Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский
Томский политехнический университет»

ISSN 1684-8519

ИЗВЕСТИЯ

ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 324, № 2, 2014

Математика и механика. Физика

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ
г. Томск

ИЗВЕСТИЯ ТОМСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Науки о Земле
Савичев О.Г., *редактор серии*, д-р географ. наук (Россия)
Покровский О.С., канд. геол.-минерал. наук (Франция)
Старостенко В.И., д-р физ.-мат. наук (Украина)
Конторович А.Э., д-р геол.-минерал. наук (Россия)
Шварцев С.Л., д-р геол.-минерал. наук (Россия)

Математика и механика. Физика
Никитенков Н.Н., *редактор серии*, д-р физ.-мат. наук (Россия)
Силкин В.М., канд. физ.-мат. наук (Испания)
Коротеев Ю.М., д-р физ.-мат. наук (Россия)
Уленеков О.Н., д-р физ.-мат. наук (Россия)
Борисов А.М., д-р физ.-мат. наук (Россия)
Рожкова С.В., д-р физ.-мат. наук (Россия)

Химия
Коршунов А.В., *редактор серии*, канд. хим. наук (Россия)
Пестряков А.Н., д-р хим. наук (Россия)
Тойпель У., Dsc (Германия)
Джин-Чун Ким, Dsc (Южная Корея)
Ильин А.П., д-р физ.-мат. наук (Россия)

Энергетика
Заворин А.С., *редактор серии*, д-р техн. наук (Россия)
Ханьялич К., Dsc. (Нидерланды)
Кабов О.А., д-р физ.-мат. наук (Россия)
Маренго М., PhD (Италия)
Алексеенко С.В., д-р физ.-мат. наук (Россия)
Воропай Н.И., д-р техн. наук (Россия)

Управление, вычислительная техника и информатика
Кочегуров А.И., *редактор серии*, канд. техн. наук (Россия)
Хамкер Ф.Х., Dsc (Германия)
Руи Д., PhD (Португалия)
Муравьев С.В., д-р техн. наук (Россия)
Спицын В.Г., д-р техн. наук (Россия)

Экономика. Философия, социология и культурология. История
Барышева Г.А., *редактор серии*, д-р экон. наук (Россия)
Завадскас Э.К., PhD, Dsc (Литва)
Казатти Ф., PhD (Италия)
Грюнвальд А., PhD (Германия)
Бутовская М.Л., д-р ист. наук (Россия)
Головаха Е.И., д-р филос. наук (Украина)

Пестряков А.Н., гл. редактор, д-р хим. наук (Россия)
Глазырин А.С., выпуск. редактор, канд. техн. наук (Россия)
Кирьянова Л.Г., выпуск. редактор, канд. филос. наук (Россия)

EDITORIAL BOARD

Earth sciences
Savichev O.G., *section editor*, Dr. Sc. (Russia)
Pokrovsky O.S., Cand. Sc. (France)
Starostenko V.I., Dr. Sc. (Ukraine)
Kontorovich A.Eh.,Dr. Sc. (Russia)
Shvartsev S.L., Dr. Sc. (Russia)

Mathematics and mechanics. Physics
Nikitenkov N.N., *section editor*, Dr. Sc. (Russia)
Silkin V.M., Cand. Sc. (Spain)
Koroteev Yu.M., Dr. Sc. (Russia)
Ulenekov O.N., Dr. Sc. (Russia)
Borisov A.M., Dr. Sc. (Russia)
Rozhkova S.V., Dr. Sc. (Russia)

Chemistry
Korshunov A.V., *section editor*, Cand. Sc. (Russia)
Pestryakov A.N., Dr. Sc. (Russia)
Teipel U., Dsc (Germany)
Jin-Chun Kim, Dsc (South Korea)
Ilyin A.P., Dr. Sc. (Russia)

Power Engineering
Zavorin A.S., *section editor*, Dr. Sc. (Russia)
Hanjalic K., Dsc. (Netherlands)
Kabov O.A., Dr. Sc. (Russia)
Marengo M., PhD (Italy)
Alekseenko S.V., Dr. Sc. (Russia)
Voropai N.I., Dr. Sc. (Russia)

Control, computer science and technology
Kochegurov A.I., *section editor*, Cand. Sc. (Russia)
Hamker F.H., Dsc (Germany)
Rui D., PhD (Portugal)
Muravyov S.V., Dr. Sc. (Russia)
Spitsyn V.G., Dr. Sc. (Russia)

Economics. Philosophy, social science and cultural studies. History
Barysheva G.A., *section editor*, Dr. Sc. (Russia)
Zavadskas E.K., PhD, DSc (Lithuania)
Casati F., PhD (Italy)
Grunwald A., PhD (Germany)
Butovskaya M.L., Dr. Sc. (Russia)
Golovakha E.I., Dr. Sc. (Ukraine)

Pestryakov A.N., editor in chief, Dr. Sc. (Russia)
Glazyrin A.S., managing editor, Cand. Sc. (Russia)
Kiryanova L.G., managing editor, Cand. Sc. (Russia)

Входит в Перечень ВАК РФ – ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Журнал зарегистрирован Министерством Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. Свидетельство ПИ № 77-16615 от 24 октября 2003 г.
Учредитель: Томский политехнический университет

ISSN 1684-8519

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

Подписной индекс по каталогу Агентства «Роспечать» – 18054

Издается с 1903 г.

Полнотекстовый доступ к электронной версии журнала возможен на сайтах ТПУ: portal.tpu.ru/izvestiya/; ООО «Научная электронная библиотека»: www.elibrary.ru, www.e-library.ru, а также поисковой системы scholar.google.com

Импакт-фактор РИНЦ 2012 г. 0,292

© Tomsk Polytechnic University, 2014

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ФИЗИКА

Модернизация распределений Пирсона для аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных 5
Карпов И.Г., Грибков А.Н.

Математические методы в задаче квантильного хеджирования экзотического европейского опциона купли 11
Данилюк Е.Ю., Рожкова С.В.

Коэффициенты выравнивания физической размерности и масштабные коэффициент при дробном интегрировании и дробном дифференцировании на фракталах 19
Чуриков В.А.

Метод решения задач параметрического линейного программирования, основанный на дифференциальных преобразованиях 25
Аветисян А.Г., Гюльзадян Л.С.

Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе 31
Турсунов Д.А.

Дифференцируемое отображение ранга r аффинного Q_m и проективного P_n пространств 35
Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А.

Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи с периодическими точками поворота в комплексной плоскости 40
Турсунов Д.А.

Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств ($m>n$) 47
Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М. А., Лучинин А.А.

Формирование рационального комплекса текущего ремонта коробки передач одноковшовых фронтальных погрузчиков 52
Жандарбекова А.М.

Ультразвуковое осаждение мелкодисперсного аэрозоля 57
Антонникова А.А., Коровина Н.В., Кудряшова О.Б.

Влияние режимов плазменной наплавки на микроструктуру карбида ванадия в покрытиях на основе порошка ПР-Х18ФНМ 63
Гнюсов С.Ф., Дегтерёв А.С.

Уравновешивание автобалансиром ротора в упруго-вязко закрепленном корпусе с неподвижной точкой 71
Филимонихин Г.Б., Гончаров В.В.

Методика оценки распространения газообразных примесей от тепловых источников 78
Добросельский К.Г.

Исследование состава и свойств белых слоев, образующихся при трении материалов с памятью формы 84
Потекаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В., Табаченко А.Н.

Исследование усталостного износа материалов с памятью формы 90
Потекаев А.И., Хохлов В.А., Галсанов С.В., Шулепов И.А.

Самоорганизация структуры CuCr контактного материала вакуумных выключателей при электронно-лучевом воздействии 96
Дураков В.Г., Гнюсов С.Ф., Дампилон Б.В., Дехонова С.З.

Исследование поглощательной способности слоистой дисперсной среды 102
Горячев Б.В., Могильницкий С.Б.

Влияние исходного состояния низкоуглеродистых сталей на структуру и механические свойства, формируемые при равноканальном угловом прессовании 107
Астафурова Е.Г., Майер Г.Г., Найденкин Е.В., Рааб Г.И., Одесский П.Д., Добаткин С.В.

Особенности формирования азотированных слоев в пластически деформированной стали 40Х, обработанной интенсивными потоками ионов азота 118
Ковалевская Ж.Г., Кукареко В.А.

Новые акустические эффекты, возникающие при распространении волн в средах клиновидной формы 127
Толипов Х.Б.

CONTENTS

MATHEMATICS AND MECHANICS. PHYSICS

Modernization of Pearson distribution for approximation of the bilateral distribution laws of experimental data 5
Karpov I.G., Gribkov A.N.

Mathematical methods in the problem of an exotic European call option quantile hedging 11
Danilyuk E.Yu., Rozhkova S.V.

Factors of physical dimension adjustment and scale factors under fractional integration and fractional differentiation on fractal 19
Churikov V.A.

Method for solving parametric linear programming problems based on differential transforms 25
Avetisyan A.G., Gyulzadyan L.S.

Asymptotic solutions of the bisingular perturbed elliptic equation. Case of a singular point on the boundary 31
Tursunov D.A.

Differentiable mapping of r rank in affine Q_m and projective P_n spaces 35
Al-Khassani M.A., Luchinin A.A.

Asymptotics of solution of singularly perturbed problem with periodic turning points in complex plane 40
Tursunov D.A.

Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces ($m>n$) 47
Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A.

Formation of rational range for running repairs of front-end shovel loader gearbox 52
Zhandarbekova A.M.

Ultrasonic sedimentation of superfine aerosol 57
Antonnikova A.A., Korovina N.V., Kudryashova O.B.

Effect of plasma surfacing parameters on vanadium carbide microstructure in powder coatings based on PR-Cr18VNiMo 63
Gnyusov S.F., Degterev A.S.

Balancing of rotor in visco-elastic fixed casing with fixed point using auto-balancer 71
Filimonikhin G.B., Goncharov V.V.

Method for evaluating distribution of gaseous impurities from heat sources 78
Dobroselsky K.G.

Research of structure and properties of the white layers formed at friction of materials with shape memory 84
Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V., Tabachenko A.N.

Research of fatigue wear of shape memory materials 90
Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V., Shulepov I.A.

Self-organization of contact material CuCr structure in vacuum switch at electron beam action 96
Durakov V.G., Gnyusov S.F., Dampilon B.V., Dekhonova S.Z.

The research of layered dispersion media absorption 102
Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B.

The influence of initial state of low-carbon steels on structure and mechanical properties under equal-channel angular pressing 107
Astafurova E.G., Maier G.G., Naydenkin E.V., Raab G.I., Odessky P.D., Dobatkin S.V.

Features of formation of layers nitrided in plastically deformed steel 40X treated with intensive nitrogen ion fluxes 118
Kovalevskaya Z.G., Kukareko V.A.

New acoustic effects at wave propagation in wedge-shaped media 127
Tolipov K.B.

Исследование структуры теплозащитных плазменных покрытий с использованием спектрометрии ядерного обратного рассеяния 131
Борисов А.М., Востриков В.Г., Романовский Е.А., Ткаченко Н.В., Савушкина С.В., Полянский М.Н.

Исследование упрочнения поверхности сталей при комбинированном ионном и лазерном воздействии 137
Борисов А.М., Крит Б.Л., Куликаускас В.С., Семенова Н.Л., Суминов И.В., Тихонов С.А.

Влияние состава электролита на свойства сплава МА2–1 при микродуговом оксидировании 143
Владимиров Б.В., Крит Б.Л., Людин В.Б., Морозова Н.В., Суминов И.В., Эпельфельд А.В.

Применение метода водородопроницаемости в реакторных экспериментах по исследованию взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами 149
Гордиенко Ю.Н., Кульсартов Т.В., Заурбекова Ж.А., Понкратов Ю.В, Гныря В.С., Никитенков Н.Н.

Studying the structure of thermal barrier plasma coating with nuclear backscattering spectrometry 131
Borisov A.M., Vostrikov V.G., Romanovskiy E.A., Tkachenko N.V., Savushkina S.V., Polyanskiy M.N.

The study of steel surface hardening at combined ion and laser irradiation 137
Borisov A.M., Krit B.L., Kulikauskas V.St., Semenova N.L., Suminov Ig.V., Tikhonov S.A.

Influence of electrolyte composition on properties of the MA2–1 alloy at microarc discharge oxidizing 143
Vladimirov B.V., Krit B.L., Lyudin V.B., Morozova N.V., Suminov Ig.V., Epelfeld A.V.

Application of hydrogen permeation method in reactor experiments on investigation of hydrogen isotope interaction with structural materials 149
Gordienko Yu.N., Kulsartov T.V., Zaurbekova Z.A., Ponkratov Yu.V., Gnyrya V.S., Nikitenkov N.N.

Математика и механика. Физика

УДК 519.224

МОДЕРНИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПИРСОНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДВУХСТОРОННИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Карпов Иван Георгиевич,
д-р техн. наук, профессор кафедры «Информационные системы и защита информации» Тамбовского государственного технического университета, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106. E-mail: zeratul68@mail.ru

Грибков Алексей Николаевич,
канд. техн. наук, доцент кафедры «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем» Тамбовского государственного технического университета, Россия, 392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106.
E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения точности и упрощения процедуры аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных.
***Цель работы**: модернизация метода Пирсона, которая позволяет устранить ряд его недостатков и упростить процедуру аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных, принимающих как положительные, так и отрицательные значения.*
***Методы исследования:** расчеты с использованием методов теории вероятностей и математической статистики, а также программного продукта MathCAD; методы интегрального и дифференциального исчисления.*
***Результаты:** Предложена модернизация распределений Пирсона для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных, принимающих положительные и отрицательные значения, которая позволяет значительно упростить процедуру аппроксимации. Разработана топографическая классификация модернизированных распределений Пирсона с использованием совместного коэффициента асимметрии и эксцесса вместо коэффициента эксцесса. Приведены формулы для расчета числовых характеристик модернизированных распределений Пирсона.*

Ключевые слова:
Распределения Пирсона, аппроксимация законов распределения, плотность распределения вероятностей, классификация распределений, совместный коэффициент асимметрии и эксцесса.

Постановка задачи

Одной из актуальных задач, возникающих в процессе обработки экспериментальных данных, является установление закона распределения и оценка значений его параметров. При этом непосредственная обработка результатов наблюдений во многих случаях не позволяет точно установить истинный закон распределения, а только его аппроксимировать, т. е. получить приближенное описание в виде некоторого известного закона, похожего на неизвестный истинный закон распределения.

При отсутствии априорных данных о виде закона распределения выбор той или иной статистической модели для адекватного описания экспериментальных данных, принимающих как отрицательные, так и положительные значения, может быть основан на известных эмпирических методах, таких как применение распределений Джонсона и Пирсона, разложения в ряд Эджворта и т. д. [1–4].

Известная система распределений Пирсона удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{x-a}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} p(x), \qquad (1)$$

где a, b_0, b_1, b_2 – параметры распределений Пирсона.

С помощью распределений Пирсона можно осуществлять аппроксимацию экспериментальных распределений с J-образной, U-образной либо уни-

модальной формой, имеющих, по крайней мере, хотя бы первые четыре момента.

Основные недостатки метода Пирсона заключаются в следующем:

1) семейство распределений Пирсона наряду с основными типами распределений содержит также частные случаи некоторых из этих распределений, что затрудняет их практическое использование;
2) определение параметров искомого распределения из семейства распределений Пирсона связано с решением различных систем уравнений;
3) затруднительно пояснить физический смысл параметров распределений Пирсона;
4) дифференциальное уравнение (1) содержит в себе неточность, так как его правая часть не обращается в нуль в случае равномерного распределения, которое принадлежит к семейству распределений Пирсона;
5) предложенная Пирсоном классификация распределений с помощью диаграммы в плоскости переменных β_1 и β_2 обладает малой наглядностью.

Величины β_1 и β_2 определяются равенствами

$$\beta_1 = \eta_a^2 = \mu_3^2/\mu_2^3; \quad \beta_2 = \eta_э + 3 = \mu_4/\mu_2^2, \qquad (2)$$

где η_a – коэффициент асимметрии; $\eta_э$ – коэффициент эксцесса; μ_2, μ_3 и μ_4 – соответственно центральные моменты 2-го, 3-го и 4-го порядков.

Целью данной работы является модернизация метода Пирсона, которая позволит устранить отмеченные выше недостатки и упростить процедуру аппроксимации двухсторонних законов распределения экспериментальных данных. При этом вместо дифференциального уравнения (1) предлагается использовать уравнение

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{a_1(x-m_1)-a_0}{b_2(x-m_1)^2+b_1(x-m_1)+b_0}\,p(x), \qquad (3)$$

где m_1 – математическое ожидание.

Основные результаты

Используя общие свойства плотностей распределения вероятностей (ПРВ), установим правила определения параметров a_1, a_0, b_2, b_1 и b_0, входящих в уравнение (3). Для этого запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$(x-m_1)^n[b_0+b_1(x-m_1)+b_2(x-m_1)^2]\,p(x)/dx =$$
$$= (x-m_1)^n[a_1(x-m_1)-a_0]\,p(x)$$

либо

$$y^n(b_0+b_1y+b_2y^2)\,dp(y)/dy = y^n(a_1y-a_0)\,p(y), \qquad (4)$$

где $y=x-m_1$.

Пусть допустимые значения случайной величины (СВ) η с ПРВ $p(y)$ заключены в интервале (l_1,l_2). Проинтегрируем левую часть равенства (4) по частям. Считая, что интегралы существуют, получим

$$\{y^n[b_0+b_1y+b_2y^2]\,p(y)\}_{l_1}^{l_2} -$$
$$-\int_{l_1}^{l_2}[n\,b_0y^{n-1}+(n+1)\,b_1y^n+(n+2)\,b_2y^{n+1}]p(y) =$$
$$= \int_{l_1}^{l_2} y^n(a_1y-a_0)\,p(y)dy.$$

Предположим, что выражение в фигурных скобках обращается в нуль на верхней и нижней границах интервала интегрирования или же

$$\lim_{y\to\pm\infty} y^{n+2}p(y) \to 0,$$

если распределение имеет бесконечный размах. Тогда, используя определение центральных моментов для непрерывной СВ, получим

$$n\,b_0\mu_{n-1}+[(n+1)\,b_1-a_0]\mu_n =$$
$$= -[a_1+(n+2)\,b_2]\;\mu_{n+1}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) позволяет получить рекуррентные соотношения для определения центральных моментов более высокого порядка по моментам более низкого порядка. Последовательно полагая в (5) n=0,1,2,3 и учитывая, что μ_{-1}=0, μ_0=1, μ_1=1, имеем:

$$b_1 - a_0 = 0;$$
$$b_0 = -(a_1+3b_2)\,\mu_2;$$
$$(3b_1-a_0)\,\mu_2 = -(a_1+4b_2)\;\mu_3;$$
$$3b_0\mu_2+(4b_1-a_0)\,\mu_3 = -(a_1+5b_2)\;\mu_4. \qquad (6)$$

Из второго уравнения системы (6) следует, что параметр $b_0\neq0$. Поэтому, решив систему уравнений (6) относительно интересующих нас параметров распределения a_1, a_0, b_2, b_1, получим

$$a_1 = b_0\frac{(18\mu_2^3+12\mu_3^2-10\mu_2\mu_4)}{\mu_2(4\mu_2\mu_4-3\mu_3^2)} = b_0\frac{4\eta_{12}-5}{(2-\eta_{12})\mu_2};$$

$$a_0 = b_1 = b_0\frac{\mu_3(\mu_4-3\mu_2^2)}{\mu_2(4\mu_2\mu_4-3\mu_3^2)} = b_0\frac{\eta_a}{2(2-\eta_{12})\sqrt{\mu_2}};$$

$$b_2 = b_0\frac{2\mu_2\mu_4-6\mu_2^3-3\mu_3^2}{\mu_2(4\mu_2\mu_4-3\mu_3^2)} = b_0\frac{1-\eta_{12}}{(2-\eta_{12})\mu_2}. \qquad (7)$$

С учетом формулы (2), коэффициент η_{12} можно записать в виде

$$\eta_{12} = \frac{1{,}5\beta_1+6}{\beta_2+3} = \frac{1{,}5\,\mu_3^2+6\,\mu_2^3}{\mu_2(\mu_4+3\,\mu_2^2)} = \frac{1{,}5\,\eta_a^2+6}{\eta_э+6},$$
$$0 \le \eta_{12} \le 1{,}5. \qquad (8)$$

Коэффициент η_{12}, определяемый по формуле (8), назовем нормированным совместным коэффициентом асимметрии и эксцесса. Можно показать [5], что верхней границе области возможных значений коэффициента соответствуют распределения в виде совокупности двух дельта-функций, а нижней границе – распределения, имеющие менее четырех моментов. Для симметричных распреде-

лений, когда η_a=0, коэффициент η_{12} представляет собой нормированный коэффициент эксцесса.

Положим параметр $b_0=\mu_2(2-\eta_{12})$, тогда выражения (7) для параметров a_0, a_1, b_1 и b_2 существенно упрощаются:

$$a_1 = 4\,\eta_{12} - 5; \quad a_0 = b_1 = 0,5\,\eta_a\sqrt{\mu_2};$$
$$b_0 = (2-\eta_{12})\mu_2; \quad b_2 = 1-\eta_{12}. \qquad (9)$$

Из анализа соотношений (9) следует, что параметры a_1, a_0, b_2, b_0 и b_1 определяются коэффициентами η_a и η_{12}, а также центральным моментом μ_2.

