

$$\bar{Y} = \bar{A} + y^{\tilde{\alpha}_p} \bar{e}_{\tilde{\alpha}_p} + y^{\hat{\alpha}} \bar{e}_{\hat{\alpha}}, \quad (\tilde{\alpha}_p \neq 2p-1, 2p;$$

p – фиксировано). (17)

Из (16), (17) в соответствии с [1. Ур. (10), (12)], [2. Ур. (7)–(9)], получаем, что точки $X \in L_m$ и $Y \in \Gamma_m^p$ являются текущими точками характеристик $\text{Ch}(L_m)$ и $\text{Ch}(\Gamma_m^p)$ вдоль некоторой кривой $k(t)$ на m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ тогда и только тогда, когда x^α и $y^{\tilde{\alpha}_p}$, $y^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\text{Ch}(L_m) \Leftrightarrow x^\alpha A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} t^\beta = 0, x^{\hat{\alpha}} = 0;$$

$$\text{Ch}(\Gamma_m^p) \Leftrightarrow y^{\tilde{\alpha}_p} A_{\tilde{\alpha}_p\beta}^{\alpha} t^\beta + y^{\hat{\alpha}} A_{\hat{\alpha}\beta}^{\alpha} t^\beta = 0,$$

$$y^{\alpha_p} = 0, (\tilde{\alpha} \neq 2p-1, 2p;$$

p – фиксировано).

2. Индуцированные связности

В соответствии с [5] на m -поверхности определим следующие связности.

Связность C_1 в касательном расслоении (S_m, L_m) с базой S_m и слоями L_m , которая отображает соседнюю (бесконечно-близкую первого порядка) m -плоскость L'_m на исходную L_m в точке $A \in S_m$ в направлении нормальной $(n-m)$ -плоскости P_{n-m} , т. е.

$$C_1 : L'_m \xrightarrow{\|P_{n-m}\|} L_m^m.$$

1-формами связности C_1 являются $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$, которые в силу [2. Ур. (1)] удовлетворяют структурным уравнениям

$$\Omega^\alpha \equiv D\omega^\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0,$$

$$\Omega_\alpha^\beta \equiv D\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = R_{\alpha\gamma}^\beta \omega^\gamma \wedge \omega^\sigma. \quad (18)$$

Здесь с учетом (18) кручение равно нулю, а компоненты $R_{\alpha\gamma}^\beta$ тензора кривизны связности C_1 определяются по формулам и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma}^\beta &= \frac{1}{2} A_{\alpha[\gamma}^a A_{a|\sigma]}^\beta; dR_{\alpha\gamma}^\beta + R_{\alpha\gamma}^\tau \omega_\tau^\beta - \\ &- R_{\tau\gamma}^\beta \omega_\alpha^\tau - R_{\alpha\sigma}^\beta \omega_\gamma^\tau - R_{\alpha\gamma}^\tau \omega_\sigma^\tau = R_{\alpha\gamma\sigma}^\beta \omega^\tau; \\ R_{\alpha\gamma\sigma}^\beta &= \frac{1}{2} (A_{\alpha[\gamma}^a A_{a|\sigma]}^\beta + A_{\alpha[\gamma}^a A_{a|\sigma]}^\beta). \end{aligned} \quad (19)$$

На m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ (m – четное) 2-формы кривизны Ω_α^β в силу (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \Omega_{2p-1}^{2q-1} &= \Omega_{2p}^{2q}; \Omega_{2p-1}^{2q} = -\Omega_{2p}^{2q-1}; \\ \Omega_{2p-1}^{2p} &= 2\omega_{2p-1}^{m+1} \wedge \omega_{2p-1}^{m+2}; \\ \Omega_{2p-1}^{2q-1} &= \omega_{2p-1}^{m+1} \wedge \omega_{m+1}^{2q-1} + \omega_{2p-1}^{m+2} \wedge \omega_{m+2}^{2q}; \\ \Omega_{2p-1}^{2q} &= \omega_{2p-1}^{m+1} \wedge \omega_{2q-1}^{m+2} - \omega_{2p-1}^{m+2} \wedge \omega_{2q-1}^{m+1}; \quad (p \neq q). \end{aligned} \quad (20)$$

