СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – V. 21. – P. 155–160.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 2. – С. 294–304.
3. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 1. – С. 72–81.
4. Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Украинский математический журнал. – 1990. – Т. 42. – № 1. – С. 132–135.
5. Пулькина Л.С. Смешенная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. – 2003. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 435–445.
6. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. – 2008. – № 2 (61). – С. 22–28.
7. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
8. Сопуев А., Молдояров У.Д. Нелокальные краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка // Матер. Междунар. юбилейной научной конф., посвящ. 15-летию образования КРСУ. – Бишкек: КРСУ, 2008. – С. 188–192.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Поступила 10.11.2011 г.

УДК 519.63

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.П. Зимин

Томский политехнический университет
E-mail: zimin@ido.tpu.ru

Предложено развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Такой анализ необходим на этапах алгоритмизации нелинейных краевых задач и верификации моделей. Обоснован выбор фазовых плоскостей для анализа решений краевой задачи о распределении параметров низкотемпературной плазмы термоэмиссионного преобразователя.

Ключевые слова:
Краевая задача, метод фазовой плоскости, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный преобразователь энергии.

Key words:
Boundary value problem, method of phase plane, low-temperature plasma, thermionic converter.

Введение

Первая фаза вычислительного эксперимента (ВЭ) состоит из нескольких этапов: создание и исследование модели; её алгоритмизация; программирование алгоритма; сравнение модельных и экспериментальных результатов – верификации модели [1]. Эффективность исследования и алгоритмизации модели зависит от выбора адекватных математических методов её анализа. Например, на этапе алгоритмизации традиционно применяют один из математических методов, который позволяет построить алгоритм преобразования непрерывной модели в дискретную, пригодную для анализа на ПЭВМ. Вместе с тем, на первых двух этапах ВЭ важным является определение области допустимых решений модели, выявление и изучение общих характерных свойств этих решений, которые необходимо учитывать при алгоритмизации.

Кроме этого, остается окончательно не решенной проблема выбора критериев сравнения модельных и экспериментальных результатов на этапе верификации модели. Этот этап ВЭ существенным образом влияет как на фазу калибровки модели, так и на фазу прогноза: он должен давать направление модификации модели и определять обоснованность экстраполяции результатов моделирования.

Все это вместе взятое требует поиска новых и развитие имеющихся методов анализа математических моделей. Для анализа решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на разных этапах ВЭ широко применяется метод фазовой плоскости [2–7]. Данная статья посвящена развитию метода фазовой плоскости, его применению к анализу решений краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП).

Применение метода фазовой плоскости для краевых задач систем дифференциальных уравнений с частными производными

Понятия фазового пространства, связанных с ним структур, а также метод фазовой плоскости могут быть расширены и применены для краевой задачи, состоящей из системы ДУЧП и краевых условий. При таком расширении понятий и модификации данного метода появляются особенности в их интерпретации и применении.

Рассмотрим эволюционную задачу, описываемую системой ДУЧП для двух переменных u_1, u_2, зависящих от одной пространственной переменной x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + f_1(u_1, u_2, \mu), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + f_2(u_1, u_2, \mu), \end{cases}$$

Для корректной постановки краевой эволюционной задачи необходимо задать временные и пространственные краевые условия, например I рода, для неизвестных функций u_1, u_2:

$$u_1(t=0,x)=u_{1t0}(x),\ u_2(t=0,x)=u_{2t0}(x),$$

$$u_1(t,x=x_0)=u_{1x0}(t),\ u_2(t,x=x_1)=u_{2x1}(t),\ x\in[x_0,x_1].$$

Если при анализе решений ОДУ используется понятие *эволюции точки* (u_{1t},u_{2t}) на фазовой плоскости, то при анализе решений системы ДУЧП существенным становится понятие *эволюция фазовой траектории* (*структуры*) $\{u_1=u_1(x,t_i),\ u_2=u_2(x,t_i)\}$, которая определяется свойствами дифференциального оператора и ограничениями, накладываемыми пространственными и временными краевыми условиями.

Как и для системы ОДУ проводится исследование особых точек и фазовых портретов решений системы ДУЧП. При анализе решений краевой задачи можно отдельно рассматривать поведение граничных условий на фазовой плоскости. Такой анализ особенно важен, когда граничные условия и функции $f_1=f_1(u_1,u_2)$, $f_2=f_2(u_1,u_2)$ нелинейные.