Дифференциальное уравнение (3) с учетом соотношений (9) принимает вид

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{(4\,\eta_{12}-5)(x-m_1) \;\; -0,5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}}{\left(\begin{array}{l}(1-\eta_{12})(x-m_1)^{\;2} + \\ +0,5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}\,(x-m_1) \;\; +(2-\eta_{12})\,\mu_2\end{array}\right)}\,p(x). \qquad (10)$$

Решение уравнения (10) можно записать следующим образом:

$$p(x) = K_{\text{н}}\,\exp[\varphi(x)], \;\; \varphi(x) = \int\frac{(4\,\eta_{12}-5)(x-m_1) \;\; -0,5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}}{\left(\begin{array}{l}(1-\eta_{12})(x-m_1)^{\;2} + \\ +0,5\,\eta_a\sqrt{\mu_2}\,(x-m_1) \;\; +(2-\eta_{12})\,\mu_2\end{array}\right)}\,dx, \qquad (11)$$

где $K_{\text{н}}$ – коэффициент нормировки. Очевидно, что характер кривой $\varphi(x)$, а следовательно и ПРВ $p(x)$, может быть различным в зависимости от величин коэффициентов η_a и η_{12}, которыми с учетом соотношений (9) в конечном итоге определяются корни уравнения

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 = 0. \qquad (12)$$

Значения корней уравнения (12) зависят также от дополнительного коэффициента

$$\eta_{21} = \frac{b_1}{2\sqrt{|\,b_2\,|\,b_0}} = \frac{\eta_a}{4\sqrt{|\,1-\eta_{12}\,|\,(2-\eta_{12})}}.$$

При этом возможны шесть основных типов распределений, соответствующих двенадцати типам распределений по классификации Пирсона. Их топографическую классификацию удобно производить с помощью диаграммы в плоскости переменных η_a и η_{12}, приведенной на рисунке. Рассмотрим подробнее указанные шесть типов распределений.

Распределение 1. В данном случае $-\infty<\eta_a<\infty$, $1<\eta_{12}<1,5$. Выражение для ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x) = \frac{(x+\chi-\mu)^{\alpha-1}(\chi-x+\mu)^{\nu-1}}{(2\chi)^{\alpha+\nu-1}B(\alpha,\nu)}, \qquad (13)$$
$$-\chi+\mu < x < \chi+\mu,$$

где $B(\alpha,\nu)$ – бета-функция; $\alpha>0$, $\nu>0$ – параметры формы; $\chi>0$ – параметр масштаба; $-\infty<\mu<\infty$ – параметр сдвига.

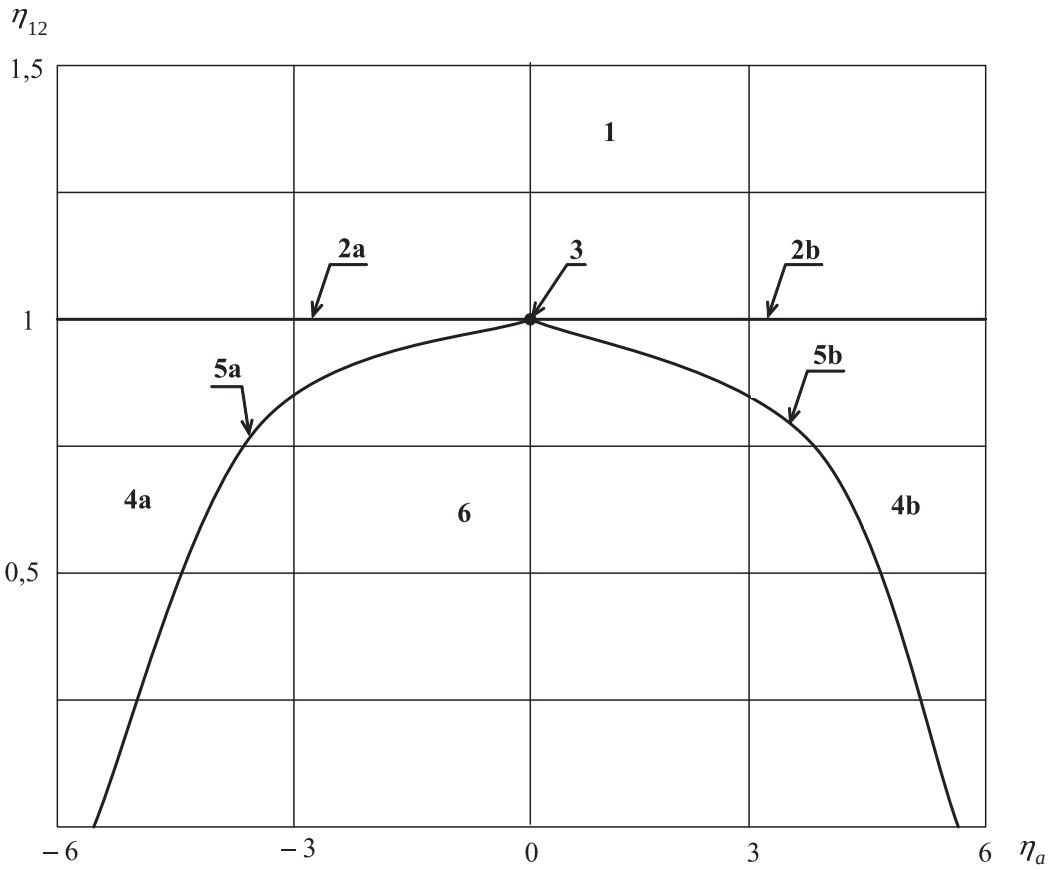


Рисунок. *Диаграмма модернизированных распределений Пирсона*

Параметры распределения (13) связаны с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 следующими соотношениями:

$$\alpha = \left(\frac{0,5}{\eta_{12}-1}-1\right)\left(1-\frac{\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2+1}}\right);$$

$$\nu = \left(\frac{0,5}{\eta_{12}-1}-1\right)\left(1+\frac{\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2+1}}\right);$$

$$\chi = \sqrt{\frac{2-\eta_{12}}{\eta_{12}-1}\mu_2(\eta_{21}^2+1)};\ \ \mu = \sqrt{\frac{2-\eta_{12}}{\eta_{12}-1}\mu_2}\ \eta_{21}+m_1.$$

Распределению (13) по классификации Пирсона соответствует I тип распределения, а также частные случаи – распределения II, VIII, IX и XII. Например, при η_a=0 ПРВ (13) сводится к распределению Пирсона II типа (α=ν). При η_{12}=1,25 и $\eta_a\neq0$ ПРВ (13) сводится к распределению Пирсона XII типа. В этом случае $\alpha+\nu=2$. Если $\mu=\chi$, то ПРВ (13) преобразуется в бета-распределение. На рисунке представлена область существования распределения (13) в координатах η_a и η_{12}. Для нее справедливы неравенства $-\infty<\eta_a<\infty$, $1<\eta_{12}<1,5$.

Распределение 2a. При этом $\eta_a<0$, $\eta_{12}=1$ и выражение для ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(\mu-x)^{\alpha-1}\exp[-\lambda(\mu-x)],$$
$$-\infty < x < \mu, \qquad (14)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция; $\alpha>0$, $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры, связанные с η_a, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\alpha = \frac{4}{\eta_a^2};\quad \lambda = -\frac{2}{\eta_a\sqrt{\mu_2}};\quad \mu = -\frac{2\sqrt{\mu_2}}{\eta_a}+m_1.$$

Распределению (14) по классификации Пирсона соответствует III тип распределения (гамма-распределение) с отрицательным коэффициентом асимметрии. На рисунке представлена область существования распределения (14). Ей соответствует отрезок прямой 2a.

Распределение 2b. Для этого распределения $\eta_{12}=1$, $\eta_a>0$ и выражение для ПРВ имеет вид

$$p(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(x-\mu)^{\alpha-1}\exp[-\lambda(x-\mu)],$$
$$\mu < x < \infty. \qquad (15)$$

Значения параметров α, λ и μ распределения (15) определяются теми же соотношениями, что и для ПРВ (14), с той разницей, что $\lambda=2/\eta_a\sqrt{\mu_2}$.

Распределению (15) по классификации Пирсона соответствует III тип распределения (гамма-распределение) с положительным коэффициентом асимметрии. При α=1 получаем экспоненциальное распределение (X тип распределения Пирсона). На рисунке представлена область существования распределения (15). Ей соответствует отрезок прямой 2b.

Распределение 3. В этом случае $\eta_{12}=1$, $\eta_a=0$, и в результате с учетом (1) получаем распределение VII типа по классификации Пирсона (гауссовский закон) с параметрами $\sigma=\sqrt{\mu_2}$, $\mu=m_1$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad -\infty < x < \infty. \qquad (16)$$

На рисунке области существования распределения (16) соответствует точка с координатами $\eta_a=0$, $\eta_{12}=1$.

Распределение 4a. Для этого распределения $\eta_a<0$, $\eta_{12}<1$, $\eta_{21}<-1$ и выражение для ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x) = \frac{\lambda^{\nu}(\mu-x)^{\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\nu)(\lambda+\mu-x)^{\alpha+\nu}},\quad -\infty < x < \mu, \qquad (17)$$

где $\alpha>0$, $\nu>0$, $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры, связанные с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\alpha = \left(1+\frac{0,5}{1-\eta_{12}}\right)\left(\frac{-\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2-1}}-1\right);\quad \nu = 3+\frac{1}{1-\eta_{12}};$$

$$\lambda = 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)(\eta_{21}^2-1)\mu_2};$$

$$\mu = 0,5\left(2m_1-\lambda-\frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{2(1-\eta_{12})}\right).$$

По классификации Пирсона ПРВ (17) соответствует VI тип распределения (бета-распределение) с отрицательным коэффициентом асимметрии. При α=1 ПРВ (17) трансформируется в XI тип распределения Пирсона.

На рисунке представлена область существования распределения (17). Для нее справедливы неравенства $\eta_a<0$, $\eta_{12}<1$, $\eta_{21}<-1$. Справа она ограничена кривой 5a, для точек которой выполняется условие $\eta_{21}=-1$.

Распределение 4b имеет место для $\eta_{12}<1$, $\eta_a>0$ и $\eta_{21}>1$. При этом

$$p(x) = \frac{\lambda^{\nu}(x-\mu)^{\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\nu)(\lambda-\mu+x)^{\alpha+\nu}},\quad \mu < x < \infty. \qquad (18)$$

Значения параметров α, ν, λ и μ распределения (18) определяются теми же соотношениями, что и для ПРВ (17), с той разницей, что

$$\alpha = \left(1+\frac{0,5}{1-\eta_{12}}\right)\left(\frac{\eta_{21}}{\sqrt{\eta_{21}^2-1}}-1\right),$$

$$\mu = 0,5\left(2m_1+\lambda-\frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{2(1-\eta_{12})}\right).$$

По классификации Пирсона ПРВ (18) так же, как и ПРВ (17), соответствует VI тип распределения (бета-распределение), но с положительным коэффициентом асимметрии. При α=1 ПРВ (18) трансформируется в XI тип распределения Пирсона.

На рисунке представлена область существования распределения (18). Для нее справедливы неравенства $\eta_{12}<1$, $\eta_a>0$ и $\eta_{21}>1$. Слева она ограничена кривой 5b, для точек которой выполняется условие $\eta_{21}=1$.

Распределение 5a является предельным случаем распределения (17) при $\alpha\to\infty$ и $\eta_{12}<1$; $-5{,}65<\eta_a<0$; $\eta_{21}=-1$. ПРВ с учетом (11) имеет вид

$$p(x)=\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{(\mu-x)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu-x}\right),$$
$$-\infty<x<\mu, \qquad (19)$$

где $\nu>0$, $\lambda>0$, $-\infty<\mu<\infty$ – параметры, связанные с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\nu=3+\frac{1}{1-\eta_{12}};\ \lambda=\left(2+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)\mu_2};$$
$$\mu=m_1-\frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{4(1-\eta_{12})}.$$

На рисунке представлена область существования распределения (19). Ей соответствует кривая 5a.

Распределение 5b является предельным случаем распределения (18) при $\alpha\to\infty$ и $\eta_{12}<1$; $0<\eta_a<5{,}65$; $\eta_{21}=1$. Выражение для ПРВ имеет вид

$$p(x)=\frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{(x-\mu)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{\lambda}{x-\mu}\right),$$
$$\mu<x<\infty. \qquad (20)$$

Параметры распределения (20) определяются теми же соотношениями, что и для распределения (19). По классификации Пирсона распределения (19) и (20) соответствуют V типу, причем в первом случае $\eta_a<0$, а во втором случае $\eta_a>0$. На рисунке представлена область существования распределения (20). Ей соответствует кривая 5b.

Распределение 6 получаем при $\eta_{12}<1$ и $-1<\eta_{21}<1$. В этом случае ПРВ с учетом (11) имеет вид [6]

$$p(x)=\frac{\lambda^{\nu}\exp[b\,\mathrm{arctg}((x-\mu)/\lambda)]}{C[\lambda^2+(x-\mu)^2]^{\ 0,5(\nu+1)}},\ -\infty<x<\infty, \qquad (21)$$

где $\nu>0$, $-\infty<b<\infty$ – параметры формы; $\lambda>0$ – параметр масштаба;

$$C=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\exp(bx)(\cos x)^{\ \nu-1}dx=$$
$$=2^{\nu-1}\left|\Gamma(0,5(\nu+1+jb))\right|^2\Big/\pi\Gamma(\nu)$$

– коэффициент нормировки. Если $b=0$, то $C=B(0{,}5;0{,}5\nu)$.

Параметры распределения (21) связаны с η_a, η_{12}, μ_2 и m_1 соотношениями:

$$\nu=3+\frac{1}{1-\eta_{12}};\ b=\left(2+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)\frac{\eta_{21}}{\sqrt{1-\eta_{21}^2}};$$

$$\lambda=\sqrt{\left(1+\frac{1}{1-\eta_{12}}\right)(1-\eta_{21}^2)\,\mu_2};\quad \mu=m_1-\frac{\eta_a\sqrt{\mu_2}}{4(1-\eta_{12})}.$$

ПРВ (21) соответствует IV тип распределения Пирсона. На рисунке представлена область существования распределения (21). Для нее справедливы неравенства $\eta_{12}<1$; $-5{,}65<\eta_a<5{,}65$ и $-1<\eta_{21}<1$. Слева она ограничена кривой 5a, а справа – кривой 5b.

В таблице приведены формулы, выражающие коэффициенты η_a, η_{12} и η_{21} через параметры распределений (13)–(21).

Таблица. *Числовые характеристики модернизированных распределений Пирсона*

Тип	η_a	η_{12}	η_{21}
1	$\eta_a=\frac{2(\nu-\alpha)\sqrt{\nu+\alpha+1}}{\sqrt{\nu\alpha}\,(\nu+\alpha+2)}$, $-\infty<\eta_a<\infty$	$\eta_{12}=\frac{\nu+\alpha+3}{\nu+\alpha+2}$, $1<\eta_{12}<1{,}5$	$\eta_{21}=\frac{\nu-\alpha}{2\sqrt{\alpha\nu}}$, $-\infty<\eta_{21}<\infty$
2a	$\eta_a=-2/\sqrt{\alpha}$	$\eta_{12}=1$	$\eta_{21}\to-\infty$
2b	$\eta_a=2/\sqrt{\alpha}$	$\eta_{12}=1$	$\eta_{21}\to\infty$
3	$\eta_a=0$	$\eta_{12}=1$	$\eta_{21}=0$
4a	$\eta_a=\frac{-2(2\alpha+\nu-1)\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_a<0$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=\frac{1-\nu-2\alpha}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_{21}<-1$
4b	$\eta_a=\frac{2(2\alpha+\nu-1)\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_a>0$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=\frac{2\alpha+\nu-1}{2\sqrt{\alpha(\alpha+\nu-1)}}$, $\eta_{21}>1$
5a	$\eta_a=\frac{-4\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)}$, $-5{,}65<\eta_a<0$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=-1$
5b	$\eta_a=\frac{4\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)}$, $0<\eta_a<5{,}65$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=1$
6	$\eta_a=\frac{4b\sqrt{\nu-2}}{(\nu-3)\sqrt{(\nu-1)^2+b^2}}$, $-5{,}65<\eta_a<5{,}65$	$\eta_{12}=\frac{\nu-4}{\nu-3}$, $0<\eta_{12}<1$	$\eta_{21}=\frac{b}{\sqrt{(\nu-1)^2+b^2}}$, $-1<\eta_{21}<1$

Выводы

Таким образом, модернизация метода Пирсона с использованием коэффициентов η_a, η_{12} и η_{21} позволяет существенно упростить процедуру аппроксимации экспериментальных распределений, так как при этом не требуется определять параметры дифференциального уравнения (1) и решать систему уравнений (7) для нахождения параметров аппроксимируемого распределения. Использование в качестве числовой характеристики совместного коэффициента асимметрии и эксцесса вместо коэффициента эксцесса позволяет также разделить области существования распределений Пирсона и представить их на диаграмме более наглядно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. – М.: Наука, 1966. – 566 с.
2. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 813 с.
3. Бостанджиян В.А. Распределение Пирсона, Джонсона, Вейбулла и обратное нормальное. Оценивание их параметров. – Черноголовка: Редакционно-издательский отдел ИПХФ РАН, 2009. – 240 с.
4. Карпов И.Г., Зырянов Ю.Т., Грибков А.Н. Модифицированные распределения Джонсона и их применение для аппроксимации законов распределения экспериментальных данных // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 46–50.
5. Карпов И.Г., Карпов М.Г., Проскурин Д.К. Методы обобщенного вероятностного описания и идентификации негауссовских случайных величин и процессов. – Воронеж: ВГУ, 2010. – 172 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю. А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1984. – 800 с.

Поступила 02.07.2013 г.

UDC 519.224

MODERNIZATION OF PEARSON DISTRIBUTION FOR APPROXIMATION OF THE BILATERAL DISTRIBUTION LAWS OF EXPERIMENTAL DATA

Ivan G. Karpov,
Dr. Sc., Tambov state technical university,
Russia, 392000, Tambov, Sovetskaya street, 106. E-mail: zeratul68@mail.ru

Aleksey N. Gribkov,
Cand. Sc., Tambov state technical university, Russia, 392000,
Tambov, Sovetskaya street, 106. E-mail: GribkovAlexey@yandex.ru

The urgency of the issue is caused by needs of improving the accuracy and simplifying the approximation of experimental data laws for bilateral distribution.
The main aim of the study: *modernization of the Pearson method, which eliminates some of its disadvantages and simplifies the procedure for approximation of bilateral distribution laws of experimental data, taking both positive and negative values.*
The methods used in the study: *calculations using the methods of probability theory and statistics, as well as the software MathCAD; methods of integral and differential calculus.*
The results: *The authors have proposed the modernized Pearson distributions to approximate distribution laws of experimental data, taking positive and negative values, which can significantly simplify the procedure of approximation. Topographic classification of modernized Pearson distributions with use of coefficient of joint asymmetry and excess kurtosis instead of coefficient of excess is designed. The paper introduces the formulas for calculating numerical characteristics of the modernized Pearson distributions.*

Key words:
Pearson distribution, approximation of distribution laws, density of probabilities distribution, classification of distributions, coefficient of joint asymmetry and excess.

REFERENCES

1. Kendall M., Styuart A. *Teoriya raspredeleniy* [Theory of distributions]. Moscow, Nauka, 1966. 566 p.
2. Kobzar A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists]. Moscow, Fizmatlit, 2006. 813 p.
3. Bostandzhiyan V.A. *Raspredelenie Pirsona, Dzhonsona, Veybulla i obratnoe normalnoe. Otsenivanie ikh parametrov* [Distribution of Pearson, Johnson, Weibull and inverse normal distribution. Parameter Estimation]. Chernogolovka, IPCP Publ. department, 2009. 240 p.
4. Karpov I.G., Zyryanov Yu.T., Gribkov A.N. Modifitsirovannye raspredeleniya Dzhonsona i ikh primenenie dlya approksimatsii zakonov raspredeleniya eksperimentalnykh dannykh [Johnson's modified distributions and their application for approximation of distributions laws of the experimental data]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 46–50.
5. Karpov I.G., Karpov M.G., Proskurin D.K. *Metody obobshchennogo veroyatnostnogo opisaniya i identifikatsii negaussovskikh sluchaynykh velichin i protsessov* [Methods of generalized probabilistic description and identification of non-Gaussian random variables and processes]. Voronezh, VSU Publ., 2010. 172 p.
6. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Elementary functions]. Moscow, Nauka, 1984. 800 p.

УДК 519.865.7

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ КВАНТИЛЬНОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ ЭКЗОТИЧЕСКОГО ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА КУПЛИ

Данилюк Елена Юрьевна,
аспирант кафедры высшей математики Физико-технического
Института ТПУ, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30;
ассистент кафедры прикладной математики факультета прикладной
математики и кибернетики Томского Государственного университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: daniluc_elena@sibmail.com

Рожкова Светлана Владимировна,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики
Физико-технического Института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: rozhkova@tpu.ru

Актуальность исследования обусловлена необходимостью разработки математического аппарата, с помощью которого агент финансового рынка сможет анализировать и прогнозировать экономические процессы. В настоящее время деривативы, в том числе опционы, демонстрируют успешность торговли ими с целью получения прибыли и хеджирования связанных с ценными бумагами рисков.