В соответствии с [1. Ур. (9)–(12)], [2. Ур. (6)] при $m=2s$ в евклидовом пространстве E_{m+2} каждой

точке $A \in S_{m,m+2}^{II}$ сопоставим при каждом фиксированном p следующие линейные подпространства

$$G_4^p = L_2^p \cup P_2 = (\bar{A}, \bar{e}_{2p-1}, \bar{e}_{2p}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2});$$

$$\tilde{L}_{m-2}^p : \tilde{L}_{m-2}^p \cup L_2^p = L_m, \tilde{L}_{m-2}^p \cap L_2^p = A, \tilde{L}_{m-2}^p \perp L_2^p. \quad (21)$$

Подпространство $\tilde{L}_{m-2}^p$ проходит через точку $A \in S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ параллельно векторам $\bar{e}_\alpha$, кроме векторов $\bar{e}_{2p-1}$ и $\bar{e}_{2p}$. Тогда на m -поверхности $S_{m,m+2}^{II} \subset E_{m+2}$ ($m=2s$) каждому фиксированному $p=\bar{1}, s$ отвечает связность

$$C^p : (G_4^p)' \xrightarrow{\|\tilde{L}_{m-2}^p\|} G_4^p, \quad p \text{ – фиксировано.}$$

В силу [1. Ур. (10)–(15)], (1) и (21) 1-формы связности C^p : $\omega_{2p-1}^{2p} = -\omega_{2p}^{2p-1}$ и $\omega_{\tilde{\alpha}_p}^{\tilde{\alpha}} = -\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha_p}$ удовлетворяют следующим структурным уравнениям, определяющим соответствующие 2-формы кривизны:

$$\begin{aligned} \Omega_{2p-1}^{2p} &= -\Omega_{2p}^{2p-1} = D\omega_{2p-1}^{2p} - \omega_{2p-1}^{\hat{\alpha}} \wedge \omega_{\hat{\alpha}}^{2p} = \\ &= \omega_{2p-1}^{\tilde{\alpha}_p} \wedge \omega_{\tilde{\alpha}_p}^{2p}, \end{aligned}$$

$$(\tilde{\alpha}_p = \bar{1}, m; \tilde{\alpha}_p \neq 2p-1, 2p; \quad p = \bar{1}, s, \quad m = 2s;$$

p – фиксировано); (22)

$$\begin{aligned} \Omega_{2p-1}^{m+1} &= \Omega_{2p}^{m+2} = D\omega_{2p-1}^{m+1} - \omega_{2p-1}^{2p} \wedge \\ &\wedge \omega_{2p}^{m+1} - \omega_{2p-1}^{m+2} \wedge \omega_{m+2}^{m+1} = \omega_{2p-1}^{2p+1} \wedge \omega_{2p+1}^{m+1} + \omega_{2p-1}^{2p+2} \wedge \\ &\wedge \omega_{2p+2}^{m+1} + \dots + \omega_{2p-1}^{m-1} \wedge \omega_{m-1}^{m+1} + \omega_{2p-1}^m \wedge \omega_m^{m+1}; \\ \Omega_{2p}^{m+1} &= -\Omega_{2p-1}^{m+2} = -\omega_{2p-1}^{2p+2} \wedge \omega_{2p-1}^{m+1} + \omega_{2p-1}^{2p+1} \wedge \\ &\wedge \omega_{2p}^{m+1} + \dots + \omega_{2p-1}^{m-1} \wedge \omega_m^{m+1} - \omega_{2p-1}^m \wedge \omega_{m-1}^{m+1}, \\ & \quad (p = \bar{1}, s; \quad m = 2s; \quad p \text{ – фиксировано}); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{m+1}^{m+2} &= -\Omega_{m+2}^{m+1} = D\omega_{m+1}^{m+2} - \omega_{m+1}^{\alpha_p} \wedge \omega_{\alpha_p}^{m+2} = \\ &= \omega_{m+1}^{\tilde{\alpha}_p} \wedge \omega_{\tilde{\alpha}_p}^{m+2} = 2(\omega_{2p-1}^{m+1} \wedge \omega_{2p}^{m+1} + \dots + \omega_{m-1}^{m+1} \wedge \omega_m^{m+1}); \end{aligned}$$

$$(\alpha_p = 2p-1, 2p; \quad \tilde{\alpha}_p \neq 2p-1, 2p; \quad \tilde{\alpha}_p = \bar{1}, m;$$

p – фиксировано). (24)