Возможно проведение исследования в фазовом пространстве размерности n для функций, зависящих от трех пространственных переменных: $\{u_1=u_1(x,y,z,t), u_2=u_2(x,y,z,t),\dots,u_n=u_n(x,y,z,t)\}$. В этом случае, как и в n-мерном случае эволюционной задачи Коши для системы ОДУ, важным, но сложным является выбор для исследования фазовых плоскостей, на которых наиболее полно проявляются свойства решений задачи.

Отметим, что некоторые переменные системы $\{u_1=u_1(x,y,z,t), u_2=u_2(x,y,z,t),\dots,u_n=u_n(x,y,z,t)\}$ могут быть взяты в квазистационарном приближении. Это означает, что для таких переменных отсутствует явная зависимость от времени, хотя во времени они могут меняться вследствие изменения других нестационарных переменных, с которыми имеется функциональная связь.

Рассмотрим пример анализа с помощью метода фазовой плоскости решений краевой задачи для системы ДУЧП. Среда, в которой происходит процесс горения, может быть описана нестационарным нелинейным уравнением теплопроводности. Источник тепла описывается двумя членами. Первый, пропорциональный температуре T, нагревает среду и описывает интенсивность процесса её горения, а второй, пропорциональный T^3, ограничивает процесс горения. Задача горения среды с учетом эндотермического члена источника для одномерного случая имеет вид [8]

$$\begin{cases} 0 = q + \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}, \\ \rho c_P \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial q}{\partial x} + \alpha T - \beta T^3, \end{cases}$$

начальное условие $T(t=0,x)=T_{t0}(x)$, $x\in[-x_0,x_0]$; граничные условия:

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=-x_0} = hT\big|_{x=-x_0},\ -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=x_0} = hT\big|_{x=x_0};$$

граничные условия, выраженные через переменные потока тепловой энергии q и T

$$-q\big|_{x=-x_0} = hT\big|_{x=-x_0},\ q\big|_{x=x_0} = hT\big|_{x=x_0},$$

где λ, h – коэффициенты теплопроводности и теплообмена; ρ и c_P – плотность и теплоемкость среды горения; α и β – коэффициенты пропорциональности; x_0 – величина полуинтервала по пространственной переменной x; t – время.

Для данной краевой задаче могут быть заданы граничные условия разного вида, анализ которых на фазовых плоскостях $(T,\partial T/\partial x)$ и (T,q) представлен в [9].

Для исследования особенностей фазового портрета системы ДУЧП рассмотрим стационарную систему уравнений, которая запишется как система ОДУ для пространственной переменной x

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{q}{\lambda}, \\ \dfrac{dq}{dx} = \alpha T - \beta T^3. \end{cases}$$

Приравнивая к нулю правые части системы ОДУ, получим систему алгебраических уравнений для определения координат особых точек на фазовой плоскости (T,q). Исследования показали, что имеются три особые точки: одна типа центра с координатами (0, 0) и две другие типа седла с координатами $(\pm\sqrt{\alpha/\beta},0)$. Для нашей задачи физически реализуемой является одна точка с координатами $(\sqrt{\alpha/\beta},0)$. Разделим первое уравнение системы ОДУ на второе и, интегрируя полученное дифференциальное уравнение первого порядка, получим уравнение, описывающее поведение фазовых траекторий

$$\frac{1}{2\lambda}q^2 + \frac{1}{2}\alpha T^2 - \frac{1}{4}\beta T^4 = C_0, \qquad (*)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\lambda}q_0^2 + \frac{1}{2}\alpha T_0^2 - \frac{1}{4}\beta T_0^4,$$

где T_0, q_0 – значения переменных при $x=-x_0$; C_0 – постоянная интегрирования.

Для исследования решений задачи горения были взяты параметры конкретной среды – дерева:

λ=0,2 Вт/(м·К), h=5 Вт/(м²·К), ρ=500 кг/м³,
c_P=2,39·10³ Дж/(кг·К), α=2500 Вт/(м³·К),
β=0,005 Вт/(м³·К³), x_0=0,021 м.

При горении среды возникает тепловая волна [8], амплитуда которой для указанных выше параметров стремится к постоянному значению $\sqrt{\alpha/\beta}$=707,1 К.

В зависимости от начального распределения температуры и вида граничных условий будет наблюдаться различная эволюция формы волны температуры.