***Цель работы**: представить классификацию опционов как вторичных ценных бумаг, обосновать выбор в пользу экзотических опционов, указав на преимущества. Для рассматриваемого опциона рассчитать оптимальную стоимость, необходимый для инвестирования капитал, а также состав формируемого портфеля, обеспечивающего капитал. Сформулировать и дать экономическую интерпретацию свойств решения. Протестировать применяемый метод исследования, рассмотрев предельный случай.*

***Методы исследования:** ввиду области применения результатов – диффузионный финансовый рынок – необходимо использовать вероятностные методы для оценивания стоимости опционов как стохастической моделей финансовой математики.*

***Результаты:** авторы решили поставленную задачу, получив формулы справедливой стоимости Европейского опциона купли с ограничением выплат по опциону, а также формулы, определяющие оптимальный портфель ценных бумаг и отвечающий этому портфелю капитал. Рассмотрен предельный случай перехода квантильного хеджирования в суперхеджирование. Изучены коэффициенты чувствительности цены опциона к изменению начальной цены акции, оговоренной при заключении контракта цены исполнения и ограничивающей выплаты величины.*

Ключевые слова:
Финансовый рынок, цена опциона, хеджирующая стратегия, Европейский опцион купли с ограничением выплат, дивиденды, вероятность успешного хеджирования.

Введение

Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей [1]. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов требуют применения математических методов на достаточно высоком уровне. В связи с этим большую популярность имеет финансовая математика, основным объектом исследования которой являются различные модели рынка ценных бумаг [2–4]. Опцион купли (call option) является вторичной (производной) ценной бумагой и представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право купить некоторый оговоренный в договоре базисный актив по определенной цене в определенный момент времени, а продавец опциона за премию, являющуюся ценой опциона, обязан исполнить требование держателя при предъявлении опциона к исполнению. Рассматриваемый в предлагаемой статье опцион купли Европейского стиля может быть погашен только в дату истечения срока действия опциона.

С развитием рынка стандартные, или *ванильные*, опционы купли (standard call option, plain vanilla call option), выплаты по которым зависят от спотовой цены (spot price) базисного актива в момент исполнения деривативa S_T и цены исполнения контракта K_1 (страйковая цена – striking price) (1)

$$f_T(S_T) = (S_T - K_1)^+ = \max(S_T - K_1, 0), \qquad (1)$$

не могли полностью удовлетворить запросы покупателей, вызванные особенностями риска, который бы они хотели хеджировать деривативами. Поэтому естественным стало появление класса экзотических опционов (exotic options), модифицированных дополнительными требованиями и условиями [5–15]. В информационно емком изложении [7–9], а также аналитическом обзоре [16] отмечается, что в мире экзотических опционов просто запредельное разнообразие этих инструментов, теория которых разработана в незначительной степени, тем не менее, изыскания в этой области активно поддерживаются многочисленными грантами, поскольку в результатах исследований заинтересованы многие сферы (например, индустрии страхо-

вания, игр и пр.). Ключевая притягательность экзотических опционов в их очевидном удобстве для кратко- и среднесрочных сделок.

Предметом настоящей статьи является рассматриваемый на основе диффузионной модели (B, S)-финансового рынка с выплатой дивидендов по рисковому активу Европейский опцион купли с ограничением выплаты для продавца опциона с платежной функцией (2)

$$f_T^{call}(S_T) = \min\{(S_T - K_1)^+, K_2\}, \qquad (2)$$

где в условия стандартного контракта включена договорная величина K_2, с одной стороны, ограничивающая выплаты по опциону, что может быть выгодно подписчику опциона (the writer), а с другой стороны, гарантирующая доход держателя (the holder); $a^+=\max\{a;0\}$.

В случае стандартных и экзотических опционов с платежными функциями (1) и (2) соответственно выплата по опционам при совершенном хеджировании (perfect hedging) может быть достаточно высокой, так как совершенное хеджирование предполагает воспроизведение выплат по опциону в полном объёме, а стоимость финансового опциона определяется вне зависимости от предпочтений и характеристик его обладателя. Методы совершенного хеджирования не учитывают ожиданий держателя опциона, его отношение к риску при управлении портфелем, а также особенности его инвестиционной стратегии. Описанная ситуация представляет существенный риск для эмитента и порождает требование ограничения этого риска. В данной работе реализация выдвинутого требования осуществляется на основе одной из трех групп подходов несовершенного хеджирования (imperfect hedging) – квантильного хеджирования (quantile hedging) с заданной (меньше 1) вероятностью выполнения платежного обязательства [4], [17]. При квантильном хеджировании учитывается, что стоимость опциона определяется на основании взаимодействия ряда факторов, непредвиденное изменение которых и обусловливает риск обладателя опциона. Риск обладателя финансового опциона возникает вследствие непредсказуемых рыночных колебаний и движений или внезапных изменений состояния экономической среды, поэтому этот риск классифицируется как рыночный. Стратегия квантильного хеджирования либо максимизирует естественную вероятность успеха хеджирования при условии ограничения стоимости её реализации, либо минимизирует капитал минимального хеджа при заданной вероятности хеджирования.

Используемые обозначения: $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $I[A]$ – индикаторная функция события A; интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R=(-\infty,+\infty)$; $\Phi^{-1}(x)$ – функция, обратная к функции распределения Лапласа

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy, \ \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}.$$

Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega,F,\mathbf{F}=(F_t)_{t>0},\mathbf{P})$ [2, 3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные безрисковые облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \ dB_t = rB_t dt, \qquad (3)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $S_0>0$, $\mu\in R=(-\infty,+\infty)$, $\sigma>0$, $B_0>0$, $r>0$, решения которых имеют вид

$$S_t(\mu) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\},$$

$$B_t = B_0 \exp\{rt\}. \qquad (4)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде $X_t=\beta_t B_t+\gamma_t S_t$, где $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ – пара F_t-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Аналогично [2, 3] предполагается, что за обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом $0\le\delta<r$, а именно: $dD_t=\delta\gamma_t S_t dt$. Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде $dX_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+dD_t$. Так как $dX_t=\beta_t dB_t+\gamma_t dS_t+B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t$, то $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=0$ в стандартной задаче [2–4].

Пусть фиксировано некоторое число ε, $\varepsilon\in(0,1)$. Рассматривается ситуация, когда инвестор соглашается принять на себя некоторый риск по исполнению платежного обязательства, а именно решается задача поиска наименьшего начального капитала, необходимого для исполнения платежного обязательства с вероятностью не меньшей $\mathbf{P}(A)=1-\varepsilon$ [4], [17]. Необходимо определить капитал X_t^{call}, сформировать соответствующий ему портфель (хеджирующую стратегию) $\pi_t^{call}=(\beta_t^{call},\gamma_t^{call})$ и начальное значение капитала $X_t^{call}=C_T$ как стоимость вторичной ценной бумаги – опциона, при которых обеспечивается выполнение платежного обязательства

$$X_T^{call} = f_T^{call}(S_T).$$

Предварительные результаты

Утверждение 1. Рассмотрим риск-нейтральную (мартингальную) меру $\mathbf{P}^*=\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$ – меру, относительно которой процесс $\tilde{S}_t=S_t/B_t$ является мартингалом и существование которой обеспечивает разрешимость задачи на неарбитражных стратегиях хеджирования (стратегиях, не допускающих получения прибыли без риска). Согласно [2–4] процесс плотности мартингальной меры $\mathbf{P}^*$ относительно исходной меры $\mathbf{P}$ задается соотношением

$$d\mathbf{C}_t^{м-r+\partial} = Z_t^{м-r+\partial} d\mathbf{C}_t, \qquad (5)$$

где

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 t\right\}. \quad (6)$$

Тогда относительно меры $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$ вероятностные свойства процесса $S(\mu,r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu,r,\delta) = S_t(\mu,r,\delta)((r-\delta)dt + \sigma dW_t^{\mu-r+\delta}), \quad (7)$$

совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r,\delta) = S_t(r,\delta)((r-\delta)dt + \sigma dW_t), \quad (8)$$

относительно меры $\mathbf{P}$, а капитал определяется уравнением $dX_t = rX_t dt + \sigma\gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta}$, где процесс

$$W_t^{\mu-r+\delta} = W_t + \frac{\mu-r+\delta}{\sigma}t \quad (9)$$

является (согласно теореме Гирсанова) винеровским относительно меры $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta} = \mathbf{P}^*$.

Доказательство приведено в [11].

Множество совершенного хеджирования. Согласно теореме 6.1 из [4] оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем платежного обязательства $f_T^{call} = f_T^{call} I_A$, где множество успешного хеджирования имеет вид

$$A = \left\{\omega : \frac{d\mathbf{C}}{d\mathbf{C}^*} > \text{const}\cdot f_T\right\}. \quad (10)$$

С учетом (2), (4) и (5)–(10) имеем

$$A = \left\{\begin{array}{l}\exp\left\{\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}W_t^* - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2 T\right\} > \\ > \text{const}\cdot f_T^{call}\end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} S_T^{\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}} \exp\left\{\begin{array}{l}-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma^2}\times \\ \times\left(\ln S_0 + \frac{\mu+r+\delta-\sigma^2}{2}\right)T\end{array}\right\} > \\ > \text{const}\cdot\min\{(S_T-K_1)^+, K_2\}\end{array}\right\}. \quad (11)$$

Используя (3), (4) и (7)–(9), получаем

$$S_T = S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T^*\right\} =$$

$$= S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\}. \quad (12)$$

Множество успешного хеджирования (11) для рассматриваемого опциона купли представимо в виде

$$A = \{S_T < d_1\}\cup\{S_T > d_2\} = \{W_T^* < b_1\}\cup\{W_T^* > b_2\}. \quad (13)$$

Тогда, учитывая (12), (13)

$$\mathbf{C}(A) = \mathbf{C}\left(S_T < S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_1\right\}\right) +$$

$$+\mathbf{C}\left\{S_T > S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_2\right\}\right\}. \quad (14)$$

Ввиду монотонного возрастания экспоненциальной функции (14) примет вид

$$\mathbf{C}(A) = \mathbf{C}\left(\begin{array}{l} S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} < \\ < S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_1\right\}\end{array}\right) +$$

$$+\mathbf{C}\left(\begin{array}{l} S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} > \\ > S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_2\right\}\end{array}\right) =$$

$$= \mathbf{C}\left(\begin{array}{l} \exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} < \\ < \exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_1\right\}\end{array}\right) +$$

$$+\mathbf{C}\left(\begin{array}{l} \exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right\} > \\ > \exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_2\right\}\end{array}\right) =$$

$$= \mathbf{C}\left(\sigma W_T < \left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_1\right) +$$

$$+\mathbf{C}\left(\sigma W_T > \left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma b_2\right) =$$

$$= \mathbf{C}\left(W_T < b_1 - \left(\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}\right)T\right) +$$

$$+\mathbf{C}\left(W_T > b_2 - \left(\frac{\mu+\delta-r}{\sigma}\right)T\right). \quad (15)$$

Окончательно из (15) записываем выражение (16)

$$\mathbf{C}(A) = \Phi\left(\left(b_1 - \frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right) +$$

$$+\Phi\left(\left(-b_2 + \frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right), \quad (16)$$

где $\mathbf{P}(A) = 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ – вероятность успешного хеджирования. Определяемые уравнением (17) константы

$$b_1^T = b_1 \text{ и } b_2^T = b_2 \quad (17)$$

удовлетворяют уравнению (16), но в явном виде не находятся.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть определены функции вида

$$y_2(T,S_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1+K_2}{S_0}\right) - \left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right], \quad (18)$$

$$y_1(T,S_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1}{S_0}\right) - \left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right], \quad (19)$$

$$\tilde{y}_2(T,S_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1+K_2}{S_0}\right)-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right],\quad(20)$$

$$\tilde{y}_1(T,S_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{K_1}{S_0}\right)-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right],\quad(21)$$

$$\begin{cases}\tilde{b}_1^T/\sqrt{T}=(b_1^T/\sqrt{T})-\sigma\sqrt{T},\\ \tilde{b}_2^T/\sqrt{T}=(b_2^T/\sqrt{T})-\sigma\sqrt{T}.\end{cases}\quad(22)$$

Тогда справедливая (рациональная) цена опциона продажи в случае выплаты дивидендов в задаче квантильного хеджирования выражается уравнением

$$C_T=\max\{C_T^I,C_T^{II}\},\quad(23)$$

где

$$C_T^I=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{b}_1^T/\sqrt{T})-\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(b_1^T/\sqrt{T})-\Phi(y_1(T,S_0))]+$$
$$+K_2e^{-rT}\Phi(-b_2^T/\sqrt{T}),\quad(24)$$

$$C_T^{II}=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(T,S_0))-\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(y_2(T,S_0))-\Phi(y_1(T,S_0))]+$$
$$+K_2e^{-rT}\Phi(-y_2(T,S_0)).\quad(25)$$

Доказательство: согласно [2–4]

$$C_T=e^{-rT}E^*\{f_T^{call}I_A\},\quad(26)$$

где E^* – усреднение по мартингальной мере $\mathbf{P}^*$. Используя (2), (5)–(8), (12) в случае $y_1(T,S_0)<(b_1^T/\sqrt{T})<y_2(T,S_0)<(b_2^T/\sqrt{T})$, имеем

$$C_T^I=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\begin{matrix}-\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)x-\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\end{matrix}\right\}\times$$
$$\times\min\left\{\left(S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma x\right\}-K_1\right)^+,K_2\right\}\times$$
$$\times I_A\cdot\varphi(x)dx.$$

Вводя замену $z=x/\sqrt{T}$, запишем

$$C_T^I=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\begin{matrix}-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}z\sqrt{T}-\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\end{matrix}\right\}\times$$
$$\times\min\times$$
$$\times\left\{\left(\begin{matrix}S_0\exp\left\{\begin{matrix}\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\\ +z\sigma\sqrt{T}+(\mu-r+\delta)T\end{matrix}\right\}-\\ -K_1\end{matrix}\right)^+,K_2\right\}\times$$
$$\times I_A\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz.\quad(27)$$

Используя обозначение $y=z+[(\mu-r+\sigma)/\sigma]\sqrt{T}$, рассмотрим функцию минимума в (27)

$$\min\left\{\left(S_0\exp\left\{\begin{matrix}\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\\ +y\sigma\sqrt{T}\end{matrix}\right\}-K_1\right)^+,K_2\right\}=$$
$$=\begin{cases}0,\ \text{если}\ S_0-K_1\exp\{\cdot\}\le 0,\\ S_0\exp\{\cdot\}-K_1,\ \text{если}\ 0<S_0\exp\{\cdot\}-K_1<K_2,\\ K_2,\ \text{если}\ S_0\exp\{\cdot\}-K_1\ge K_2,\end{cases}$$

Очевидно, что (18), (19) – решения уравнений

$$S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}y\right\}>K_1+K_2,$$

$$S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}y\right\}>K_1,$$

тогда исходный интеграл (27) представим в виде суммы двух интегралов $C_T^I=C_T^1+C_T^2$. Последовательно определим значение каждого слагаемого-интеграла, тем самым показав следование (24) из (27)–(29).

$$C_T^1=(e^{-rT}/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{b_1^T/\sqrt{T}}\{\cdot\}dz=$$
$$=(e^{-rT}/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{y_1(S_0,T)}\{\cdot\}dy+$$
$$+(e^{-rT}/\sqrt{2\pi})\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\{\cdot\}dy=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{\begin{matrix}-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\left(y-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)\sqrt{T}-\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\right)^2T\end{matrix}\right\}\times$$
$$\times\left(S_0\exp\left\{\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+y\sigma\sqrt{T}\right\}-K_1\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2\right\}dy=$$
$$=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}S_0\exp\left\{\begin{matrix}\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\\ +y\sigma\sqrt{T}-\frac{y^2}{2}\end{matrix}\right\}dy-$$
$$-\frac{K_1e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy=$$
$$=\frac{S_0e^{-\delta T}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right\}dy-$$
$$-\frac{K_1e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_1(S_0,T)}^{b_1^T/\sqrt{T}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}dy=$$
$$=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{b}_1^T/\sqrt{T})-\Phi(\tilde{y}_1(S_0,T))]-$$
$$-K_1e^{-rT}[\Phi(b_1^T/\sqrt{T})-\Phi(y_1(S_0,T))].\quad(28)$$

$$C_T^2 = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty} \{\cdot\} dz =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty} \exp\times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\left(y - \dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)\sqrt{T} - \\ -\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right) \end{array} \right\}$$

$$\times K_2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2\right\} dy =$$

$$= \frac{K_2 e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{b_2^T/\sqrt{T}}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = K_2 e^{-rT} \Phi\left(-\frac{b_2^T}{\sqrt{T}}\right). \quad (29)$$

Аналогичные рассуждения и процедура преобразования приводят к (25), когда $(b_1^T/\sqrt{T}) = y_2(T,S_0) = (b_1^T/\sqrt{T})$, что видно из (30)

$$C_T^{II} = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{y_2(S_0,T)} \{\cdot\} dy + \int\limits_{y_2(S_0,T)}^{+\infty} \{\cdot\} dy \right) =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{y_1(S_0,T)} \{\cdot\} dy + \int\limits_{y_1(S_0,T)}^{y_2(S_0,T)} \{\cdot\} dy + \int\limits_{y_2(S_0,T)}^{+\infty} \{\cdot\} dy \right) =$$

$$= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int\limits_{y_1(S_0,T)}^{y_2(S_0,T)} \exp\left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\left(y - \dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right) \times \\ \times \sqrt{T - \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\mu - r + \delta}{\sigma}\right)^2 T\right)} \end{array} \right\} \times$$

$$\times \left(S_0 \exp\left\{\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + y\sigma\sqrt{T}\right\} - K_1 \right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y - \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2\right\} dy +$$

$$+ \frac{K_2 e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{y_2(S_0,T)}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy =$$

$$= K_2 e^{-rT} \Phi(-y_2(S_0,T)) +$$

$$+ S_0 e^{-\delta T} [\Phi(\tilde{y}_2(S_0,T)) - \Phi(\tilde{y}_1(S_0,T))] -$$

$$- K_1 e^{-rT} [\Phi(y_2(S_0,T)) - \Phi(y_1(S_0,T))]. \quad (30)$$

Чтобы обеспечить платежное обязательство в условиях неопределенности, возникающей ввиду потенциальной реализации одной из ситуаций: $y_1(T,S_0) < (b_1^T/\sqrt{T}) < y_2(T,S_0) < (b_2^T/\sqrt{T})$ или $(b_1^T/\sqrt{T}) = y_2(T,S_0) = (b_1^T/\sqrt{T})$ стоимость опциона продажи целесообразно определять формулой (23) как максимальную из потенциальных стоимостей (24), (25).

Теорема 2. В случае квантильного хеджирования текущий капитал X_t^{call} и оптимальный портфель $\pi_t^{call} = (\beta_t^{call}, \gamma_t^{call})$ определяются формулами

$$X_t^{call} = \begin{cases} X_t^I, & \text{если } C_T = C_T^I, \\ X_t^{II}, & \text{если } C_T = C_T^{II}, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$X_t^I = S_t e^{-\delta(T-t)} [\Phi(\tilde{b}_1^{T-t} / \sqrt{T-t}) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t, S_t))] -$$

$$- K_1 e^{-r(T-t)} [\Phi(b_1^{T-t} / \sqrt{T-t}) - \Phi(y_1(T-t, S_t))] +$$

$$+ K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(-b_2^{T-t} / \sqrt{T-t}), \quad (32)$$

$$X_t^{II} = S_t e^{-\delta(T-t)} \times$$

$$\times [\Phi(\tilde{y}_2(T-t, S_t)) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t, S_t))] -$$

$$- K_1 e^{-r(T-t)} [\Phi(y_2(T-t, S_t)) - \Phi(y_1(T-t, S_t))] +$$

$$+ K_2 e^{-r(T-t)} \Phi(-y_2(T-t, S_t)), \quad (33)$$

$$\pi_t^{call} = (\beta_t^{call}, \gamma_t^{call}) =$$

$$= \begin{cases} \pi_t^I = (\beta_t^I, \gamma_t^I), & \text{если } X_t^{call} = X_t^I, \\ \pi_t^{II} = (\beta_t^{II}, \gamma_t^{II}), & \text{если } X_t^{call} = X_t^{II}, \end{cases} \quad (34)$$

где

$$\gamma_t^I = e^{-\delta(T-t)} [\Phi(\tilde{b}_1^{T-t} / \sqrt{T-t}) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t, S_t))], \quad (35)$$

$$\gamma_t^{II} = e^{-\delta(T-t)} [\Phi(\tilde{y}_2(T-t, S_t)) - \Phi(\tilde{y}_1(T-t, S_t))], \quad (36)$$

$$\beta_t^I = \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{B_t} \Phi\left(-\frac{b_2^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right) -$$

$$- \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{B_t} \left[\Phi\left(\frac{b_1^{T-t}}{\sqrt{T-t}}\right) - \Phi(y_1(T-t, S_t)) \right], \quad (37)$$

$$\beta_t^{II} = \frac{K_1 e^{-r(T-t)}}{B_t} \times$$

$$\times [\Phi(y_1(T-t, S_t)) - \Phi(y_2(T-t, S_t))] +$$

$$+ \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{B_t} \Phi(-y_2(T-t, S_t)), \quad (38)$$

где b^{T-t}, $\tilde{b}^{T-t}/\sqrt{T-t}$, $y_2(T-t,S_t)$, $y_1(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$ определяются формулами (18)–(22) с соответствующими заменами $T \to (T-t)$, $S_0 \to S_t$.

Доказательство: согласно [2–4] имеем

$$X_t^{call} = {}^{-*}\{e^{-r(T-t)} f_T^{call} I_A \,|\, S_t\}, \quad (39)$$

$$\gamma_t^{call} = \frac{\partial X_t^{call}(s)}{\partial s}\Big|_{s=S_t}, \quad \beta_t^{call} = \frac{X_t^{call} - \gamma_t^{call} S_t}{B_t}. \quad (40)$$

Формулы (31)–(33), (39) получаем из (24)–(26) с соответствующими заменами $T \to (T-t)$, $S_0 \to S_t$.