В соответствии с [6. Ур. (2)] каждой паре линейно независимых направлений

$$v = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha) v^\alpha \in L_m,$$

$$w = (\bar{A}, \bar{e}_\beta) w^\beta \in L_m; \quad \text{Rang} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \dots & v^m \\ w^1 & w^2 & \dots & w^m \end{bmatrix} = 2$$

или каждой двумерной площадке $\{v, w\} = v \cup w$ отвечает в точке $A \in S_m$ с учетом (19) аффинное преобразование слоя L_m касательного расслоения (S_m, L_m) со связностью C_1 :

$$R(v, w) = \{R_{\alpha\gamma}^\beta v^\sigma w^\gamma\}. \quad (25)$$

Зададим на m -поверхности распределение $\Delta_{m,r} : A \rightarrow M_r$ ($r < m$), где r -плоскость $M_r \subset L_m$ определяется уравнениями $x_1^{\alpha_1} = f_{\alpha_1}^i x^{\alpha_i}$, $x^a = 0$.

Здесь величины $f_{i_1}^i$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$df_{\alpha_2}^{\alpha_1} + f_{\alpha_2}^{\beta_1} \omega_{\beta_1}^{\alpha_1} - f_{\beta_2}^{\alpha_1} \omega_{\alpha_2}^{\beta_2} + \omega_{\alpha_2}^{\alpha_1} + f_{\beta_2}^{\alpha_1} f_{\alpha_2}^{\beta_1} \omega_{\beta_1}^{\beta_2} = f_{\alpha_2\gamma}^{\alpha_1} \omega^\gamma,$$

которые являются дифференциальными уравнениями распределения $\Delta_{m,\gamma}$. Заметим в соответствии [5], что интегральные кривые распределения $\Delta_{m,\gamma}$ на m -поверхности S_m определяются дифференциальными уравнениями $\omega^\alpha = f_{\beta_2}^{\alpha_1} \omega^{\beta_2}$, вполне интегрируемыми тогда и только тогда, когда

$$F_{[\alpha_1\beta_1]}^{\alpha_2} = 0; F_{\alpha_1\beta_1}^{\alpha_2} = f_{\alpha_1\beta_1}^{\alpha_2} + f_{\alpha_1\beta_2}^{\alpha_2} f_{\beta_1}^{\beta_2}.$$

Обозначим $C_1(\Delta_{m,\gamma})$ – ограничение связности C_1 на распределение $\Delta_{m,\gamma}$. Тогда из (25) и $D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta$ следует, что в точке $A \in S_m \subset E_n$ определяется аффинное преобразование

$$R(\Delta_{m,\gamma}) = \{R_{\alpha_1\beta_1}^{\alpha_2} v^{\alpha_1} w^{\beta_1}\}, \\ v^{\alpha_2} = f_{\alpha_1}^{\alpha_2} v^{\alpha_1}, \quad w^{\alpha_2} = f_{\alpha_1}^{\alpha_2} w^{\alpha_1}. \quad (26)$$

Здесь тензоры кручения $\dot{R}_{\alpha_1\beta_1}^{\alpha_2}$ и кривизны связности $C_1(\Delta_{m,\gamma})$ определяются по формулам:

$$\dot{R}_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha_1} = R_{I\alpha_1\beta_1}^{\alpha_1} + R_{I[\alpha_1\beta_2]}^{\alpha_1} f_{\beta_1}^{\beta_2} + R_{I\alpha_2\beta_2}^{\alpha_1} f_{[\alpha_1}^{\alpha_2} f_{\beta_1]}^{\beta_2}, \quad (I = \overline{0, m}), \\ R_{0\alpha_1\beta_1}^{\alpha_1} = 0, R_{0\alpha_1\beta_1}^{\alpha_2} = F_{[\alpha_1\beta_1]}^{\alpha_2}.$$

Отсюда следует, в соответствии с [5], что распределение $\Delta_{m,\gamma}$ голономно тогда и только тогда, когда кручение связности $C_1(\Delta_{m,\gamma})$ равно нулю.