Построим на фазовой плоскости структуры, определяющие поведение решения краевой задачи. Задавая T и решая квадратное уравнение (*) относительно переменной q, получим координаты ветвей сепаратрис. При определении C_0 в качестве T_0 и q_0 брались координаты особой точки ($\sqrt{\alpha/\beta}$,0). На рисунке представлена структура фазового портрета нестационарной системы ДУЧП: ветви сепаратрис, граничные условия III рода и начальное условие задачи. Область возможных решений нестационарной задачи ограничена отрезками прямых, начальным распределением переменных, заданных параметрическими, относительно x, выражениями $T\ (t=0,x)=T_{t0}(x)$, $q(t=0,x)=-\lambda\partial T_{t0}(x)/\partial x$ и соответствующими отрезками ветвей сепаратрис.

Решения нестационарной задачи будут эволюционировать от начального распределения, непрерывно заполняя указанную область, пока полностью не совпадут с сепаратрисами. Если параметры α и β не зависят от времени, форма тепловой волны будет асимптотически приближаться к стационарным фазовым кривым – сепаратрисам. Эволюционируя, область волны горения с максимальной амплитудой будет занимать всё большую часть интервала по x.

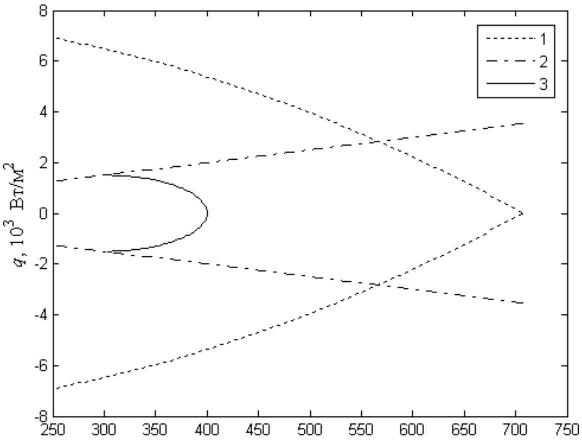

Рисунок. *Область возможных решений нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности на фазовой плоскости (T, q): 1) сепаратрисы; 2 и 3) граничные и начальное условия*

В общем случае при изменении вида правых частей системы ДУЧП будут меняться тип и количество особых точек. Следовательно, в общем случае, фазовая плоскость может разбиваться на области с различным поведением решений системы ДУЧП. Для рассмотренной выше задачи горения это происходит в том случае, когда правая часть уравнений, описывающая поведение источников и стоков тепла (нелинейная функция от переменных u_1, u_2), будет менять свою структуру от некоторых параметров среды горения или внешней среды.

Если рассматривается модель, которая порождается системой ДУЧП, в предположении, что искомые функции не зависят от пространственных переменных, то получаем постановку рассмотренной ранее эволюционной задачи для системы ОДУ, в которой неизвестные функции зависят только от времени. При таком преобразовании модели необходимо учитывать два обстоятельства. Во-первых, для искомых функций переход к системе ОДУ происходит через трансформацию системы ДУЧП. Во-вторых, требуется выполнить корректный переход от краевой задачи к задаче Коши: учесть все явления, присутствующие в распределенной постановке задачи, например возможные механизмы самоорганизации, имеющиеся в системе ДУЧП.

Уравнениями, подобным уравнениям задачи горения среды, описываются процессы прохождения импульса по нервному волокну [10], распространения гена по ареалу [11], ионизации-рекомбинации в межэлектродном зазоре термоэмиссионного преобразователя энергии [12].

Визуализацию и методику исследования решений краевых задач с помощью фазовой плоскости можно рассматривать как пример применения когнитивной графики. Д.А. Поспелов сформулировал основные задачи когнитивной графики [13, 14]:

- создание специальных моделей представления знаний, в которых была бы возможность однообразными средствами представлять как объекты, характерные для логического мышления (уравнения и соотношения), так и образы-картины, с которыми оперирует образное мышление, отражающих поведение этих уравнений и соотношений;
- визуализация тех человеческих знаний, для которых пока невозможно подобрать текстовые описания;
- поиск путей перехода от наблюдаемых образов-картин к формулировке некоторой гипотезы о тех механизмах и процессах, которые скрыты за динамикой наблюдаемых картин.