Учитывая справедливые для функции Лапласа равенства

$$\frac{\partial \Phi(\varphi(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(s)}{2}\right\} \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\Phi(-\varphi(s))}{\partial s}=-\frac{\partial\Phi(\varphi(s))}{\partial s},$$

а также вид функций $y_2(T-t,S_t)$, $y_1(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$, $\tilde{y}_2(T-t,S_t)$, имеем

$$\frac{\partial\Phi(y_2(T-t,S_t))}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y_2^2(T-t,S_t)}{2}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{S_t}{(K_1+K_2)}\left(-\frac{K_1+K_2}{S_t^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{y_2^2(T-t,S_t)}{2}\right\}\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t},$$

или в общем виде

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(y_k(T-t,S_t))=-\frac{\varphi(y_k(T-t,S_t))}{S_t\sigma\sqrt{(T-t)}},\qquad(41)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\Phi(\tilde{y}_k(T-t,S_t))=-\frac{\varphi(\tilde{y}_k(T-t,S_t))}{S_t\sigma\sqrt{(T-t)}},\qquad(42)$$

$$\tilde{y}_k(T-t,S_t)=y_k(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t},\qquad(43)$$

$$\frac{\partial\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t))}{\partial S_t}=$$

$$=-\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\exp\left\{-\frac{y_2^2(T-t,S_t)}{2}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{y_2^2(T-t,S_t)\sigma\sqrt{T-t}-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}\right\}=$$

$$=\frac{\partial\Phi\left(y_2(T-t,S_t)\right)}{\partial S_t}\frac{K_1+K_2}{S_t}\times$$

$$\times\exp\{-(r-\delta)(T-t)\},\qquad(44)$$

$$\frac{\partial\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))}{\partial S_t}=$$

$$=\frac{\partial\Phi(y_1(T-t,S_t))}{\partial S_t}\frac{K_1}{S_t}\exp\{-(r-\delta)(T-t)\},\qquad(45)$$

где $k=\{1:2\}$.

Согласно (31)–(33), (40) и с учетом (41)–(45) приходим к (34)–(36). Используя (34)–(36) в (40), получаем (37), (38).

Замечание 1. Теоремы 1, 2 отражают точное решение задачи квантильного хеджирования опциона купли при условии выплаты дивидендов по рисковому активу.

Свойства решения

Утверждение 2. Решение задачи для Европейского опциона купли с ограничением выплат и дивидендами по акции в условиях совершенного хеджирования определяется уравнениями

$$\tilde{C}_T^I=K_1e^{-rT}\Phi(y_1(T,S_0))-S_0e^{-\delta T}\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0)),\qquad(46)$$

$$\tilde{C}_T^{II}=S_0e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(T,S_0))-\Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))]-$$

$$-K_1e^{-rT}[\Phi(y_2(T,S_0))-\Phi(y_1(T,S_0))]+$$

$$+K_2e^{-rT}\Phi(-y_2(T,S_0)).\qquad(47)$$

$$\tilde{\gamma}_t^I=-e^{-\delta(T-t)}\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t)),\qquad(48)$$

$$\tilde{\gamma}_t^{II}=e^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t))-\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))],\qquad(49)$$

$$\tilde{\beta}_t^I=\frac{K_1e^{-r(T-t)}}{B_t}\Phi(y_1(T-t,S_t)),\qquad(50)$$

$$\tilde{\beta}_t^{II}=\frac{K_1e^{-r(T-t)}}{B_t}\times$$

$$\times[\Phi(y_1(T-t,S_t))-\Phi(y_2(T-t,S_t))]+$$

$$+\frac{K_2e^{-r(T-t)}}{B_t}\Phi(-y_2(T-t,S_t)),\qquad(51)$$

$$\tilde{X}_t^I=K_1e^{-r(T-t)}\Phi(y_1(T-t,S_t))-$$

$$-S_te^{-\delta(T-t)}\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t)),\qquad(52)$$

$$\tilde{X}_t^{II}=$$

$$=S_te^{-\delta(T-t)}[\Phi(\tilde{y}_2(T-t,S_t))-\Phi(\tilde{y}_1(T-t,S_t))]-$$

$$-K_1e^{-r(T-t)}[\Phi(y_2(T-t,S_t))-\Phi(y_1(T-t,S_t))]+$$

$$+K_2e^{-r(T-t)}\Phi(-y_2(T-t,S_t)).\qquad(53)$$

Данные уравнения представляют собой обобщения соответствующих уравнений, описанных в [18–20]

Следствие 1. Если $\varepsilon=0$, формулы (23)–(25), (31)–(38) переходят в формулы (46)–(53). Это подтверждает переход несовершенного хеджирования в совершенное.

Доказательство: если $\varepsilon=0$, вероятность успешного хеджирования $\mathbf{P}(A)=1-\varepsilon=1$, то есть переходим к совершенному виду хеджирования. Так как $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, а константы из уравнений (16), (17) удовлетворяют равенству (54) при $\varepsilon=0$

$$\Phi\left(\left(b_1^T-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right)=$$

$$=\Phi\left(\left(b_2^T-\frac{\mu-r+\delta}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right),\qquad(54)$$

тогда получаем $\tilde{X}_0^{call}=\lim X_t^{call}$, $\tilde{\gamma}_t^{call}=\lim\gamma_t^{call}$, $\tilde{\beta}_t^{call}=\lim\beta_t^{call}$.Таким образом, пришли к (48)–(53). Если $\tilde{C}_T=\tilde{X}_0^{call}$, то (46), (47) следует из (52), (53).

Представляют интерес зависимости стоимости опциона от параметров S_0, K_1, K_2, определяющих начальную цену рискового актива, страйковую цену и величину, ограничивающую выплаты по опциону. Эти зависимости характеризуются величинами $C_T^{S_0}=\partial C_T/\partial S_0$, $C_T^{K_1}=\partial C_T/\partial K_1$, $C_T^{K_2}=\partial C_T/\partial K_2$, называемыми коэффициентами чувствительности стоимости опциона продажи к соответствующему параметру.

Утверждение 3. Коэффициенты чувствительности $C_T^{S_0}$, $C_T^{K_1}$, $C_T^{K_2}$ задаются формулами

$$C_T^{S_0} = \begin{cases} e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{b}_1^T(T,S_0)) - \Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))], \\ \text{если } C_T = C_T^I, \\ e^{-\delta T}[\Phi(\tilde{y}_2(T,S_0)) - \Phi(\tilde{y}_1(T,S_0))], \\ \text{если } C_T = C_T^{II}, \end{cases} \quad (55)$$

$$C_T^{K_1} = \begin{cases} e^{-rT}[\Phi(y_1(T,S_0)) - \Phi(b_1^T / \sqrt{T})], \\ \text{если } C_T = C_T^I, \\ e^{-rT}[\Phi(y_1(T,S_0)) - \Phi(y_2(T,S_0))] - \\ -(e^{-rT} / \sigma\sqrt{T})\varphi(y_2(T,S_0))(K_2 / K_1 + K_2), \\ \text{если } C_T = C_T^{II}, \end{cases} \quad (56)$$

$$C_T^{K_2} = \begin{cases} e^{-rT}\Phi(-(b_2^T / \sqrt{T})), \text{ если } C_T = C_T^I, \\ e^{-rT}\Phi(-y_2(T,S_0)) - \\ \quad -(e^{-rT} / \sigma\sqrt{T})\varphi(y_2(T,S_0))\left(\dfrac{K_2}{K_1 + K_2}\right), \\ \quad \text{если } C_T = C_T^{II}. \end{cases} \quad (57)$$

Доказательство формул (55)–(57) следует из определения $C_T^{S_0}$, $C_T^{K_1}$, $C_T^{K_2}$ с учетом (23)–(25).

Выводы

Аналитические и графические исследования коэффициентов чувствительности $C_T^{S_0}$, $C_T^{K_1}$, $C_T^{K_2}$ показали, что $C_T^{S_0}>0$, $C_T^{K_1}<0$, $C_T^{K_2}>0$. В данном случае рациональная стоимость Европейского опциона купли с ограничением выплат по опциону в условиях квантильного хеджирования является возрастающей функцией начальной стоимости рискового актива (акции) S_0 и величины K_2, ограничивающей выплаты по опциону, и убывающей функцией цены исполнения опциона (страйковой цены) K_1. Экономическая интерпретация этих свойств заключается в следующем. Увеличение начальной цены S_0 приводит к увеличению в среднем спотовой цены S_T. Это повышает вероятность того, что S_T превзойдет K_1, т. е. вероятность предъявления опциона к исполнению увеличивается. В данной ситуации риск держателя опциона уменьшается, за что следует платить больше. Увеличение страйка K_1 приводит к повышению вероятности того, что S_T не превзойдет K_1. Таким образом, риск для покупателя опциона возрастает, а за возрастающий риск следует платить меньше. Увеличение цены опциона продажи при возрастании K_2 объясняется увеличением потенциального дохода покупателя опциона.

Основные результаты работы при решении задачи методами квантильного хеджирования:

1. Найдена формула справедливой стоимости Европейского опциона купли с ограничением выплат по опциону.
2. Найдены формулы, определяющие оптимальный портфель ценных бумаг и отвечающий этому портфелю капитал.
3. Рассмотрен предельный случай перехода квантильного хеджирования в совершенное.
4. Исследованы некоторые свойства цены опциона, отражающие зависимость стоимости опциона от начальной цены акции, оговоренной при заключении контракта цены исполнения и ограничивающей выплаты величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2007. – 1052 с.
2. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 80–129.
3. Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. – Hackensack (New Jersey): World Scientific Publishing Company, 1999. – 834 p.
4. Melnikov A.V., Volkov S.N., Nechaev M.L. Mathematics of financial obligations // Translations of Mathematical Monographs. – 2002. – V. 212. – 194 p.
5. Rubinstein M. Exotic options // Finance working paper. – 1991. – № 220. – P. 5–43.
6. Zang P.G. An introduction to exotic options // European Financial Management. – 1995. – V. 1. – № 1. – P. 87–95.
7. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 1 (15). – С. 53–57.
8. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 2 (16). – С. 61–64.
9. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 3 (17). – С. 68–73.
10. Инглис-Тейлор Э. Производные финансовые инструменты. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 224 с.
11. Применение вероятностных методов к исследованию экзотических опционов купли Европейского типа на основе экстремальных значений цены рискового актива / У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова, Е.Г. Пахомова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 6. – С. 5–12.
12. Европейский опцион купли Лукбэк с плавающим страйком / У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова, Е.Г. Пахомова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 6. – С. 13–15.
13. Лоран Ж. Опасные игры с деривативами. Полувековая история провалов от Citibank до Barings, Societe Generale и AIG. – М.: Альпина Паблишер, 2012. – 342 с.
14. Буренин А.Н. Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производные. – М.: НТО, 2011. – 465 с.
15. Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. – М.: НТО, 2011. – 394 с.
16. Чекулаев М. Экзотические опционы или опционная экзотика? URL: http://fortrader.ru/learn/ekzoticheskie-opciony-ili-opcionnaya-ekzotika.html (дата обращения: 11.09.2013).
17. Novikov A.A. Hedging Options with a Given Probability // Probability Theory and Applications. – 1999. – № 43 (1). – P. 135–143.
18. Демин Н.С., Андреева У.В. Экзотические опционы купли с ограничением выплат и гарантированным доходом в модели Блэка–Шоулза // Проблемы управления. – 2011. – № 1. – С. 33–39.

19. Данилюк Е.Ю., Демин Н.С. Квантильное хеджирование опциона купли на диффузионном (B, S)-рынке в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 4 (13). – С. 61–71.
20. Данилюк Е.Ю., Демин Н.С. Хеджирование опциона купли с заданной вероятностью на диффузионном (B, S)-рынке в случае выплаты дивидендов по рисковому активу // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 1 (14). – С. 22–30.

Поступила 24.12.2013 г.

UDC 519.865.7

MATHEMATICAL METHODS IN THE PROBLEM OF AN EXOTIC EUROPEAN CALL OPTION QUANTILE HEDGING

Elena Yu. Danilyuk,
Tomsk State University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 36.
E-mail: daniluc_elena@sibmail.com

Svetlana V. Rozhkova,
Dr. Sc., Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30.
E-mail: rozhkova@tpu.ru

The urgency of the discussed issue is caused by the need to provide mathematical tools allowing financial market agent to analyze and to forecast the economic processes. At the present time derivatives, including options, demonstrate a success of options trading to make a profit and hedg the risks associated with risk assets.
***The main aim of the study**: to represent options classification as secondary securities, to justify the choice for exotic options, indicating advantages; to find the optimal price, a size of the capital needed for investment and optimal hedging strategy for the option under consideration; to formulate and to give economic interpretation of the solution properties. To test the method used for investigation having considered a limiting case.*
***The methods used in the study**: in diffusion financial market it is necessary to use stochastic methods for option pricing as stochastic model of financial mathematics.*
***The results**: the authors solved the stated problem, founded formulas for right European call option price with payment limitation and formulas defining optimal securities portfolio and capital meeting this portfolio. The limit case of transition from quantile hedging to superhedging is considered. The authors studied the coefficients of option price sensitivity to initial stock price and to defined strike price.*

Key words:
Financial market, option price, hedging strategy, European call option with payment limitation, dividends, perfect hedging probability.

REFERENCES

1. Khall D.K. *Optsyony, fyuchersy i drugie proizvodnye finansovye instrumenty* [Options, futures and other derivatives]. Moscow, Vilyams Publ., 2007. 1052 p.
2. Shiryaev A.N., Kabanov Y.M., Kramkov O.O., Melnikov A.V. K teorii raschetov optsionov Evropeyskogo i Amerikanskogo tipov. II. Nepreryvnoe vremya [Towards the Theory of Pricing of Options of both European and American types. II. Continuous time] *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya*, 1994, vol. 39, no. 1, pp. 80–129.
3. Shiryaev A.N. Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory. Hackensack (New Jersey), World Scientific Publishing Company, 1999. 834 p.
4. Melnikov A.V., Volkov S.N., Nechaev M.L. Mathematics of financial obligations. *Translations of Mathematical Monographs*, 2002, vol. 212, 194 p.
5. Rubinstein M. Exotic options. *Finance working paper*, 1991, no. 220, pp. 5–43.
6. Zang P.G. An introduction to exotic options. *European Financial Management*, 1995, vol. 1, no. 1, pp. 87–95.
7. Kozhin K. Vse ob ekzoticheskikh optsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag*, 2002, no. 1 (15), pp. 53–57.
8. Kozhin K. Vse ob ekzoticheskikh optsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag*, 2002, no. 2 (16), pp. 61–64.
9. Kozhin K. Vse ob ekzoticheskikh optsionakh [All about exotic options]. *Rynok tsennykh bumag*, 2002, no. 3 (17), pp. 68–73.
10. Inglis-Taylor A. *Proizvodnye finansovye instrumenty* [Dictionary of Derivatives]. Moscow, INFRA-M Publ., 2001. 224 p.
11. Andreeva U.V., Danilyuk E.Yu., Demin N.S., Rozhkova S.V., Pakhomova E.G. Primenenie veroyatnostnykh metodov k issledovaniyu ekzoticheskikh optsionov kupli Evropeyskogo tipa na osnove ekstremalnykh znacheniy tseny riskovogo aktiva [Applying stochastic methods for European exotic call options research, based on extreme values of the risk asset price]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 6, pp. 5–12.
12. Andreeva U.V., Danilyuk E.Yu., Demin N.S., Rozhkova S.V., Pakhomova E.G. Evropeyskiy optsion kupli Lukbek s plavayushchim straykom [European call option Lookback with floating strike]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 6, pp. 13–15.
13. Loran G. Opasnye igry s derivativami. Poluvekovaya istoriya provalov ot Citibank do Barings, Societe Generale i AIG. [Global Derivative Debacles: From Theory to Malpractice]. Moscow, Alpina Publisher, 2012. 342 p.

14. Burenin A.N. Forvardy, fyuchersy, optsiony, ekzoticheskie i pogodnye proizvodnye [Forwards, futures, options, exotic and annual derivatives]. Moscow, NTO Publ., 2011. 465 p.
15. Burenin A.N. Rynok tsennykh bumag i proizvodnykh finansovykh instrumentov [Equity market and derivatives market]. Moscow, NTO Publ., 2011. 394 p.
16. Chekulaev M. Ekzoticheskie optsiony ili optsionnaya ekzotika? [Exotic options or option exotic?]. Available at: http://fortrader.ru/learn/ekzoticheskie-opciony-ili-opcionnaya-ekzotika.html (accessed 11 September 2013).
17. Novikov A.A. Hedging Options with a Given Probability. *Probability Theory and Applications*, 1999, no. 43 (1), pp. 135–143.
18. Demin N.S., Andreeva U.V. Ekzoticheskie optsiony kupli s ogranicheniem vyplat i garantirovannym dokhodom v modeli Bleka–Shoulza [Exotic call options with a guaranteed income in Black–Shouls model]. *Problemy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 33–39.
19. Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Kvantilnoe khegzhirovanie optsiona kupli na diffuzionnom (B, S)-rynke v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu [Quantile hedging of the call option in diffusion (B, S)-market in case of the dividends payment on risk asset]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2010, no. 4 (13), pp. 61–71.
20. Danilyuk E.Yu., Demin N.S. Khegzhirovanie optsiona kupli s zadannoy veroyatnostyu na diffuzionnom (B, S)-rynke v sluchae vyplaty dividendov po riskovomu aktivu [Call option hedging with the state probability in diffusion (B, S)-market in case of the dividends payment on risk asset]. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2011, no. 1 (14), pp. 22–30.

УДК 517

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВЫРАВНИВАНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ И МАСШТАБНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИ ДРОБНОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ДРОБНОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ НА ФРАКТАЛАХ

Чуриков Виктор Анатольевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: vachurikov@list.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью проводить преобразования математических моделей, сформулированных в пространствах нецелочисленных размерностей, в пространства с целочисленными размерностями.
***Цель работы**: нахождение преобразований степенных функций, заданных на фракталах при их дробном интегрировании и дробном дифференцировании (дробном интегродифференцировании), в пространствах нецелочисленных размерностей с последующим преобразованием степенных функций в пространства целочисленных размерностей. Ввиду того, что при дробном интегродифференцировании происходят изменения физической размерности и изменение линейных размеров фракталов, эти изменения необходимо корректировать для дальнейшего рассмотрения этих функций в пространствах с целым числом измерений.*
***Методы исследования:** математические преобразования, в основе которых лежит локальный d-оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования, действующий в пространстве степенных функций.*
***Результаты:** для согласования физических размерностей в пространствах с нецелочисленной и целочисленной размерностями вводятся коэффициенты выравнивания размерности. Для согласования изменения линейных размеров фракталов при переходах в пространства с целым числом измерений необходимо вводить коэффициенты, которые были названы масштабными коэффициентами. Приводятся важные частные случаи масштабных коэффициентов.*

Ключевые слова:
d-оператор, коэффициент выравнивания физической размерности, корректирующие функции, эффективная плотность фрактала, сопряжённый фрактал, правило сохранения размерности, масштабный коэффициент фрактала.

Введение

В последнее время широко рассматриваются пространства с размерностью нецелочисленных порядков, которые формально будем называть фракталами [1–3]. Кроме этого часто исследуются различные процессы, проходящие во фракталах.

Адекватным математическим аппаратом для описания фракталов и процессов в них считается дробный анализ. В дробном анализе обобщается понятие производных и интегралов на случай любых конечных вещественных или комплексных порядков [4–15]. В этом случае будем говорить о *дробном интегродифференцировании*.

При построении математических моделей для пространств постоянной дробной размерности α необходимо вводить производные и интегралы порядка α.

Фракталы всегда находятся в пространствах целочисленных порядков, например в евклидовых пространствах. В этом случае будем говорить, что *фрактал погружен в пространство целочисленной размерности*. В рассматриваемом случае речь идёт об одномерном евклидовом пространстве, в которое погружен фрактал размерности $0 \le \alpha \le 1$.

Математические модели процессов, которые проходят во фракталах, т. е. в пространствах с нецелочисленной размерностью, формулируются с использованием дробного интегродифференцирования. Но рассматривать эти процессы удобней не

во фракталах, а в пространствах с целочисленной размерностью, что более привычно и более удобно.

Поэтому, чтобы рассматривать фрактальные процессы в евклидовых пространствах, необходимо преобразовывать сформулированные математические модели из пространств с нецелочисленной размерностью в пространства целочисленной размерности, т. е. в евклидовы пространства.

Такие преобразования сводятся к необходимости менять физическую размерность степенных функций, с помощью которых задаются физические величины на фракталах, а также преобразовывать коэффициенты, получаемые при дробном интегродифференцировании.

Это приводит к необходимости соответствующим образом менять физическую размерность степенных функций, заданных на фракталах, при их преобразованиях в пространства целочисленных размерностей, а также преобразовывать коэффициенты, получаемые при дробном интегродифференцировании.

Работа посвящена рассмотрению данных преобразований.

Выравнивание физической размерности

При дробном интегродифференцировании вещественного порядка α степенной функции x^{β} с помощью d-оператора получим для разных случаев показателя степени степенной функции [16]

$$d^{\pm\alpha}x : x^{\beta} = \mu x^{\beta\pm\alpha} + C_{\pm\alpha}(x);\ \alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R};$$
$$x, \alpha, \beta, \mu = \text{const}.$$

Знаки, стоящие перед порядками интегродифференцирования α, определяют тип операции. Если знак положительный, то это соответствует операции дробного интегрирования, а если знак минус, то операции дробного дифференцирования; μ – коэффициент интегродифференцирования, который имеет разное значения для разных сочетаний порядка и показателя степенной функции; $C_{\pm\alpha}(x)$ – полиномы интегродифференцирования.