Обозначим в случае m -поверхности $S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$ ($m=2s$):

1. $C_1(\Delta_{m,2}^{(2)})$ – ограничение связности C_1 на распределение $\Delta_{m,2}^{(2)}$;
2. $C_1(\Delta_{m,m-2}^{(3)})$ – ограничение связности C_1 на распределение $\Delta_{m,m-2}^{(3)}$;
3. $C^p(\Delta_{m,2}^{(1)})$ – ограничение соответствующей связности C^p на распределение $\Delta_{m,2}^{(1)}$;
4. $C^p(\Delta_{m,2}^{(2)})$ – ограничение соответствующей связности C^p на распределение $\Delta_{m,2}^{(2)}$.

Тогда с учетом (13)–(15), (22)–(24), (26) замечаем, что тензоры кручения каждой из указанных связностей определяются по формулам:

$$C_1(\Delta_{m,2}^{(2)}) \Leftrightarrow R_{(p)}^{\alpha_p} = \\ = \frac{1}{2} (A_{\beta_p[2p}^{\alpha_p} C_{2p-1]}^{\beta_p} + A_{\beta_p\alpha_p}^{\alpha_p} C_{[2p-1}^{\beta_p} C_{2p]}^{\alpha_p}); \\ R_{(p)}^{\alpha_p} = \frac{1}{2} (A_{[2p-1,2p]}^{\alpha_p} + A_{[2p-1, \tilde{\gamma}_p]}^{\alpha_p} C_{2p]}^{\alpha_p}). \quad (27)$$

$$C_1(\Delta_{m,m-2}^{(3)}) \Leftrightarrow R_{(p)}^{\alpha_p} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta_p} A_{\beta_p\beta}^{\alpha_p} A_{m+1, [\tilde{\gamma}_p}^{\alpha} A_{m+1] \tilde{\sigma}_p}^{\beta};$$

$$R_{(p)}^{\alpha_p} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta_p} A_{\beta_p}^{\alpha_p} A_{m+1, [\tilde{\gamma}_p}^{\alpha} A_{m+1] \tilde{\sigma}_p}^{\beta}. \quad (28)$$

$$C^p(\Delta_{m,2}^{(1)}) \Leftrightarrow R^{\alpha_p} = \\ = \frac{1}{2} (A_{[2p-1}^{\alpha_p} A_{[\alpha_p \tilde{\gamma}_p]}^{\alpha_p} A_{2p]}^{\tilde{\gamma}_p} + A_{[2p-1}^{\alpha_p} A_{[\alpha_p \tilde{\sigma}_p]}^{\alpha_p} A_{2p]}^{\tilde{\sigma}_p}); \\ R^{\alpha_p} = \frac{1}{2} (A^{\alpha_p} + A_{[2p-1, \tilde{\beta}_p]}^{\alpha_p} A_{2p]}^{\tilde{\beta}_p}). \quad (29)$$

$$C^p(\Delta_{m,2}^{(2)}) \Leftrightarrow R^{\alpha_p} = \\ = \frac{1}{2} (C_{[2p-1}^{\alpha_p} A_{[\alpha_p \tilde{\gamma}_p]}^{\alpha_p} C_{2p]}^{\tilde{\gamma}_p} + C_{[2p-1}^{\alpha_p} A_{[\alpha_p \tilde{\sigma}_p]}^{\alpha_p} C_{2p]}^{\tilde{\sigma}_p}); \\ R^{\alpha_p} = \frac{1}{2} (A_{[2p-1, 2p]}^{\alpha_p} + A_{[2p-1, \tilde{\beta}_p]}^{\alpha_p} C_{2p]}^{\tilde{\beta}_p}). \quad (30)$$

Значения компонент тензоров кривизны соответствующих связностей мы не выписываем, а ограничимся их соответствующими 2-формами кривизны в виде следующей таблицы.