Применение метода фазовой плоскости в рамках ВЭ позволяет решать указанные выше первую и третью задачи: совмещать анализ решений дифференциальных уравнений с анализом характерных фазовых портретов динамических систем и на основе этого делать заключение об особенностях функционирования реальных систем. Особенно это важно на этапах построения модели и оценки её адекватности.

Выбор переменных фазовых плоскостей для исследования стационарных процессов в низкотемпературной плазме

Во многих физических задачах интерес представляет исследование стационарных (установившихся) решений. В этом случае система уравнений с частными производными первого порядка с одной пространственной переменной превращается в краевую задачу для системы ОДУ. Так как краевая задача порождается преобразованием системы ДУЧП, то важным аспектом её исследования является анализ поведения решений краевой задачи как некоторых фазовых траекторий (структур), а не фазовый точек, как в эволюционной задаче Коши для системы ОДУ. Рассмотрим пример постановки такой стационарной краевой задачи, связанной с описанием стационарных процессов в низкотемпературной плазме термоэмиссионного преобразователя, для которого задаются внешние параметры: температуры эмиттера и коллектора, давление насыщенных паров цезия в резервуаре, межэлектродный зазор, плотность тока преобразователя.

При моделировании зазор преобразователя разбивается на три области: приэлектродные и плазменный объем [12, 15–18]. В приэлектродных областях для потоков электронов J_e и ионов J_i, кинетической энергии электронов q_e, ионов и атомов q_T формулируются нелинейных граничные уравнения в виде балансовых соотношений. Состояние компонент слабоионизированной плазмы в объеме описывается уравнениями состояния, переноса и непрерывности. Предполагается малое отличие плотности электронов и ионов плазмы $n_e \approx n_i = n$. С помощью математических преобразований уравнения переноса и уравнения непрерывности сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных n, J_i, J_e, q_e, q_T, температур электронов T_e, ионов (атомов) T и потенциала пространства V, занятого плазмой.

Следующие причины обуславливают необходимость использования фазовых плоскостей для исследования свойств решений краевой задачи:

1. Сложные нелинейные граничные условия, зависящие от знака потенциальных барьеров у электродов.
2. Наличие особой точки типа седла в нелинейном уравнении диффузии плазмы [19].
3. Необходимость создания численных алгоритмов решения нелинейных краевых задач [20].

Кроме этого, метод фазовой плоскости позволяет ставить и решать задачу сравнения экспериментальных и модельных распределений параметров плазмы и определения из экспериментальных данных параметров модели.

Наиболее часто в качестве переменных фазовой плоскости берутся обобщенные переменные потенциал – поток. Для исследования процессов в плазме термоэмиссионного преобразователя можно использовать довольно много фазовых плоскостей. Выделим несколько групп фазовых плоскостей, которые нужно использовать для исследований в первую очередь.

В первую группу входят фазовые плоскости, переменными которых являются экспериментальные данные. С помощью спектроскопического метода можно измерить распределения $n=n(x)$, $T_e=T_e(x)$, $T=T(x)$; с помощью зондового метода – $n=n(x)$, $T_e=T_e(x)$, $V=V(x)$ [12]. На основе измеренных распределений можно получить их дифференциальные характеристики, а затем построить траектории (структуры) на фазовых плоскостях $(n,dn/dx)$, $(T_e,dT_e/dx)$, $(V,dV/dx)$. Такой выбор фазовых плоскостей подчеркивает тот факт, что информация о свойствах плазмы содержится не только в профилях измеренных распределений параметров плазмы, но и в их дифференциальных характеристиках. Поэтому закономерности для параметров плазмы должны наиболее полно проявляться на фазовых портретах экспериментальных данных, где одновременно отображаются характеристики как функций, так и их производных.

Ко второй группе относятся фазовые плоскости с модельными переменными, которые являются переменными для специально выбранных уравнений. Прежде всего, это переменные для дифференциальных уравнений первого порядка. После их преобразования получаются дифференциальные уравнения второго порядка и соответствующие фазовые плоскости: уравнение диффузии для плотности плазмы – $(n,dn/dx)$, (n,J_i); уравнения теплопроводности как для электронов – $(T_e,dT_e/dx)$, (T_e,q_e), так и для тяжелой компоненты (атомов и ионов) – $(T,dT/dx)$, (T,q_T). Некоторые из этих модельных фазовых плоскостей полностью совпадают с фазовыми плоскостями первой группы. Для вычисления величин J_i, q_e можно использовать как экспериментальные данные, так и соответствующие модельные соотношения.