Коэффициент интегродифференцирования будет

$$\mu = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta\pm\alpha)},$$

когда одновременно не выполняются условия

$$\beta = -1, -2, -3, \ldots \text{ и } \beta \pm \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$$

Если эти условия одновременно выполняются, тогда для $\beta=-m=-1,-2,-3,\ldots$ коэффициенты будут

$$\mu = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-m\pm\alpha+1)}.$$

Если при интегрировании выполняются логарифмические случаи, $\beta\neq-\alpha$; $\alpha>0$, то интеграл будет

$$d^{\alpha}x : x^{-\alpha} = \ln_{\alpha}(x) + C_{\alpha}(x);\quad \alpha \neq 0.$$

Здесь $\ln_{\alpha}(x)$ – логарифм порядка α.

При дробном интегродифференцировании степенных функций во всех случаях с помощью d-оператора меняется их физическая размерность.

У физической величина x в этом случае меняется физическая размерность $[x^{\beta}]=\mathrm{X}^{\beta}$ на размерность $[x^{\beta\pm\alpha}]=\mathrm{X}^{\beta\pm\alpha}$. Здесь X – физическая размерность величины x. Например, если переменная x, является пространственной переменной, то её физическая размерность будет иметь размерность длины, т. е. $[x]=\mathrm{L}$. Если переменная x временная переменная, то у неё будет физическая размерность времени, или $[x]=\mathrm{T}$ [17].

Изменение физической размерности $\Delta^{\pm\alpha}[x]$ при дробном интегродифференцировании порядка α по переменной x запишем

$$\Delta^{\pm\alpha}[x] = \mathrm{X}^{\pm\alpha}.$$

Здесь знак «+» соответствует изменению физической размерности при дробном интегрировании порядка α, а знак «–» – при дробном дифференцировании порядка α.

При использовании дробного анализа необходимо результаты привести в пространство какой-либо одной размерности. Одними из самых удобных и привычных для таких преобразований пространств будут евклидовы пространства с топологическими размерностями 1, 2 и 3.

В классическом анализе изменение физической размерности при интегродифференцировании будет

$$\Delta^{\pm1}[x] = \mathrm{X}^{\pm1}.$$

Если в уравнении стоят разные порядки интегродифференцирования, то между слагаемыми будут меняться физические размерности и операции сложения и вычитания, а также отношения сравнения (равенства, больше и меньше) теряют смысл. Поэтому если у разных слагаемых в дифференциальном уравнении стоят производные разных порядков, то после интегродифференцирования в этих случаях необходимо вводить *коэффициенты выравнивания физических размерностей*. Для этого необходимо скорректировать размерность так, чтобы у всех слагаемых после интегродифференцирования была одна физическая размерность.

В общем случае слагаемые можно подгонять к разным физическим размерностям, например к любым размерностям дробных порядков, но удобней приводить размерность к целочисленному порядку 1. Это более привычно для восприятия и дальнейшей работы с полученными результатами.

Чтобы удовлетворять указанным условиям, получаемые при интегродифференцирование порядка α степенные функции необходимо умножать на степенную функцию с показателем $1-\alpha$

$$x^{\pm(1-\alpha)}.$$

Здесь знак «+» перед скобками в показателе степени соответствует изменению физической размерности при дробном интегрировании порядка α, а знак «–» – при дробном дифференцировании порядка α.

Функции $x^{\pm(1-\alpha)}$ назовём *корректирующими функциями*, размерности которых будут $[x^{\pm(1-\alpha)}]=\mathrm{X}^{\pm(1-\alpha)}$.

Корректирующие функции задаются на множестве точек сопряжённого фрактала.

При умножении степенной функции, получающейся после дробного интегродифференцирования порядка α на соответствующую корректирующую функцию, тогда получим размерности, соответствующие операциям интегродифференцирования в классическом анализе

$$[x^{1-\alpha}][x^{\beta+\alpha}] = [x^{\beta+1}] = \mathrm{X}^{\beta+1} = \mathrm{X}^{1-\alpha}\,\mathrm{X}^{\beta+\alpha};$$

$$[x^{-(1-\alpha)}][x^{\beta-\alpha}] = [x^{\beta-1}] = \mathrm{X}^{\beta-1} = \mathrm{X}^{-(1-\alpha)}\,\mathrm{X}^{\beta-\alpha}.$$

Объединив эти два соотношения, получим

$$[x^{\pm(1-\alpha)}][x^{\beta\pm\alpha}] = [x^{\beta\pm1}] = \mathrm{X}^{\beta\pm1} = \mathrm{X}^{\pm(1-\alpha)}\,\mathrm{X}^{\beta\pm\alpha}.$$

Физический смысл умножения на корректирующую функцию заключается в том, что дробное интегродифференцирование основано на мере $d^{\pm\alpha}x$, которая учитывает приращение только на множестве точек фрактала x_α, который является пространством дробной размерности α. Точки сопряженного пространства $x_{1-\alpha}$ размерности $1-\alpha$ в данном случае игнорируются. В то время как переменная x является объединением множества точек фрактала и точек сопряжённого пространства. Умножение на корректирующую функцию учитывает распространение переменных до всего одномерного пространства x. Фрактал x_α и сопряжённый фрактал $x_{1-\alpha}$ образуют пространство x, в котором оба фрактала находятся

$$x_\alpha \cup x_{1-\alpha} = x; \quad x_\alpha \cap x_{1-\alpha} = \varnothing.$$

Для частного случая интегрирования порядка α степенных функций с показателем $-\alpha$ получаемая физическая размерность будет иметь размерность числа

$$d^\alpha x : x^{-\alpha} = \ln_\alpha(x).$$

Здесь $\ln_\alpha(x)$ – натуральный логарифм порядка α.

Другими словами, для размерности в этом случае получим

$$[d^\alpha x : x^{-\alpha}] = [\ln_\alpha(x)] = \mathrm{X}^0.$$

Многие другие, не степенные функции $f(x)$, тоже могут иметь физическую размерность числа, т. е. $[f(x)]=\mathrm{X}^0$.

Особенности гомогенных фракталов

Предположим, что в одномерном пространстве, описываемом переменной x, находится фрактал размерности α, или x, $0\le\alpha\le1$. Если размерность фрактала постоянна α=const, то такой фрактал называется *гомогенным*. Данный фрактал занимает некоторое множество точек, принадлежащих оси x, которая будет составлять долю αx, которую будем называть *эффективной плотностью фрактала*. Остальные точки оси x буду принадлежать *сопряжённому фракталу* или нескольким фракталам. Для простоты будем считать, что сопряжённый фрактал один, тогда точки фракталов на оси x будут находиться в соотношении [18]

$$x = x_\alpha \cup x_{1-\alpha}; \quad x_\alpha \cap x_{1-\alpha} = \varnothing.$$

Здесь $x_{1-\alpha}$ – сопряженный фрактал, точки которого, как и точки фрактала x_α, лежат оси x.

Дробные размерности фрактала и сопряжённого фрактала будут

$$\dim_\varphi(x) = 1; \quad \dim_\varphi(x_\alpha) = \alpha; \quad \dim_\varphi(x_{1-\alpha}) = 1-\alpha.$$

Здесь $\dim_\varphi(\ldots)$ – дробная (фрактальная) размерность фракталов, или размерность Хаусдорфа–Безиковича [1–3] рассматриваемых объектов.

Для фрактала и сопряжённого фрактала предполагается справедливым *правило сохранения размерности*

$$\dim_\varphi(x) = \dim_\varphi(x_\alpha \cup x_{1-\alpha}) = 1.$$

Эффективная плотность сопряжённого фрактала будет $(1-\alpha)x$.

Эффективная плотность переменной x, фрактала и сопряженного фрактала находятся в соотношении, в силу правила сохранения размерности

$$x = \alpha x + (1-\alpha)x.$$

Эффективная плотность переменной x совпадает с самой переменной x.

Физическая размерность фрактала и сопряженного фрактала будет

$$[x] = \mathrm{X}; \quad [x_\alpha] = \mathrm{X}^\alpha; \quad [x_{1-\alpha}] = \mathrm{X}^{1-\alpha}.$$

Для физических размерностей будет справедливо

$$[x] = [x_\alpha][x_{1-\alpha}] = \mathrm{X}^\alpha\,\mathrm{X}^{1-\alpha} = \mathrm{X}.$$

Здесь X – физическая размерность величины x, которая зависит от физической природы переменной x.

Дифференциал по переменной x можно записать как сумму дифференциалов по фракталу и по сопряжённому фракталу порядков α и $1-\alpha$

$$dx = dx_\alpha \cup dx_{1-\alpha} = dx_\alpha + dx_{1-\alpha}.$$

Дифференциалы по фракталу и по сопряжённому фракталу можно выразить через дробные дифференциалы порядков α и $1-\alpha$

$$dx_\alpha = Ax^{1-\alpha}d^\alpha x; \quad dx_{1-\alpha} = Bx^\alpha d^{1-\alpha}x.$$

Переходя от дифференциалов по точкам фрактала и сопряжённого фрактала dx_α и $dx_{1-\alpha}$ к дробным дифференциалам $d^\alpha x$ и $d^{1-\alpha}x$ по точкам всего пространства x, дифференциал dx можно записать как сумму дифференциалов по фракталу и сопряжённому фракталу

$$dx = dx_\alpha + dx_{1-\alpha} = Ax^{1-\alpha}d^\alpha x + Bx^\alpha d^{1-\alpha}x.$$

Здесь A и B – некоторые коэффициенты, обеспечивающие сохранение эффективной толщины и физической размерности фрактала и сопряжённого фрактала. Функции $x^{1-\alpha}$ и x^α являются *корректирующими функциями*.

Данное выражение дифференциала обобщает выражение для случая рассмотрения фракталов для раздельных потоков [19].

Заметим, что физические размерности всех слагаемых будут

$$[dx] = [Ax^{1-\alpha}d^\alpha x] = [Bx^\alpha d^{1-\alpha}x] = \mathrm{X}.$$

Дробные размерности всех слагаемых будут

$$\dim_{\varphi}(dx)=1;\ \ \dim_{\varphi}(Ax^{1-\alpha}d^{\alpha}x)=1;$$

$$\dim_{\varphi}(Bx^{\alpha}d^{1-\alpha}x)=1.$$

Масштабный коэффициент при дробном интегрировании константы вдоль фрактала

Проинтегрируем с помощью d-оператора [14, 20] константу 1 вдоль оси x, которую разобьём на фрактал и на сопряжённый ему фрактал, что можно записать

$$dx:1=Ax^{1-\alpha}d^{\alpha}x:1+Bx^{\alpha}d^{1-\alpha}x:1.$$

В эквивалентной записи данный оператор интегрирования можно переписать

$$\int dx=\int dx_{\alpha}+\int dx_{1-\alpha}=Ax^{1-\alpha}\int d^{\alpha}x+Bx^{\alpha}\int d^{1-\alpha}x.$$

После интегрирования случая, когда подынтегральная функция равна 1, получим

$$\int dx=x+C;$$

$$\int dx_{\alpha}=\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}x^{\alpha}+\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}C_{\alpha}(x);$$

$$\int dx_{1-\alpha}=\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha}x^{1-\alpha}+$$

$$+\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha}C_{1-\alpha}(x).$$

Приравняв к нулю полиномы интегрирования $C=C_{1-\alpha}(x)=C_{\alpha}(x)=0$, которые дают неопределённость, получим равенство

$$x=\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}x^{\alpha}+\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}x^{\alpha}x^{1-\alpha}.$$

Тогда легко найти коэффициенты A и B исходя из соотношения для эффективных толщин фрактала и сопряжённого фрактала

$$\alpha=\frac{A}{\alpha\,\Gamma(\alpha)};\ \ 1-\alpha=\frac{B}{(1-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)}.$$

Тогда получим коэффициенты

$$A=\alpha^{2}\,\Gamma(\alpha);\ \ B=(1-\alpha)^{2}\,\Gamma(1-\alpha),$$

которые будем называть соответственно *масштабным коэффициентом фрактала* и масштабным коэффициентом сопряжённого фрактала.

Окончательно получим для разложения дифференциала в соответствии с d-оператором

$$dx=\alpha^{2}\,\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}d^{\alpha}x+(1-\alpha)^{2}\,\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}d^{1-\alpha}x.$$

Для частных случаев $\alpha=1$ и $\alpha=0$ получим тождественные равенства $dx=dx$.

После интегрирования будут выполняться соотношения

$$x=x_{\alpha}\cup x_{1-\alpha}=\alpha x+(1-\alpha)x.$$

Здесь, исходя из полученных результатов, можно ввести геометрические *преобразования «сжатия» фрактала* и сопряжённого фрактала вдоль оси x до «предельной» плотности

$$x_{\alpha}\to\alpha x;\ \ x_{1-\alpha}\to(1-\alpha)x.$$

Для общего случая преобразований степенной зависимости фракталов будут справедливы соотношения

$$(x_{\alpha})^{g(y)}\to(\alpha x)^{g(y)}=\alpha^{g(y)}x^{g(y)}.$$

Здесь $g(y)$ – некоторая функция, зависящая от некоторой переменной y и не зависящая от переменной x.

Масштабный коэффициент при дробном дифференцировании на фракталах

Найдём аналогичный коэффициент при дробном дифференцировании. Для этого найдём производную переменной x по той же переменной x, которую можно записать как сумму производных фракталу x_{α} и сопряжённого фрактала $x_{1-\alpha}$ по переменной x

$$d^{-1}x:x=d^{-1}x:x_{\alpha}+d^{-1}x:x_{1-\alpha}=$$

$$=\frac{d}{dx}x_{\alpha}+\frac{d}{dx}x_{1-\alpha}=Mx^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x+Nx^{1-\alpha}\frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}}x.$$

Здесь M и N – некоторые коэффициенты, обеспечивающие сохранение эффективной толщины фрактала и сопряжённого фрактала.

Найдём коэффициенты, исходя из условия выполнения равенства

$$\frac{d}{dx}x=1.$$

Кроме этого необходимо учитывать условие для эффективных толщин фрактала и его сопряжённого фрактала

$$1=\alpha+(1-\alpha).$$

После дробного дифференцирования слагаемых получим

$$Mx^{-1+\alpha}\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\alpha+1)}x^{1-\alpha}+Mx^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x)+$$

$$+Nx^{-\alpha}\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-(1-\alpha)+1)}x^{1-1+\alpha}+Nx^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x)=$$

$$=M\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+Mx^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x)+$$

$$+N\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}+Nx^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x).$$

Приравняв к нулю полиномы интегрирования $C_{-\alpha}(x)=C_{-1+\alpha}(x)=0$, получим равенство

$$M\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}+N\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}=\alpha+(1-\alpha)=1.$$

Найдём неопределённые коэффициенты M и N

$$M=\alpha\,\Gamma(2-\alpha);\ \ N=(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha).$$

Полиномы интегрирования после данных преобразований будут

$$Mx^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x)=\alpha\,\Gamma(2-\alpha)x^{-1+\alpha}C_{-\alpha}(x);$$

$$Nx^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x)=(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)x^{-\alpha}C_{-1+\alpha}(x).$$

Здесь $x^{\alpha-1}$ и $x^{-\alpha}$ – *корректирующие функции*, а $\Gamma(2-\alpha)$ и $\Gamma(1+\alpha)$ – масштабные коэффициенты при дробном дифференцировании по переменной x.

В результате производная по фракталу и сопряжённому фракталу будет

$$d^{-1}x : x = d^{-\alpha}x : x_{\alpha} + d^{1-\alpha}x : x_{1-\alpha} =$$
$$= \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x_{\alpha} + \frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}}x_{1-\alpha} =$$
$$= \frac{\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}{x^{1-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x + \frac{(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{x^{\alpha}}\frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}}x =$$
$$= \alpha + C_{-\alpha}(x) + (1-\alpha) + C_{-1+\alpha}(x) =$$
$$= 1 + C_{-\alpha}(x) + C_{-1+\alpha}(x).$$

Для предельных значений α=1 и α=0 получим тождественные равенства $\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x$.

Физические размерности первого и второго слагаемого будут равны

$$\left[\frac{d}{dx}x\right] = \left[\frac{\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}{x^{1-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x\right] =$$
$$= \left[\frac{(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{x^{\alpha}}\frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}}x\right] = \mathrm{X}^{0}.$$

Дробные размерности этих слагаемых будут равны нулю

$$\dim_{\varphi}\left(\frac{d}{dx}x\right) = 0;$$
$$\dim_{\varphi}\left(\frac{\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}{x^{1-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x\right) = 0;$$
$$\dim_{\varphi}\left(\frac{(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)}{x^{\alpha}}\frac{d^{1-\alpha}}{dx^{1-\alpha}}x\right) = 0.$$

Заключение

Получены коэффициенты выравнивания физической размерности и масштабные коэффициенты, которые необходимо вводить при переходах из пространств с нецелочисленными размерностями в пространства с целочисленными размерностями. Полученные масштабные коэффициенты являются важными частными случаями, но не являются общими. В дальнейшем предполагается получить более общие масштабные коэффициенты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
2. Falconer K.J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – New York: John Wiley, 2003. – 337 p.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / пер. с англ. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
4. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. – 234 p.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies. V. 204. – New York: Elsevier, 2006. – 520 p.
7. Anastassiou G. Fractional differentiation inequalities. – Dordrecht; Heidelberg; London; New York: Springer, 2009. – 672 p.
8. Ross B. Fractional Calculus and Its Applications. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975. – 386 p.
9. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures. – 1997. – V. 378. – P. 223–276.
10. Falconer K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. – Chichester: John Wiley & Sons, 2003. – 288 p.
11. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
12. Miller K., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – New York: John Wiley & Sons, 1993. – 366 p.
13. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition. – Heidelberg: Springer, 2010. – 247 p.
14. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
15. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – М.; Ижевск: РХД, 2010. – 568 с.
16. Чуриков В.А. Локальный *d*-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.
17. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
18. Чуриков В.А. Эффективная длина гомогенных фракталов, вложенных в одномерное евклидово пространство, и норма на её основе // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: Матер. Республ. конф. с участием учёных из стран СНГ. – Ташкент, 21–23 ноября 2013. – Ташкент: Изд-во НУУ, 2013. – С. 203–205.
19. Чуриков В.А. Замечания о методе разделения потоков без обмена при описании физических процессов на фракталах // Математика и математическое моделирование: Сборник матер. VII Всеросс. молодежной научно-инновационной школы. – Саров, 16–19 апреля 2013. – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, 2013. – С. 54–55.
20. Чуриков В.А. Фрактальная производная и фрактальный неопределённый интеграл на гомогенных фракталах в дробном анализе на основе *d*-оператора // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: матер. Республ. конф. с участием учёных из стран СНГ. – Ташкент, 21–23 ноября 2013. – Ташкент: Изд-во НУУ, 2013. – С. 205–207.

Поступила 09.10.2013 г.

UDC 517

FACTORS OF PHYSICAL DIMENSION ADJUSTMENT AND SCALE FACTORS UNDER FRACTIONAL INTEGRATION AND FRACTIONAL DIFFERENTIATION ON FRACTAL

Viktor A. Churikov,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: vachurikov@list.ru

The urgency of the work is conditioned by a need to transform mathematical models defined in spaces of non-integral dimensions into spaces with integral dimension.
The purpose of the work *is to find out the transformations of sedate functions given on fractals under their fractional integration and fractional differentiation (fractional integrodifferentiation), in spaces of non-integral dimension with the following transformations of sedate functions into integral dimension spaces. Owing to changes in physical dimension and in fractal linear sizes under fractional integrodifferentiation the changes should be corrected for their further consideration in spaces with integer number of measurements.*
The methods of the study*: mathematical transformations based on local d-operator of fractional differentiation and fractional integration, acting in sedate function space.*
The results*: The paper introduces the factors of dimension adjustment to co-ordinate physical dimension in spaces with non-integral and integral dimensions. For co-ordination of changes in fractal linear sizes when turning into spaces with integer number of measurements it is necessary to enter the factors called the scale factors. The paper introduces the important quotient events of scale factor.*

Key words:
d-operator, efficient density of the fractal, associate fractal, rule of the conservation to dimensionality, scale factor of the fractal, efficient density of the fractal, associate fractal, rule of the conservation to dimensionality, scale factor of the fractal.