Таблица 1. Формы кривизны связностей

Связность	2-формы кривизны
$C_1(\Delta_{m,2}^{(2)})$	$\Omega_{2p-1}^{2q-1} = 0, \Omega_{2p-1}^{2q} = 0, \Omega_{2p-1}^{2p} \neq 0$
$C_1(\Delta_{m,m-2}^{(3)})$	$\Omega_{2p-1}^{2p} = 0, \Omega_{2p-1}^{2q-1} = 0, \Omega_{2p-1}^{2q} = 0$
$C^p(\Delta_{m,2}^{(1)})$	$\Omega_{2p-1}^{2p} = 0, \Omega_{2p}^{*m+1} = 0, \Omega_{2p-1}^{*m+1} = 0, \Omega_{m+1}^{*m+2} \neq 0$
$C^p(\Delta_{m,2}^{(2)})$	$\Omega_{2p-1}^{*m+1} = 0, \Omega_{2p}^{*m+1} = 0, \Omega_{2p-1}^{*m+1} = 0, \Omega_{m+1}^{*m+2} = 0$

Здесь мы не выписываем те 2-формы кривизны, которые равны указанным в таблице в соответствии с формулами (20), (22)–(24). Заметим, что

в общем случае распределения $\Delta_{m,2}^{(1)}, \Delta_{m,2}^{(2)}$ и $\Delta_{m,m-2}^{(3)}$ являются неголономными на m -поверхности $S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$. Поэтому в общем случае на этой m -поверхности кручение (29, 30) соответствующих связностей ненулевое.

Из (26)–(30) вытекает справедливость следующих утверждений:

1. Каждая плоскость L_2^p , отвечающая точке $A \in S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$, $m=2s$, при соответствующем аффинном отображении кривизны связности $C_1(\Delta_{m,2}^{(2)})$ переходит в параллельную двумерную площадку.
2. Образами двумерной площадки L_2^p в каждой точке $A \in S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$, при ($m=2s$) при всех аффинных отображениях связности $C_1(\Delta_{m,m-2}^{(3)})$ вдоль любой пары линейно независимых направлений, касательных к интегральным кривым распределения $C_1(\Delta_{m,m-2}^{(3)})$ в точке A , является одна и та же точка. Если кручение этой связности равно нулю, то эта связность локально плоская.
3. Нормальная площадка P_2 в точке $A \in S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$, $m=2s$, при аффинном отображении кривизны

- соответствующей связности $C_1(\Delta_{m,2}^{(1)})$ переходит в параллельную двумерную площадку.
4. Образы площадки L_2^p в точке $A \in S_{m,m+2}'' \subset E_{m+2}$, $m=2s$, при соответствующих аффинных отображениях

связности $C^p(\Delta_{m,2}^{(2)})$ при каждом $p=\overline{1,s}$, $m=2s$, переходят в соответствующие точки. Если при фиксированном p кручение связности $C^p(\Delta_{m,2}^{(2)})$ равно нулю, то эта связность локально плоская.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Классификация Коши–Римана многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 5–9.
- Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормально-го расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 5–8.
- Ивлев Е.Т. О многообразии в n -мерном проективном пространстве P_n ($m>2$; $n<m(m+1)$) // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
- Аквис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
- Евтушек Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
- Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразия фигур: Межвуз. темат. сб. научн. трудов. – Калининград: Калининградский ун-т, 1982. – Вып. 15. – С. 32–37.

Поступила 02.12.2011 г.

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

У.Д. Молдоярв

Ошский государственный университет, Кыргызстан
E-mail: ular_osh@rambler.ru

Методом интегральных уравнений и сжимающих отображений доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова:

Нелокальная задача, интегральные условия, интегро-дифференциальное уравнение, сжимающее отображение, неподвижная точка, однозначная разрешимость

Key words:

Non-local problem, the integral conditions, integro-differential equation, a contraction mapping, fixed point, a unique solution, the Riemann function, the norm of the operator.

1. Постановка задачи. Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непосредственных измерений. Например, математическое моделирование процессов распространения тепла [1, 2], процессы влагопереноса в капиллярно-пористых средах [3] приводятся к таким задачам. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [4–6].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) \quad (1)$$

в области $D = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < h\}$, где F – заданная функция.

Уравнение (1) представляет собой канонический вид уравнения в частных производных

третьего порядка относительно старших производных по классификации работы [7], когда уравнение характеристик имеет один двукратный и один простой действительные характеристики.

Пусть $C^{m+n}(D)$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \quad (i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n).$$

Задача 1. Требуется найти решение $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2+1}(D)$ ур. (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_x(0, y) + \int_0^l T_1(x, y) u(x, y) dx = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$