К третьей группе можно отнести фазовые плоскости, переменные которых, согласно физическим представлениям, существенно связаны и влияют друг на друга. Например, известно, что при возрастании плотности плазма приближается к состоянию локального термодинамического равновесия и существенно зависит от температуры электронов $n=n(T_e)$ [12]. Поэтому для изучения поведение параметров плазмы, которая приближается или находится в состоянии локального термодинамического равновесия, можно проводить исследование на фазовой плоскости (n,T_e) [21].

Выводы

1. Развитие метода фазовой плоскости заключается в представлении решений нелинейной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными на специально выбранных плоскостях с фазовыми переменными. Анализируется структура фазового портрета системы и эволюция её решений (фазовых траекторий, структур) с учетом ограничений, накладываемых нелинейным дифференциальным оператором, начальными и краевыми условиями.

2. Метод фазовой плоскости для анализа решений краевой задачи можно рассматривать как разновидность когнитивной графики, которая применяется на таких этапах технологии вычислительного эксперимента как построение модели и её верификация.

3. На основе анализа стационарной краевой задачи моделирования процессов в низкотемпературной плазме термоэмиссионного преобразователя выделено три группы фазовых плоскостей, с помощью которых необходимо в первую очередь проводить исследования экспериментальных и модельных зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / авт. пред. А.А. Самарский. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 470 с.
4. Неймарк Ю.И., Котельников И.В., Теклина Л.Г. Новый подход к численному исследованию конкретных динамических систем методами распознавания образов и статистического моделирования // Проблемы нелинейной динамики. – 2010. – Т. 18. – № 2. – С. 3–14.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, У.Ф. Мищенко. – 4-е изд., стер. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
6. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления: пер. с англ. – М.: Наука, 1969. – 118 с.
7. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных: пер. с англ. / под ред. А.М. Летова. – М.: Мир, 1974. – 207 с.
8. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание / авт. пред. А.А. Самарский. – М.: Наука, 1988. – 176 с.
9. Зимин В.П. Изображение и анализ граничных условий для уравнения теплопроводности на фазовых плоскостях // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 4. – С. 29–33.
10. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. (London). – 1952. – V. 117. – P. 500–544,
11. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. – 1937. – № 6. – С. 1–26.
12. Бакшт Ф.Г., Дюжев Г.А., Марцинковский А.М. и др. Термоэмиссионные преобразователи и низкотемпературная плазма / под ред. Б.Я. Мойжеса и Г.Е. Пикуса. – М.: Наука, 1973. – 480 с.
13. Поспелов Д.А. Десять «горячих точек» в исследованиях по искусственному интеллекту// Интеллектуальные системы (МГУ). – 1996. – Т. 1. – Вып. 1–4. – С. 47–56.
14. Зенкин А.А. Когнитивная компьютерная графика / под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1991. – 192 с.
15. Стаханов И.П., Пащенко В.П., Степанов А.С., Гуськов Ю.К. Физические основы термоэмиссионного преобразования энергии / под ред. И.П. Стаханова. – М.: Атомиздат, 1973. – 374 с.
16. McCandless R.J., Wilkins D.R., Derby S.L. Theory of thermionic converter volume phenomena // IEEE Conf. Record of 1969 Thermion. Convers. Spes. Conf., Oct., 1969. – Carmel, California (USA), 1969. – P. 163–169.
17. Бакшт Ф.Г., Юрьев В.Г. Низковольтная дуга с накаленным катодом в парах цезия // Журнал технической физики. – 1976. – Т. 46. – Вып. 5. – С. 905–936.
18. Бакшт Ф.Г., Юрьев В.Г. Приэлектродные явления в низкотемпературной плазме (Обзор) // Журнал технической физики. – 1979. – Т. 49. – Вып. 5. – С. 905–944.
19. Зимин В.П. Алгоритм расчета вольт-амперных характеристик термоэмиссионного преобразователя с постоянной температурой электронов / Ред. журн. «Известия вузов. Физика». – Томск, 1984. – № 7. – 36 с. – Деп. в ВИНИТИ 21.03.1984, № 1571–84.
20. Зимин В.П. Исследование функций для управляющего параметра краевой задачи диффузии плотности плазмы // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313. – № 4. – С. 86–92.
21. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. – М.: Наука, 1982. – 375 с.

Поступила 18.01.2012 г.