REFERENCES

1. Feder E. *Fraktaly* [Fractals]. New York, Springer, 1988. 310 p.
2. Falconer K.J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. New York, John Wiley, 2003. 337 p.
3. Mandelbrot B.B. *Fraktalnaya geometriya prirody* [Fractals Geometry of Nature]. New York, Freeman, 1982. 468 p.
4. Oldham K.B., Spanier J. *The fractional calculus*. New York; London, Academic Press, 1974. 234 p.
5. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Intergaly i proizvodnye drobnogo poryadka* [Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications]. New York, Gordon and Breach, 1993. 1006 p.
6. Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies*. V. 204. New York, Elsevier, 2006. 520 p.
7. Anastassiou G. *Fractional differentiation inequalities*. Dordrecht; Heidelberg; London; New York, Springer, 2009. 672 p.
8. Ross B. *Fractional Calculus and its Applications*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1975. 386 p.
9. Gorenflo R., Mainardi F. *Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractal and Fraction a Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures*, 1997, vol. 378. pp. 223–276.
10. Falconer K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Chichester, John Wiley & Sons, 2003. 288 p.
11. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculation and its application]. Moscow, Fizhmatlit, 2003. 271 p.
12. Miller K., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, John Wiley&Sons, 1993. 366 p.
13. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations. An application-oriented exposition*. Heidelberg, Springer, 2010. 247 p.
14. Uchaykin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [Fractional derivative method]. Ulyanovsk, Artishok, 2008. 512 p.
15. Tarasov V.E. Modeli teoreticheskoy fiziki s integro-differentsirovaniem drobnogo poryadka [Models of theoretical physics with integro-differentiation of fractional order]. Moscow, RHD, 2010. 568 p.
16. Churikov V.A. Lokalny *d*-operator differencirovaniya i inregrirovaniya konechnykh veshchestvennykh poryadkov dlya drobnogo analiza [Local *d*-operator of the differentiation and final material order for fractional analysis]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2011, vol. 318, no. 2, pp. 5–10.
17. Sedov L.I. Metody podobiya i razmernosti v mekhanike [Analog and dimensional methods in mechanics]. Moscow, Nauka, 1977. 440 p.
18. Churikov V.A. Effektivnaya dlina gomogennykh fraktalov vlozhennykh v odnomernoe evklidovo prostranstvo i norma na ee osnove [Efficient length of homogeneous fractals, embedded in univariate Euclid space and rate on its base]. *Sovremennie problemy differentsialnykh uravneniy i ikh prilozheniya: materialy respublikanskoy konferentsii s uchastiem uchenykh iz stran SNG* [Current problems of differential equations and their applications. Proc. Republic conference with participation of scientists from CIS countries]. Tashkent, 21–23 November 2013. Tashkent, NUU Publ., 2013. pp. 203–205.
19. Churikov V.A. Zamechaniya o metode razdeleniya potokov bez obmena pri opisanii fizicheskikh protsessov na fraktalakh [Remarks on flow division method without changing when describing physical processes on fractals]. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie: Sbornik materialov VII vserossiyskoy molodezhnoy nauchno-innovatsionnoy shkoly* [Mathematics and mathematical modeling. Proc. VII All-Russian youth research innovative school]. Sarov, SarFTI NIYaU MIFI, 2013, pp. 54–55.
20. Churikov V.A. Fraktalnaya proizvodnaya i fraktalny neopredelenny integral na gomogennykh fraktalakh v drobnom analize na osnove *d*-operatora [Fractal derivative and fractal vague integral on homogeneous fractals in fractional analysis based on *d*-operator]. *Sovremennye problemy differentsialnykh uravneniy i ikh prilozheniya: materialy respublikanskoy konferentsii s uchastiem uchenykh iz stran SNG* [Current problems of differential equations and their applications. Proc. Republic conference with participation of scientists from CIS countries]. Tashkent, 21–23 November 2013. Tashkent, NUU Publ., 2013, pp. 205–207.

УДК 621.52+511.52

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ОСНОВАННЫЙ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Аветисян Армине Геворговна,
д-р техн. наук, доцент кафедры информационных технологий
и автоматизации Государственного инженерного университета Армении
(Политехник), Армения, 0009, Ереван, Терян ул., 105.
E-mail: arm.avetisyan@seua.am

Гюльзадян Луиза Самвеловна,
аспирант кафедры информационных технологий и автоматизации
Государственного инженерного университета Армении (Политехник),
Армения, 0009, Ереван, Терян ул., 105. E-mail: lgyulzadyan@gmail.com

Актуальность работы обусловлена широким применением задач параметрического линейного программирования в науке, технике, экономике и отсутствием эффективных методов решения исследуемого класса задач.
***Цель исследования**: разработка эффективного алгоритма решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции, с параметрическими коэффициентами в правых частях ограничений, с параметрическими коэффициентами ограничений.*
***Методы исследования:** предложенный метод основан на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова и симплекс преобразованиях решения задач линейного программирования. Используются дифференциально-падеевские восстанавливающие соотношения.*
***Результаты:** приведено решение модельного примера с параметрическими коэффициентами целевой функции и ограничений, а также с параметрическими коэффициентами в правых частях ограничений нижеизложенным методом. Алгоритм практически может быть применен к различным типам задач параметрического программирования как с линейными зависимостями от параметра, так и с нелинейными.*

Ключевые слова:
Задачи математического программирования с параметрическими коэффициентами ограничений, дифференциальные преобразования, интервалы оптимальности и допустимости, условия оптимальности и допустимости, симплекс преобразования.

Несмотря на широкое применение задач параметрического программирования в науке и технике, методы их решения немногочисленны. Основной подход заключается в применении модифицированного симплекс метода и решении систем неравенств, что, *во-первых*, усложняет автоматизацию вычислительных процедур, *во-вторых*, позволяет решить лишь задачи с параметрическими коэффициентами в целевой функции и правых частях ограничений [1–4]. При параметрическом изменении коэффициентов ограничений, т. е. в тех случаях, когда любой из векторов текущего базиса имеет параметрическую составляющую, параметрическое исследование данным методом невозможно [1].

В работах [5, 6] на основе симплекс и дифференциальных преобразований рассмотрены методы решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции и правых частей ограничений, позволяющие организовать простые итерационные вычисления и исключающие решение систем неравенств. Обобщая подход, примененный в [5, 6], в данной работе на основе дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова [7–10] предложен эффективный метод решения параметрических задач математического программирования с параметрическими коэффициентами ограничений.

Рассмотрим следующую задачу параметрического программирования:

$$f(X) = c_1(t)\cdot x_1 + c_2(t)\cdot x_2 + \ldots + c_n(t)\cdot x_n \to \underset{x\in D}{extr}, \quad (1)$$

$$D:\begin{cases} A(t)\cdot X \le b(t) \\ x_1 \ge 0,\ldots, x_n \ge 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где $X=(x_1,\ldots x_n)^T$ – n-мерный вектор неизвестных переменных, который удовлетворяет ограничениям (2), образующих множество допустимых решений задачи; $b(t)=(b_1(t),b_2(t),\ldots,b_m(t))^T$ и $C(t)=(c_1(t),\ldots,c_n(t))^T$ – параметрические векторы свободных членов ограничений и коэффициентов целевой функции соответственно; $A(t)_{n\times m}=(a_{ij}(t))$, $i=1\ldots n$, $j=1\ldots m$ – $n\times m$-размерная матрица параметрических коэффициентов ограничений. Функциональная зависимость от параметра t может быть как линейной, так и нелинейной.

Используя симплекс-метод решения задач линейного программирования, выполним симплекс-преобразования на основе составленных таблиц [1, 3] согласно следующим выражениям:

$$a_{i_0 j}^{(q)}(t) = a_{i_0 j}^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \ \ j=\overline{1,n+m}, \quad (3)$$

$$a_{ij}^{(q)}(t) = a_{ij}^{(q-1)}(t) - (a_{i_0 j}^{(q-1)}(t)\cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t)) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t),$$
$$i \ne i_0, \ j=\overline{1,n+m}, \quad (4)$$

$$X_{bi_0}^{(q)}(t) = X_{bi_0}^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \quad (5)$$

$$X_{bi}^{(q)}(t) = X_{bi}^{(q-1)}(t) - X_{bi_0}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad (6)$$

$$\Delta_j^{(q)}(t) = \Delta_j^{(q-1)}(t) - \Delta_{j_0}^{(q-1)}(t) \cdot a_{i_0 j}^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (7)$$

где через i_0, j_0 и q обозначены ведущая строка, ведущий столбец и номер итерации соответственно.

В вышеуказанных выражениях по отношению к элементам с функциональными зависимостями применим прямые дифференциальные преобразования [7–10], например дифференциально-падеевские преобразования [7]:

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K x(t)}{dt^K} \right]_{t = t_0}, \quad K = \overline{0, \infty} \quad \div$$

$$\div \quad x(t) = \frac{a_0 + a_1 \cdot \tau + \ldots + a_m \cdot \tau_m}{1 + b_1 \cdot \tau + \ldots + b_n \cdot \tau_n} + \rho(\tau), \quad (8)$$

где $X(K)$ – изображение оригинала $x(t)$; H – масштабный коэффициент; t_υ – центр аппроксимации; $\tau = tH^{-1}$ – аргумент относительности и $\rho(\tau)$ остаточный член, который в частном случае может быть равным 0.

Учитывая некоторые выражения алгебры дифференциальных (Д-) преобразований, симплекс-преобразования (3)–(7) переведем в область дифференциальных изображений.

Для (3), (4) изображения вычисляются согласно (9)–(15):

$$a_{i_0 j}^{(q)}(K) = \left(a_{i_0 j}^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^{K} a_{i_0 j}^{(q)}(K-p) \cdot a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(p) \right) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(0), \quad j = \overline{1, n+m}, K = \overline{0, \infty}, \quad (9)$$

$$d_{ij}^{(q-1)}(t) = a_{i_0 j}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (10)$$

$$b_{ij}^{(q-1)}(t) = d_{ij}^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (11)$$

$$a_{ij}^{(q)}(t) = a_{ij}^{(q-1)}(t) - b_{ij}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Для выражений (10)–(12) имеем:

$$d_{ij}^{(q-1)}(K) = \sum_{p=0}^{K} a_{i_0 j}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(p), \quad (13)$$

$$b_{ij}^{(q-1)}(K) = \frac{d_{ij}^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^{K} b_{ij}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad (14)$$

$$a_{ij}^{(q)}(K) = a_{ij}^{(q-1)}(K) - b_{ij}^{(q-1)}(K), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (15)$$

Соответственно, (5), (6) в области изображений имеют следующий вид:

$$X_{bi_0}^{(q)}(K) = \frac{X_{bi_0}^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^{K} X_{bi}^{(q)}(K-p) \cdot a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad i = \overline{1, n}, K = \overline{0, \infty}, \quad (16)$$

$$f_i^{(q-1)}(t) = X_{bi_0}^{(q-1)}(t) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$f_i^{(q-1)}(K) = \sum_{p=0}^{K} X_{bi_0}^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{ij_0}^{(q-1)}(p), \quad i \neq i_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (18)$$

$$g_i^{(q-1)}(t) = f_i^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \quad (19)$$

$$g_i^{(q-1)}(K) = \frac{f_i^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^{K} g_i^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad (20)$$

$$X_{bi}^{(q)}(K) = X_{bi}^{(q-1)}(K) - g_i^{(q-1)}(K). \quad (21)$$

Для (7) дискреты вычисляются согласно (22)–(26):

$$p_j^{(q-1)}(t) = a_{i_0 j}^{(q-1)}(t) \cdot \Delta_{j_0}^{(q-1)}(t), \quad i \neq i_0, \quad j = \overline{1, n+m}, \quad (22)$$

$$p_j^{(q-1)}(K) = \sum_{p=0}^{K} a_{i_0 j}^{(q-1)}(K-p) \cdot \Delta_{j_0}^{(q-1)}(p), \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (23)$$

$$r_j^{(q-1)}(t) = p_j^{(q-1)}(t) / a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(t), \quad (24)$$

$$r_j^{(q-1)}(K) = \frac{p_j^{(q-1)}(K) - \sum_{p=1}^{K} r_j^{(q-1)}(K-p) \cdot a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(p)}{a_{i_0 j_0}^{(q-1)}(0)}, \quad (25)$$

$$\Delta_j^{(q)}(K) = \Delta_j^{(q-1)}(K) - r_j^{(q-1)}(K). \quad (26)$$

Если среди нулевых дискрет вектора симплекс разностей есть отрицательные значения, то согласно условию оптимальности симплекс-метода выполняется следующая итерация и базисной становится переменная, соответствующая наибольшей по абсолютной величине нулевой дискреты вектора $\Delta(t)$. Если вектор $\Delta(0)$ не содержит отрицательных элементов, то в точке $t = t_\upsilon$ оптимальное решение найдено. Далее на основе вычисленных дискрет восстанавливаются оригиналы для центра аппроксимации t_υ по обратному дифференциально-падеевскому (ДП)-преобразованию (8). Согласно условиям оптимальности и допустимости определяется интервал значений параметра t, для которых полученное при $t = t_\upsilon$ решение остается оптимальным и допустимым. Положим, что эти значения заключены в интервале $(0, t_1)$. Это означает, что при t, превышающих t_1, решение будет неоптимальным и недопустимым. Следовательно, для

$t=t_1$ необходимо найти новое решение, которое будет оптимальным и допустимым в интервале (t_1,t_2). Вышеуказанный процесс повторяется до нахождения значения t, для которого решения не существует или предыдущее решение не изменяется.

Интервалы допустимости и оптимальности определяются решением следующих задач математического программирования:

$$\bar{t}'' \to \max \qquad \underline{t}'' \to \min$$

$$-\Lambda_j(\bar{t}'') \le 0,\ j=1...n \ \text{ и } \ \Lambda_j(\underline{t}'') \ge 0,\ j=1...n,$$

$$\bar{t}' \to \max \qquad \underline{t}' \to \min$$

$$-\beta_j(\bar{t}') \le 0,\ j=1,...,m \ \text{ и } \ \beta_j(\underline{t}') \ge 0,\ j=1,...,m,$$

где $\Lambda_j(t)$, $j=1,...,n$ и $\beta_j(t)$, $j=1,...,m$ – параметрические элементы вектора симплекс-разностей $\Delta(t)$, соответствующие небазисным переменным, и параметрические элементы вектора базисных переменных $X_b(t)$ соответственно. $\bar{t}'(\bar{t}'')$ – верхняя граница интервала оптимальности (допустимости), т. е. наибольшее значение параметра t, при превышении которого по крайней мере одно из условий оптимальности (допустимости) нарушается; $\underline{t}'(\underline{t}'')$ – нижняя граница интервала оптимальности (допустимости), т. е. наименьшее значение параметра t, при котором решение оптимально (допустимо):

1) если $\bar{t}'<\bar{t}''$, то первым нарушается условие оптимальности и в качестве новой точки аппроксимации выбирается $\bar{t}=\bar{t}'$;
2) если $\bar{t}''<\bar{t}'$, то первым нарушается условие допустимости, следовательно, новый центр аппроксимации $\bar{t}=\bar{t}''$.

Двойственная задача исходной задачи (1), (2) имеет следующий вид:

$$\varphi(Y)=b_1(t)y_1+b_2(t)y_2+...+b_m(t)y_m \to \min_{x\in D}, \quad (27)$$

$$D:\{-A^T(t)y \le -C(t). \quad (28)$$

Используя теоремы двойственности [1–4], из результатов решения прямой задачи (1), (2) можно получить решение двойственной задачи (27), (28): значения двойственных переменных $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ и целевой функции $f^*(X)=\varphi^*(Y)$.

Рассмотрим следующую задачу параметрического математического программирования [1]

$$z=(3-6t)x_1+(2-2t)x_2+(5+5t)x_3 \to \max_{x_1,x_2,x_3},$$

$$\begin{cases}(1+t)x_1+2x_2+x_3 \le (40-t)\\ (3-2t)x_1+2x_3 \le (60+2t)\\ (1+3t)x_1+4x_2 \le (30-7t)\\ x_1,x_2,x_3 \ge 0.\end{cases}$$

Задача в области Д-преобразований при $t=t_\upsilon=t_0=0$ и $K=2$ имеет следующий вид:

$$A^0(0)=\begin{vmatrix}1&2&1&1&0&0\\3&0&2&0&1&0\\1&4&0&0&0&1\end{vmatrix},$$

$$A^0(1)=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\-2&0&0&0&0&0\\3&0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$A^0(2)=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$X_B^0(0)=(x_4,\ x_5,\ x_6)=(40,\ 60,\ 30),$$

$$X_B^0(1)=(-1,\ 2,\ -7),\ \ X_B^0(2)=(0,0,0),$$

$$\Delta^0(0)=(-3,\ -2,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$\Delta^0(1)=(6,\ 2,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$\Delta^0(2)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Выбрав в качестве ведущей строки $i_0=2$ и ведущего столбца $j_0=3$, вычислим $A^1(K)$ дискреты согласно выражениям (9), (13)–(15):

$$A^1(0)=\begin{vmatrix}-0,5&2&0&1&-0,5&0\\1,5&0&1&0&0,5&0\\1&4&0&0&0&1\end{vmatrix},$$

$$A^1(1)=\begin{vmatrix}2&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\3&0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$A^1(2)=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Далее по (16)–(21) определяются дискреты базисных переменных:

$$X_B^1(0)=(x_4,\ x_3,\ x_6)=(10,\ 30,\ 30),$$

$$X_B^1(1)=(-2,\ 1,\ -7),\ \ X_B^1(2)=(0,\ 0,\ 0).$$

Наконец, согласно выражениям (22)–(26) определяются дискреты вектора симплекс-разностей:

$$\Delta^1(0)=(4,5,\ -2,\ 0,\ 0,\ 2,5,\ 0),$$

$$\Delta^1(1)=(8,5,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,5,\ 0),$$

$$\Delta^1(2)=(-5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Выбрав в качестве ведущей строки $i_0=1$ и ведущего столбца $j_0=2$, определим дискреты $A^2(K)$:

$$A^2(0)=\begin{vmatrix}-0,25&1&0&0,5&-0,25&0\\1,5&0&1&0&0,5&0\\2&0&0&-2&1&1\end{vmatrix},$$

$$A^2(1)=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$A^2(2)=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Далее, по (17)–(22) и (23)–(27) определяются дискреты базисных переменных и симплекс-разностей:

$$X_B^2(0) = (x_2,\ x_3,\ x_6) = (5,\ 30,\ 10),$$
$$X_B^2(1) = (-1,\ 1,\ -3),\ \ X_B^2(2) = (0,\ 0,\ 0),$$
$$\Delta^2(0) = (4,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0),$$
$$\Delta^2(1) = (11,\ 0,\ 0,\ -1,\ 3,\ 0),$$
$$\Delta^2(2) = (-7,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

По вычисленным дискретам восстанавливаются оригиналы, согласно обратному ДП-преобразованию (8) при центре аппроксимации t_υ=0 и масштабном коэффициенте H=1:

$$A(t) = \begin{vmatrix} -0,25+t & 1 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 \\ 1,5-t & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 2-t & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$
$$X_B(t) = (x_2, x_3, x_6) = (5-t, 30+t, 10-3t),$$
$$\Delta(t) = (-7t^2+11t+4,\ \ 0,\ \ 0,\ 1-t,\ 3t+2,\ \ 0),$$
$$f(X) = 160+3t.$$

Решение двойственной задачи:

$$\varphi(Y) = 160+3t,\ \ Y(t) = (y_1, y_2, y_3) = (1-t,\ 3t+2,\ 0).$$

Поскольку в точке t_υ=0 нулевые дискреты вектора симплекс-разностей не содержат отрицательных элементов, то оприпальное решение найдено и необходимо определить множество значений параметра t, при котором полученное решение остается оптимальным и допустимым. Верхние границы оптимальности и допустимости определяются решением следующих задач математического программирования:

$$\bar{t}' \to \max_t \qquad\qquad \bar{t}'' \to \max_t$$

$$\begin{cases} 7t^2-11t-4 \le 0 \\ t-1 \le 0 \\ -3t-2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow t' = 1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} t-5 \le 0 \\ -t-30 \le 0 \Rightarrow t'' = 10/3 \\ 3t-10 \le 0, \end{cases}$$

$$0 \le t \le 1.$$

Для следующего оптимального плана примем t_1=1 и выполним соответствующие итерации согласно вышеизложенным выражениям:

$$A^0(0) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$A^0(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$A^0(2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$X_B^0(0) = (x_4,\ x_5,\ x_6) = (39,\ 62,\ 23),$$
$$X_B^0(1) = (-1,\ 2,\ -7),\ \ X_B^0(2) = (0,\ 0,\ 0),$$
$$\Delta^0(0) = (3,\ 0,\ -10,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$\Delta^0(1) = (6,\ 2,\ -5,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$\Delta^0(2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$i_0 = 2,\ \ j_0 = 3,$$
$$A^1(0) = \begin{vmatrix} 1,5 & 2 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$A^1(1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$A^1(2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
$$X_B^1(0) = (x_4,\ x_3,\ x_6) = (8,\ 31,\ 23),$$
$$X_B^1(1) = (-2,\ 1,\ -7),\ \ X_B^1(2) = (-2,\ 1,\ -7),$$
$$\Delta^1(0) = (8,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 0),$$
$$\Delta^1(1) = (-1,5,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,5,\ 0),$$
$$\Delta^1(2) = (-5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Оригиналы:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 1,5+2(t-1) & 2 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0,5-(t-1) & 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 4+3(t-1) & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$
$$X_B(t) = (8-2(t-1),\ 31+(t-1),\ 23-7(t-1)),$$
$$\Delta_B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{8-28,166666(t-1)}{1-3,333333(t-1)}, \\ 2(t-1), 0, 0, 5+2,5(t-1), 0 \end{pmatrix}.$$

Интервалы оприпальности и допустимости определяются решением следующих задач математического программирования:

$$\bar{t}' \to \max_t \qquad\qquad \bar{t}'' \to \max_t$$

$$\begin{cases} 5t^2-8,5t-4,5 \le 0 \\ 1-t \le 0 \\ -1-t \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t-10 \le 0 \\ -t-30 \le 0 \\ 7t-30 \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t' \to 2,1238 \quad \text{и} \Rightarrow t'' = 30/7,$$

$$1 \le t \le 2,1238.$$

Для 3-го интервала имеем:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{4}{-1+4t} & 0 & \dfrac{2}{-1+4t} & \dfrac{-1}{-1+4t} & 0 \\ 0 & \dfrac{-6+4t}{-1+4t} & 1 & \dfrac{-3+2t}{-1+4t} & \dfrac{1+t}{-1+4t} & 0 \\ 0 & \dfrac{-8+4t}{-1+4t} & 0 & \dfrac{-2+6t}{-1+4t} & \dfrac{1+3t}{-1+4t} & 1 \end{vmatrix},$$

$$X_B(t) = (x_1, x_3, x_6) =$$
$$= \left(\frac{20-4t}{-1+4t}, \frac{-60+145t}{-1+4t}, \frac{-16t^2+71t-50}{-1+4t} \right),$$
$$\Delta_B(t) = \begin{pmatrix} 0, & \frac{28t^2-44t-16}{-1+4t}, & \\ 0, & \frac{10t^2-17t-9}{-1+4t}, & \frac{-5t^2+11t+7}{-1+4t}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{t}' \to \max_t \qquad \bar{t}'' \to \max_t$$
$$\begin{cases} -28t^2+44t+16 \le 0 \\ -10t^2+17t+9 \le 0 \\ 5t^2-11t-7 \le 0 \\ 1-4t \end{cases} \qquad \begin{cases} -20+4t \le 0 \\ -145t+60 \le 0 \\ 16t^2-71t+50 \le 0 \\ 1-4t \le 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow t \to \infty \quad \text{и} \quad \Rightarrow t'' = 3{,}559,$$
$$2{,}1238 \le t \le 3{,}5596.$$

Решение для $t \ge 3{,}5596$ интервала приведено ниже:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4-2t}{1+3t} & 0 & 1 & -0{,}5 & \frac{0{,}5-2t}{1+3t} \\ 0 & \frac{6-4t}{1+3t} & 1 & 0 & 0{,}5 & \frac{-1{,}5+t}{1+3t} \\ 1 & \frac{4}{1+3t} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+3t} \end{vmatrix},$$
$$\Delta_B(t) = \begin{pmatrix} 0, & \frac{26t^2-38t+16}{1+3t}, & 0, & \\ 0, & \frac{5t^2-8{,}5t-4{,}5}{1+3t}, & 2{,}5t+2{,}5 \end{pmatrix},$$
$$X_B(t) = (x_4, x_3, x_1) =$$
$$= \left(\frac{8t^2-35{,}5t+25}{1+3t}, \frac{-4t^2+131{,}5t+15}{1+3t}, \frac{30-7t}{1+3t} \right),$$

$$\bar{t}' \to \max_t \qquad \bar{t}'' \to \max_t$$
$$\begin{cases} -8t^2+35{,}5t-25 \le 0 \\ 4t^2-131{,}5t+15 \le 0 \\ 7t-30 \le 0 \\ -1-3t \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -26t^2+38t-16 \le 0 \\ -5t^2+8{,}5t+4{,}5 \le 0 \\ -2{,}5t-2{,}5 \le 0 \\ -1-3t \le 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow t' = 30/7 = 4{,}2857 \quad \text{и} \quad \Rightarrow t' \to \infty,$$
$$3{,}5596 \le t \le 4{,}2857.$$

Наконец, для $t_4 > 4{,}2857$ имеем:

$$A(t) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4-2t}{1+3t} & 0 & 1 & -0{,}5 & \frac{0{,}5-2t}{1+3t} \\ 0 & \frac{6-4t}{1+3t} & 1 & 0 & 0{,}5 & \frac{-1{,}5+t}{1+3t} \\ 1 & \frac{4}{1+3t} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+3t} \end{vmatrix},$$
$$X_B(t) = (x_4, x_3, x_1) =$$
$$= \left(\frac{8t^2-35{,}5t+25}{1+3t}, \frac{-4t^2+131{,}5t+15}{1+3t}, \frac{30-7t}{1+3t} \right),$$
$$\Delta_B(t) = \begin{pmatrix} 0, & \frac{26t^2-38t+16}{1+3t}, & 0, & \\ 0, & \frac{5t^2-8{,}5t-4{,}5}{1+3t}, & 2{,}5t+2{,}5 \end{pmatrix},$$
$$\frac{30-7t}{1+3t} \le 0,$$

следовательно в интервале $4{,}2857 \le t \le \infty$ задача не имеет решения. Окончательное решение приведено в таблице.

Выводы

Изложен эффективный алгоритм решения задач линейного параметрического программирования с параметрическими коэффициентами ограничений, основанный на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова. Отметим также, что предложенный алгоритм практически может быть применен к различным типам задач параметрического программирования как с линейными зависимостями от параметра, так и с нелинейными.

Таблица. *Решение прямой задачи*

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$z(t)$
$0<t<1$	0	$5-t$	$30+t$	$7t^2+143t+160$
$1<t<2{,}1238$	0	0	$30+t$	$5t^2+155t+150$
$2{,}1238<t<3{,}5596$	$\frac{20-4t}{-1+4t}$	0	$\frac{-60+145t}{-1+4t}$	$\frac{749t^2+293t-240}{-1+4t}$
$3{,}5596<t<4{,}2857$	$\frac{30-7t}{1+3t}$	0	$\frac{-4t^2+131{,}5t+15}{1+3t}$	$\frac{-20t^3+679{,}5t^2+381{,}5t+15}{1+3t}$
$t>4{,}2857$	Задача не имеет решений			

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 2005. – 912 с.
2. Dantzig G.B. Linear Programming: Theory and Extensions. – New York: Springer, 2003. – 448 p.
3. Sinha S.M. Mathematical Programming: Theory and Methods. – Elsevier Science, 2006. – 572 p.
4. Гасс С. Линейное Программирование. – М.: Физматгиз, 1961. – 305 с.
5. Гюльзадян Л. Метод решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции, основанный на дифференциальных преобразованиях (на армянском) // Моделирование, оптимизация, управление: Сб. научных трудов ГИУА. – Ереван, 2012. – Вып. 1. – С. 341–347.
6. Гюльзадян Л. К методу решения задач линейного программирования с параметрическими коэффициентами целевой функции и свободных членов ограничений, основанному на дифференциальных преобразованиях // Вестник ГИУА. – 2011. – Вып. 14. – Т. 2. – С. 130–137.
7. Пухов Г. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова Думка, 1980. – 419 с.
8. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова Думка, 1986. – 158 с.
9. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова Думка, 1990. –230 с.
10. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Чартарагет, 2010. – 361 с.

Поступила 09.09.2013 г.

UDC 621.52+511.52

METHOD FOR SOLVING PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMS

Armine G. Avetisyan,
Dr. Sc., State Engineering University of Armenia (Polytechnic), Republic of Armenia, 0009, Yerevan, Teryan Str., 105. E-mail: arm.avetisyan@seua.am

Luiza S. Gyulzadyan,
State Engineering University of Armenia (Polytechnic), Republic of Armenia, 0009, Yerevan, Teryan Str., 105. E-mail: lgyulzadyan@gmail.com

The relevance of the work is caused by the extensive use of parametric linear programming problems in science, engineering, economics and the lack of effective methods to solve the researched class of problems.
The main aim of the study *is to develop an efficient algorithm for solving linear programming problems with parametric changes in coefficients of goal function and constraints, right-hand sides of constraints as well.*
The methods used in the study: *the proposed method is based on G.E. Pukhov's differential transforms and simplex transformations for linear programming. Reverse transforms are performed by differential Pade restoring relations.*
The results*: The paper introduces the solution of modeling example with parametric changes in coefficients of goal function and constraints, right-hand sides of constraints by below described method. The algorithm can be practically applied to various types of parametric programming problems both with linear and non-linear dependence on the parameters.*

Key words:
Parametric mathematical programming problems with parametric coefficients of constraints, differential transformations, optimality and feasibility conditions, optimality and feasibility intervals, simplex transformations.

REFERENCES

1. Takha H. *Vvedenie v issledovanie operatsiy* [Introduction into operations research]. Moscow, Mir, 2005. 912 p.
2. Dantzig G.B. *Linear Programming: Theory and Extension.* New York, Springer, 2003. 448 p.
3. Sinha S.M. *Mathematical Programming: Theory and Methods.* Elsevier Science, 2006. 572 p.
4. Gass S. *Lineynoe Programmirovanie* [Linear Programming]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 305 p.
5. Gyulzadyan L. Metod resheniya zadach lineynogo programmirovaniya s parametricheskimi koeffitsientami tselevoy funktsii, osnovannyy na differentsialnykh preobrazovaniyakh [A method for solving parametric linear programming problems (in Armenian)]. *Modelirovanie, optimizatsiya, upravlenie: sb. nauchnykh trudov GIUA* [Proc. Modeling, optimization, controlling]. Erevan, 2012, no. 1, pp. 341–347.
6. Gyulzadyan L. K metodu resheniya zadach lineynogo programmirovaniya s parametricheskimi koeffitsientami tselevoy funktsii i svobodnykh chlenov ogranicheniy, osnovannomu na differentsialnykh preobrazovaniakh. [A method for solving mathematical programming problems with parametric changes in the goal function based on differential transforms]. *Vestnik GIUA*, 2011, vol. 2, no. 14, pp. 130–137.
7. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya funktsiy i uravneniy* [Differential transforms of functions and equations]. Kiev, Naukova Dumka, 1980. 419 p.
8. Pukhov G.E. *Differentsialnye preobrazovaniya i matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov* [Differential transforms and mathematical modeling of physical processes]. Kiev, Naukova Dumka, 1986. 158 p.
9. Pukhov G.E. *Differentsialnye spektry i modeli* [Differential spectra and models]. Kiev, Naukova Dumka, 1990. 230 p.
10. Simonyan S.O., Avetisyan A.G. *Prikladnaya teoriya differentsialnykh preobrazovaniy* [Applied theory of differential transforms]. Erevan, Chartaraget, 2010. 361 p.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ. СЛУЧАЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ НА ГРАНИЦЕ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии
Ошского государственного университета, Республика Кыргызстан, 714000,
г. Ош, ул. Ленина, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

При математическом моделировании процессов конвективно-диффузионного переноса, химической кинетики и др. возникают краевые задачи для уравнений эллиптического типа второго порядка с малым параметром при старших производных. Явное решение этих задач построить в общем случае не удается, поэтому используют разные асимптотические методы. Основополагающими в этом направлении являются работы А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, С.А. Ломова, В.Б. Бутузова, Л.И. Люстерника, М.И. Вишика, А.М. Ильина. В случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое решение, эти задачи, по терминологии А.М. Ильина, называют бисингулярными. Ранее для построения асимптотики бисингулярно возмущенных задач применялся метод сращивания, а метод пограничных функций не использовался напрямую. В работе предложена модификация метода пограничных функций, благодаря которой стало возможным построить асимптотику решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для бисингулярно возмущенных задач. Применяя обобщенный метод пограничных функций, построено асимптотическое разложение решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения в случае, когда предельное уравнение имеет особенность на граничных точках области. Задача рассматривается в круге.

Ключевые слова:
Асимптотика, бисингулярное возмущение, эллиптическое уравнение, особая точка, задача Дирихле, малый параметр, уравнение Эйри, функции Эйри.

Введение

Как нам известно, многие задачи физики, техники и других наук приводятся к сингулярно возмущенным уравнениям эллиптического типа. Сингулярно возмущенные уравнения эллиптического типа рассматривались многими авторами, например в работах [1–10] и в цитируемых ими работах. Впервые В. Вазов в работе [1] изучил асимптотику решения первой краевой задачи для простейшего эллиптического уравнения внутри области. Левинсон [2] в двумерном случае исследовал асимптотику решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром ε, вырождающейся при $\varepsilon=0$ в задачу Коши для уравнения первого порядка с регулярным полем характеристик. Им был построен для этой цели пограничный слой вблизи соответствующей части границы. Предельный переход в этой задаче с любым полем характеристик проведен в работе С. Л. Каменомостской [8]. А.М. Ильин в работе [10] рассматривал различные задачи, в том числе бисингулярно возмущенные эллиптические уравнения. А.М. Ильин, применяя метод сращивания асимптотических разложений, построил формальные асимптотические разложения (ФАР) решений и привел их строгие обоснования. В данной работе для построения полного асимптотического разложения мы используем аналог метода погранфункций [11–13] (обобщение метода погранфункций). Обобщенный метод пограничных функций ранее применялся для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с точками поворота. В работе [11] обобщенным методом пограничных функций построена асимптотика решения уравнения Лайтхилла первого порядка. В работе [12] построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с одной точкой поворота в действительной оси. В работе [13] построено равномерное асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя точками поворота в действительной оси.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения

$$\varepsilon\Delta u(x,y)-q(x)u(x,y)=f(x,y),(x,y)\in D=\{(x,y)|\ x^2+y^2<1\}, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma}=0,\ \Gamma=\{(x,y)|\ x^2+y^2=1\}, \quad (2)$$

где $f(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$ – заданная функция.

I. Рассмотрим случай, когда $q(x)=(1-x)$. В этом случае уравнение имеет простую точку поворота в точке (1,0). Для начала рассмотрим структуру внешнего разложения решения задачи (1), (2), которое будем искать в виде:

$$V=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{v}_k(x,y),\quad \varepsilon\to 0, \quad (3)$$

после подстановки (3) в (1) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получим рекуррентную систему уравнений:

$$-(1-x)\tilde{v}_0(x,y)=f(x,y),$$

$$(1-x)\tilde{v}_k(x,y)=\Delta\tilde{v}_{k-1}(x,y),\ k\in\mathbf{N}.$$

Отсюда определяются все $\tilde{v}_k(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D}\backslash(1,y))$:

$$\tilde{v}_0(x,y)=-f(x,y)/(1-x),$$

$$\tilde{v}_0(x,y)=\Delta\tilde{v}_{k-1}(x,y)/(1-x),\ k\in\mathbf{N},\ \text{т. е.}$$

$$V=-\frac{f(x,y)}{(1-x)}+\frac{\varepsilon}{(1-x)^4}F_1(x,y)+$$

$$+...+\frac{\varepsilon^n}{(1-x)^{3n+1}}F_n(x,y)+...,\quad \varepsilon\to 0,$$

где $F_k(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k\in\mathbf{N}$.

В граничной точке (1,0) все эти функции $\tilde{v}_k(x,y)$ имеют нарастающие особенности:

$$\tilde{v}_k(x,y)=\frac{F_k(x,y)}{(1-x)^{3k+1}}.$$

Построение ФАР решения. Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$u(x,y)=v_0(x,y)+\pi_0(\eta,\phi)+w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^{-2}+$$
$$+w_{-1}(\tau,\xi)/\mu^{-1}+w_0(\tau,\xi)+R(x,y), \qquad (4)$$

где $\eta=(1-r)/\lambda$, $\tau=(1-x)/\mu^2$, $\xi=y/\mu$, $\varepsilon=\lambda^2$, $\varepsilon=\mu^6$, $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$.

Подставляя (4) в (1) получим:

$$\varepsilon\Delta v_0-(1-x)v_0+\mu^2\Delta_{\tau\xi}(w_{-2}+\mu w_{-1}+\mu^2 w_0)-\tau(w_{-2}+\mu w_{-1}+\mu^2 w_0)+$$
$$+\varepsilon\Delta_{\eta\phi}\pi_0-(1-\cos(\phi)+\lambda\eta\cos(\phi))\pi_0+\varepsilon\Delta R-(1-x)R=$$
$$=f(x,y)-H(y)+H(\xi\mu), \qquad (5)$$

где

$$\Delta_{\tau\xi}=\frac{1}{\mu^4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\mu^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right),$$

$$\Delta_{\eta\phi}=\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\frac{\lambda}{(1-\lambda\eta)}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\lambda^2}{(1-\lambda\eta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right).$$

Здесь мы ввели новую неизвестную функцию $H(y)$, которую определяем ниже.

Из равенства (5) имеем:

$$-(1-x)v_0=f(x,y)-H(y),$$

Отсюда

$$v_0(x\,y)=-(f(x,y)-H(y))/(1-x),$$

и здесь мы определим функцию $H(y)$ так, чтобы $v_0(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$. Пусть $H(y)=f(1,y)$, тогда

$$v_0(x,y)=-\sum_{j=1}^{\infty}f_j(y)(1-x)^{j-1}.$$

Из равенства (5) для π_0 получим задачу:

$$\frac{\partial^2\pi_0}{\partial\eta^2}-(1-\cos\phi)\pi_0=0,$$

$$\pi_0(0,\phi)=-v_0(1,\phi),\lim_{\eta\to\infty}\pi_0(\eta,\phi)=0.$$

Отсюда

$$\pi_0(\eta,\phi)=-e^{-\sqrt{1-\cos\phi}\,\eta}v_0(1,\phi).$$

Для функций $w_{-2}(\tau,\xi)$, $w_{-1}(\tau,\xi)$, $w_0(\tau,\xi)$ составим следующие задачи:

$$\frac{\partial^2 w_{-2}}{\partial\tau^2}-\tau w_{-2}=H_0,\ \lim_{\tau\to\infty}w_{-2}(\tau,\xi)=0,$$
$$w_{-2}(0,0)=0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w_{-1}}{\partial\tau^2}-\tau w_{-1}=\xi H_1,\ \lim_{\tau\to\infty}w_{-1}(\tau,\xi)=0,$$
$$w_{-1}(0,0)=0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}-\tau w_0=\xi^2 H_0,\ \lim_{\tau\to\infty}w_{-2}(\tau,\xi)=0,$$
$$w_0(0,0)=-v_0(0,0), \qquad (8)$$

где $H_k=\frac{1}{k!}H^{(k)}(0)$, $k=0,1,2$.

Задачи (6)–(8) имеют следующие решения:

$$w_{-2}(\tau,\xi)=-\pi H_0\begin{bmatrix}Ai(\tau)\int_0^\tau Bi(s)ds+\\+Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)ds-\\-\sqrt{3}Ai(\tau)\int_0^\infty Ai(s)ds\end{bmatrix},$$

$$w_{-1}(\tau,\xi)=-\pi H_1\xi\begin{bmatrix}Ai(\tau)\int_0^\tau Bi(s)ds+\\+Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)ds-\\-\sqrt{3}Ai(\tau)\int_0^\infty Ai(s)ds\end{bmatrix},$$

$$w_0(\tau,\xi)=-\pi H_2\xi^2\begin{bmatrix}Ai(\tau)\int_0^\tau Bi(s)ds+\\+Bi(\tau)\int_\tau^\infty Ai(s)ds-\\-\sqrt{3}Ai(\tau)\int_0^\infty Aivds\end{bmatrix}-$$
$$-v_0(0,0)\frac{Ai(\tau)}{Ai(0)}.$$

Асимптотику решений задачи (6)–(8) при $\tau\to\infty$ ищем в виде

$$w_k(\tau,\xi)=a_0(\xi)+\frac{a_1(\xi)}{\tau}+...+\frac{a_n(\xi)}{\tau^n}+... \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (6), имеем:

$$w_k(\tau,\xi)=a_0(\xi)+\frac{a_1(\xi)}{\tau}+...+\frac{a_n(\xi)}{\tau^n}+...$$

Отсюда

$a_0(\xi)\equiv 0$, $a_1(\xi)=-H_0$, $a_2(\xi)\equiv 0$, $a_3(\xi)\equiv 0$, $a_4(\xi)=2a_1(\xi),\ldots$.

Следовательно,

$$w_{-2}(\tau,\xi)=-\frac{H_0}{\tau}\left(a_1+\frac{1}{\tau^3}a_4...+\frac{1}{\tau^{3m}}a_{3m+1}+...\right).$$

Аналогично получим:

$$w_{-1}(\tau,\xi)=-\frac{H_1\xi}{\tau}\left(a_1+\frac{1}{\tau^3}a_4...+\frac{1}{\tau^{3m}}a_{3m+1}+...\right),$$

$$w_0(\tau,\xi)=-\frac{H_2\xi^2}{\tau}\left(a_1+\frac{1}{\tau^3}a_4...+\frac{1}{\tau^{3m}}a_{3m+1}+...\right).$$

Оценка остаточного члена $R(x,y)$. Для $R(x,y)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon\Delta R-(1-x)R=O(\mu^3),\ R_\Gamma=0.$$

Применяя принцип максимума [14], имеем:

$$|R|\le c\mu \text{ в области } \bar{D}.$$

Нами доказана следующая теорема

Теорема 1. Пусть $f(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $f(1,0)\neq 0$, тогда для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,y)=v_0(x,y)+\pi_0(\eta,\phi)+w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^{-2}+$$
$$+w_{-1}(\tau,\xi)/\mu^{-1}+w_0(\tau,\xi)+O(\mu),$$

где $\eta=(1-r)/\lambda$, $\tau=(1-x)/\mu^2$, $\xi=y/\mu$, $\varepsilon=\lambda^2$, $\varepsilon=\mu^6$, $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$.

II. Пусть $q(x)=(1-x^2)$. В этом случае предельное уравнение имеет особенность в двух граничных точках (−1,0) и (1,0).

Структура внешнего разложения примет вид:

$$V=-\frac{f(x,y)}{(1-x^2)}+\frac{\varepsilon}{(1-x^2)^4}F_1(x,y)+$$
$$+\ldots+\frac{\varepsilon^n}{(1-x^2)^{3n+1}}F_n(x,y)+\ldots,\quad \varepsilon\to 0,$$

где $F_k(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$, $k\in\mathbf{N}$.

Построение ФАР решения. Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$u(x,y)=v_0(x,y)+\pi_0(\eta,\phi)+g_{-2}(\gamma,\xi)/\mu^{-2}+$$
$$+g_{-1}(\gamma,\xi)/\mu^{-1}+g_0(\gamma,\xi)+w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^{-2}+$$
$$+w_{-1}(\tau,\xi)/\mu^{-1}+w_0(\tau,\xi)+R(x,y),\qquad (10)$$

где $\eta=(1-r)/\lambda$, $\gamma=(1+x)/\mu^2$, $\tau=(1-x)/\mu^2$, $\xi=y/\mu$, $\varepsilon=\lambda^2$, $\varepsilon=\mu^6$, $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$; $g(\gamma,\xi)$ – обобщенная погранфункция в окрестности точки (−1,0), а $w(\tau,\xi)$ – обобщенная погранфункция в окрестности точки (1,0).

Подставляя (10) в (1), получим:

$$\varepsilon\Delta v_0-(1-x^2)v_0+\mu^2\Delta_{\gamma\xi}(g_{-2}+\mu g_{-1}+\mu^2 g_0)-t_1(g_{-2}+\mu g_{-1}+\mu^2 g_0)+$$
$$+\mu^2\Delta_{\gamma\xi}(w_{-2}+\mu w_{-1}+\mu^2 w_0)-\tau(w_{-1}+\mu w_1+\mu^2 w_0)+$$
$$+\varepsilon\Delta_{\gamma\xi}\pi_0-(1-\cos^2(\phi)+2\lambda\eta\cos^2(\phi)-\lambda^2\eta^2\cos^2(\phi))\pi_0+$$
$$+\varepsilon\Delta R-(1-x^2)R=f(x,y)-H(x,y)+H(x,y).\qquad (11)$$

Как всегда мы здесь ввели новую функцию $H(x,y)$, которую определим ниже.

Из равенства (11) имеем:

$$-(1-x^2)v_0=f(x,y)-H(x,y).$$

Тем самым

$$v_0(x,y)=-(f(x,y)-H(x,y))/(1-x^2).$$

Определим неизвестную функцию $H(x,y)$ так, чтобы $v_0(x,y)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$. Пусть

$$H(y)=(f(1,y)(1+x)+f(-1,y)(1-x))/2,$$

тогда

$$v_0(x,y)=-(f(x,y)-(f(1,y)(1+x)+f(-1,y)(1-x))/2)/(1-x^2).$$

Из равенства (11) для π_0 получим задачу:

$$\frac{\partial^2\pi_0}{\partial\eta^2}-(1-\cos^2\phi)\pi_0=0,$$
$$\pi_0(0,\phi)=-v_0(1,\phi),\ \lim_{\eta\to\infty}\pi_0(\eta,\phi)=0,$$

решение которой имеет вид:

$$\pi_0(\eta,\phi)=-e^{-|\sin\phi|\eta}v_0(1,\phi).$$

Для функции $w_{-2}(\tau,\xi)$, $w_{-1}(\tau,\xi)$, $w_0(\tau,\xi)$, $g_{-2}(\gamma,\xi)$, $g_{-1}(\gamma,\xi)$, $g_0(\gamma,\xi)$) составляются аналогичные (6)–(8) задачи.

При $\tau\to\infty$, $\gamma\to\infty$, $\xi\to\infty$ имеем:

$$w_{-2}=O(\tau^{-1}),\ w_{-1}=O(\xi\tau^{-1}),\ w_0=O(\xi\tau^{-1}),$$
$$g_{-2}=O(\gamma^{-1}),\ g_{-1}=O(\xi\gamma^{-1}),\ g_0=O(\xi^2\gamma^{-1}).$$

Оценка остаточного члена $R(x,y)$. Для $R(x,y)$ получим следующую задачу:

$$\varepsilon\Delta R-(1-x^2)R=O(\mu^3),\ R_\Gamma=0.$$

Учитывая результат работы [13] и применяя принцип максимума [14], имеем:

$$|R|\le c\mu \text{ в области } \bar{D}.$$

Нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $q(x)=(1-x^2)$, $f(1,0)\neq 0$, $f(-1,0)\neq 0$, тогда для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$u(x,y)=v_0(x,y)+\pi_0(\eta,\phi)+g_{-2}(\gamma,\xi)/\mu^{-2}+g_{-1}(\gamma,\xi)/\mu^{-1}+$$
$$+g_0(\gamma,\xi)+w_{-2}(\tau,\xi)/\mu^{-2}+w_{-1}(\tau,\xi)/\mu^{-1}+w_0(\tau,\xi)+O(\mu),$$

где $\eta=(1-r)/\lambda$, $\gamma=(1+x)/\mu^2$, $\tau=(1-x)/\mu^2$, $\xi=y/\mu$, $\varepsilon=\lambda^2$, $\varepsilon=\mu^6$, $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$, $g(\gamma,\xi)$, $w(\tau,\xi)$ – обобщенные погранфункции, соответственно в окрестности точек (−1,0) и (1,0).

Заключение

Обобщением метода пограничных функций построены асимптотические разложения решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в круге. Рассмотрены два случая: 1) особенность появляется в одной граничной точке; 2) особенность появляется на двух граничных точках. Обобщенный метод пограничных функций можно применять при построении асимптотических разложений решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенных эллиптических уравнений. Причем асимптотическое разложение представляется в явном виде по дробным степеням малого параметра ε. Формальное асимптотическое разложение обосновано применением принципа максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wasow W. Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta U+\lambda\partial U/\partial x=\lambda f(x,y)$ // Duke Math. J. – 1944. – V. 11. – P. 405–415.
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+Au_x+Bu_y+Cu=D$ for small ε // Ann. of Math. – 1950. – V. 51. – P. 428–445.
3. Eckhaus W., De Jager E.M. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1966. – V. 23. – № 1. – P. 26–86.
4. Eckhaus W. Boundary Layers in Linear Elliptic Singular Perturbation Problems // SIAM Review. – 1972. – V. 14. – № 2. – P. 225–270.
5. De Jager E.M. Singular elliptic perturbations of vanishing first order differential operators // Lecture Notes in Math. – 1972. – № 280. – P. 73–86.
6. De Groen P.P.N. Turning points in second order elliptic singular perturbation problems // Lecture Notes in Math. – 1972. – № 280. – P. 273–278.
7. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem // SIAM J. Math. Anal. – 1987. – V. 18. – № 5. – P. 1467–1511.
8. Каменомостская С.Л. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных // Мат. сб. – 1952. – № 31 (73):3. – С. 703–708.
9. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН – 1957. – № 12:5 (77). – С. 3–122.
10. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 334 с.
11. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point // American J. Math. & Statistics. – 2013. – V. 3. – № 1. – P. 53–61.
12. Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф. Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Матем. Заметки. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 483–487.
13. Турсунов Д.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 1 (21). – С. 34–40.
14. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Поступила 12.07.2013 г.

UDC 517.955.8

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE BISINGULAR PERTURBED ELLIPTIC EQUATION. CASE OF A SINGULAR POINT ON THE BOUNDARY

Dilmurat A. Tursunov,
Cand. Sc., Osh State University, Kyrgyz Republic, 714000,
Osh, Lenin street, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

For mathematical modeling the convective-diffusive transport, chemical kinetics the boundary value problems occur for elliptic equations of the second order with a small parameter in the highest derivatives. The explicit solution of these problems can be constructed in a general case using different asymptotic methods. The fundamental work in this direction was done by A.N. Tikhonov, A.B. Vasilyeva, S.A. Lomov, V.B. Butuzov, L.I. Lyustemik, M.I. Vishik, A.M. Ilin. When the corresponding unperturbed equation has a smooth solution these problems are called bisingular in A.M. Ilin terminology. The method of matching was applied before to construct the asymptotic of bisingularly perturbed problems, but the method of boundary functions was not used directly. The author has proposed to modify the method of boundary functions that makes possible the construction of the asymptotic solutions of bisingularly perturbed elliptic equation. The aim of the study is to develop the asymptotic method of boundary functions for bisingularly perturbed equations. Applying the generalized method of boundary functions, the author constructed the asymptotic expansion of the solution for bisingularly perturbed elliptic equation in the case when the limit equation has a singularity at the boundary points of the region. The problem is considered in the circle.

Key words:
Asymptotics, bisingular perturbation, elliptic equation, singular point, Dirichlet problem, small parameter, Airy equation, Airy functions.

REFERENCES

1. Wasow W. Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation$\Delta U+\lambda\partial U/\partial x=\lambda f(x,y)$. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 405–415.
2. Levinson N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+Au_x+Bu_y+Cu=D$ for small ε. *Ann. of Math.*, 1950, vol. 51, pp. 428–445.
3. Eckhaus W., De Jager E.M. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1966, vol. 23, no. 1, pp. 26–86.
4. Eckhaus W. Boundary Layers in Linear Elliptic Singular Perturbation Problems. *SIAM Review*, 1972, vol. 14, no. 2, pp. 225–270.
5. De Jager E.M. Singular elliptic perturbations of vanishing first order differential operators. *Lecture Notes in Math.*, 1972, no. 280, pp. 73–86.
6. De Groen P.P.N. Turning points in second order elliptic singular perturbation problems. *Lecture Notes in Math.*, 1972, no. 280, pp. 273–278.
7. Shagi-di Shih, Kellogg R.B. Asymptotic analysis of a singular perturbation problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 1987, vol. 18, no. 5, pp. 1467–1511.

8. Kamenomostskaya S.L. Ob uravneniyakh ellipticheskogo i parabolicheskogo tipa s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh [On equations of elliptic and parabolic type with a small parameter in the highest derivatives]. *Mat. sb.*, 1952, no. 31 (73): 3, pp. 703–708.
9. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichny sloy dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy s malym parametrom [Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter]. *UMN* (*Successes of Mathematical Sciences*), 1957, no. 12:5 (77), pp. 3–122.
10. Ilin A.M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy kraevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1989. 334 p.
11. Alymkulov K. Analog of Method of Boundary Layer Function for the Solution of the Lighthill's Model Equation with the regular Singular Point. *American J. Math. & Statistics*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 53–61.
12. Alymkulov K., Asylbekov T.D., Dolbeeva S.F. Obobshchenie metoda pogranfunktsiy dlya resheniya kraevoy zadachi dlya bisingulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka [Generalization of the boundary functions for solving boundary value problem for Bisingular perturbed second order differential equation]. *Matem. Zametki* (*Mat. Notes*), 2013, vol. 94, no. 3, pp. 483–487.
13. Tursunov D.A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya singulyarno vozmushchennogo differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka s dvumya tochkami povorota [Asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed second order differential equation with two turning points]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* (*Bulletin of the Tomsk State University. Mathematics and mechanics*), 2013, no. 1 (21), pp. 34–40.
14. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic partial differential equations of second order]. Moscow, Nauka, 1989. 464 p.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ РАНГА *r* АФФИННОГО Q_m И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ

Аль-Хассани Мудхар Аббас,
преподаватель кафедры математики Университета Басры, Ирак;
аспирант кафедры высшей математики Физико-техническсго института ТПУ
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: mudhar73@mail.ru

Лучинин Анатолий Алексеевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

Актуальность работы вызвана необходимостью дополнительного изучения специального отображения $V^r_{m,n}$ ранга r<min (m, n) аффинного Q_m и проективного P_n пространств.

***Цель работы**. В предыдущих работах были рассмотрены отображения $V_{m,n}$, когда r<min (m, n) в случаях m=n, m<n, m>n. В данной работе рассматривается дифференцируемое отображение $V^r_{m,n}$ ранга r<min (m, n) аффинного пространства Q_m и проективного пространства P_n.*

***Методы исследования**. Основными методами исследования являются метод внешних форм Картана в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева. Эти методы предполагают локальное изучение рассматриваемого объекта и использование функций класса C^∞.*

***Результаты**. Рассмотрено регулярное отображение ранга r аффинного и проективного пространств. Дана геометрическая характеристика этого отображения. С отображением $V^r_{m,n}$ инвариантно ассоциируется отображение m-мерного пространства в многообразие невырожденных нуль-пар. Доказано (геометрически и методом Кэлера) существование данного отображения. Изучена аналитически и геометрически структура внутреннего фундаментального геометрического объекта.*

***Ключевые слова**:*
Дифференцируемые отображения, многомерные пространства и поверхности, геометрические объекты.

1. Аналитический аппарат

1.1. Как и в [1–3] рассматривается m-мерное аффинное пространство Q_m и n-мерное эквипроективное пространство P_n, отнесенные к подвижному аффинному реперу Q и подвижному эквипроективному реперу P с соответствующими деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$Q_m: \quad Q=\{\overline{B},\overline{\varepsilon}_a\},\ d\overline{B}=\Theta^a\overline{\varepsilon}_a,\ d\overline{\varepsilon}_a=\Theta^b_a\overline{\varepsilon}_b,$$
$$D\Theta^a=\Theta^b\Lambda\Theta^a_b,\ D\Theta^b_a=\Theta^c_a\Lambda\Theta^b_c,\ (a,b,c=\overline{1,m}); \quad (1)$$

$$P_n: P=\{\overline{A}_I\},\ d\overline{A}_I=\omega^J_I\overline{A}_J,\ D\omega^J_I=\omega^K_I\wedge\omega^J_K,$$
$$\omega^K_K=0,\ (I,J,K=\overline{0,n}). \quad (2)$$

Предполагается, что между пространствами существует дифференцируемое отображение

$$V_{m,n}: Q_m\to P_n. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1) и (2) запишутся в виде

$$\omega^i_0=A^i_a\Theta^a,\ (i,j,k=\overline{1,n}). \quad (4)$$

Двукратное продолжение [4] этой системы дифференциальных уравнений с учетом (1) и (2) приводят к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют компоненты внутреннего фундаментального геометрического объекта $\Gamma=\{A^i_a, A^i_{ab}\}$ в смысле [5, 6]:

$$dA^i_a + A^j_a\Omega^i_j - A^i_b\Theta^b_a = A^i_{ab}\Theta^b, \Omega^i_j = \omega^i_j - \delta^i_j\omega^0_0, A_{[ab]}0,$$

$$dA^i_{ab} + A^j_{ab}\Omega^i_j - A^i_{cb}\Theta^c_a - A^i_{ac}\Theta^c_b - (A^i_a A^j_b + A^j_b A^i_a)\omega^0_j =$$

$$= A^i_{abc}\Theta^c, A^i_{[abc]} = 0,$$

$$(a,b,c=\overline{1,m}; i,j,k=\overline{1,n}). \quad (5)$$

Заметим в соответствии с [2, (8)], что отображение (3) направление $\underline{u}=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)\ u^a\in Q_m$ переводит в направление $x=V_{m,n}u=(A_0, A_i)\ x^i$, где

$$x^i = A^i_a u^a. \quad (6)$$

1.2. В соответствии с [5, 6] система величин A^i_a удовлетворяет дифференциальным уравнениям (4) и (5) и образует фундаментальный геометрический объект $\{A^i_a\}$ первого порядка отображения (3). Эта система величин образует матрицу $[A^i_a]$ ($i=\overline{1,n}$; $a=\overline{1,m}$) размера $n\times m$. Ранг r этой матрицы в общем случае равен $r=\min(n,m)$.

Определение 1.1. Отображение $V^r_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ называется регулярным отображением, если ранг r матрицы $[A^i_a]$ равен $r<\min(n, m)$. Если $r<\min(n,m)$, то отображение называется отображением ранга r и обозначается $V^r_{m,n}$.

Заметим, что в статьях [1–3] изучались регулярные отображения $V_{m,n}$.

В данной статье изучаются отображения $V^r_{m,n}$.

Поскольку ранг r матрицы $[A^i_a]$ меньше $\min(n,m)$, то она имеет хотя бы один ненулевой (базисный) минор порядка r. Для определенности таким минором будем считать

$$\det[A^{i_1}_{a_1}] \neq 0,\ (i_1=\overline{1,r}; a_1=\overline{1,r}). \quad (7)$$

Тогда на основании теоремы о базисном миноре получаем, что в каждой точке $B\in Q_m$ имеют место соотношения:

$$A^{i_1}_{a_1} = h^{a_1}_{a_1}A^{i_1}_{a_1}, A^{\hat{i}_1}_{a_1} = h^{a_1}_{a_1}A^{\hat{i}_1}_{a_1}; A^{\hat{i}}_{a_1} = \overset{*}{h}{}^{\hat{i}_1}_{j_1}A^{j_1}_{a_1}, A^{\hat{i}_1}_{\hat{a}_1} = \overset{*}{h}{}^{\hat{i}_1}_{j_1}A^{j_1}_{\hat{a}_1},$$

$$(a_1,b_1,c_1=\overline{1,r}; \hat{a}_1,\hat{b}_1,\hat{c}_1=\overline{r+1,m};$$

$$i_1,j_1,k_1=\overline{1,r}; \hat{i}_1,\hat{j}_1,\hat{k}_1=\overline{r+1,n}). \quad (8)$$

1.3. В каждой точке $B\in Q_m$ проводится такая канонизация аффинного Q и проективного P реперов, при которой

$$A^{\hat{i}_1}_{a_1}=0, A^{i_1}_{\hat{a}_1}=0 \overset{(5),(6),(7)}{\Longrightarrow} A^{\hat{i}_1}_{\hat{a}_1}=0, h^{a_1}_{\hat{a}_1}=0, \overset{*}{h}{}^{\hat{j}_1}_{j_1}=0, A^{\hat{i}_1}_{b\hat{a}_1}=0. \quad (9)$$

Из дифференциальных уравнений (5) с учетом (4), (8) и (9) получаются в каждой точке $B\in Q_m$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega^{i_1}_0 = A^{i_1}_{a_1}\Theta^{a_1}; \omega^{\hat{i}_1}_0 = 0; -A^{i_1}_{a_1}\Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = A^{i_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^b;$$

$$A^{j_1}_{a_1}\omega^{\hat{i}_1}_{j_1} = A^{\hat{i}_1}_{a_1 b_1}\Theta^{b_1};$$

$$dA^{i_1}_{a_1} + A^{j_1}_{a_1}\Omega^{i_1}_{j_1} - A^{i_1}_{b_1}\Theta^{b_1}_{a_1} = A^{i_1}_{a_1 b}\Theta^b;$$

$$A^{\hat{i}_1}_{[a_1 b_1]} = 0, A^{i_1}_{[a_1 b]} = 0. \quad (10)$$

С учетом (7) в каждой точке $B\in Q_m$ можно ввести в рассмотрение величины $B^{a_1}_{i_1}$ по формулам

$$A^{k_1}_{b_1}B^{a_1}_{k_1} = \delta^{a_1}_{b_1}, A^{k_1}_{b_1}B^{b_1}_{j_1} = \delta^{k_1}_{j_1}, \quad (11)$$

которые в силу (10) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dB^{a_1}_{i_1} + B^{b_1}_{i_1}\Theta^{a_1}_{b_1} - B^{a_1}_{j_1}\Omega^{j_1}_{i_1} = B^{a_1}_{i_1 b}\Theta^b; B^{a_1}_{i_1 b} = -A^{k_1}_{c_1 b}B^{a_1}_{k_1}B^{c_1}_{i_1}. \quad (12)$$

Из (10)–(12) в точке $B\in Q_m$ имеют место следующие дифференциальные уравнения:

$$\Theta^{a_1} = B^{a_1}_{i_1}\Theta^{i_1}, \Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^b,$$

$$\omega^{\hat{i}_1}_{j_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1}\Theta^{b_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1}\omega^{i_1}_0, A^{\hat{i}_1}_{j_1\hat{b}_1} = 0, \quad (13)$$

где

$$A^{\hat{i}_1}_{[j_1 i_1]} = 0, B^{a_1}_{\hat{a}_1 b} = -A^{i_1}_{\hat{a}_1 b}B^{a_1}_{i_1},$$

$$A^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1} = A^{\hat{i}_1}_{a_1 b_1}B^{a_1}_{j_1}, A^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1} = A^{\hat{i}_1}_{a_1 b_1}B^{a_1}_{j_1}B^{b_1}_{i_1}. \quad (14)$$

Из (1) и (2) с учетом (9) и (13) замечаем, что величины (14) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 b} \equiv dB^{a_1}_{\hat{a}_1 b} + B^{c_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^{a_1}_{c_1} - B^{a_1}_{\hat{b}_1 b}\Theta^{\hat{b}_1}_{\hat{a}_1} - B^{a_1}_{\hat{a}_1 c}\Theta^c_b =$$

$$= B^{a_1}_{\hat{a}_1 bc}\Theta^c,$$

$$dA^{\hat{i}_1}_{j_1 b_1} + A^{\hat{j}_1}_{j_1 b_1}\Omega^{\hat{i}_1}_{\hat{j}_1} - A^{\hat{i}_1}_{k_1 b_1}\Omega^{k_1}_{j_1} - A^{\hat{i}_1}_{j_1 c_1}\Theta^{c_1}_{b_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 c}\Theta^c,$$

$$dA^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1} + A^{\hat{k}_1}_{j_1 i_1}\Omega^{\hat{i}_1}_{\hat{k}_1} - A^{\hat{i}_1}_{k_1 i_1}\omega^{k_1}_{j_1} - A^{\hat{i}_1}_{j_1 k_1}\omega^{k_1}_{i_1} = A^{\hat{i}_1}_{j_1 i_1 k_1}\omega^{k_1}_0,$$

$$A^{\hat{i}_1}_{[j_1 i_1 k_1]} = 0. \quad (15)$$

В соответствии с [7–10] дифференциальные уравнения (13) и (15) свидетельствуют о существовании в общем случае в точке $B\in Q_m$ канонизации реперов Q и P типа (9).

В следующем разделе данной статьи будет дана геометрическая интерпретация дифференцируемого отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ в терминах канонизации реперов Q и P типа (9) в каждом из случаев $m=n$, $m<n$ и $m>n$.

2. Геометрическая характеристика отображения $V^r_{m,n}$

2.1. В соответствии с (6) совокупность всех направлений $u=(\overline{B},\overline{\varepsilon}_a)\ u^a\in Q_m$ при отображении (3), приходящих в точку A_0 удовлетворяет уравнениям

$$A^i_a u^a = 0. \quad (16)$$

С учетом (7) и (9) заключаем, что система (16) в случае отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ имеет единственное решение $u^a=0$. Геометрически это означает, что совокупность всех указанных направлений в точке $B\in Q_m$ образует $(m-r)$-плоскость

$$\Gamma_{m-r} = (\overline{B},\overline{\varepsilon}_{r+1},\ldots,\overline{\varepsilon}_m)\subset Q_m. \quad (17)$$

Поэтому в пространстве Q_m определено распределение

$$\Delta_{m-r,m}: B\to\Gamma_{m-r}. \quad (18)$$

Интегральные кривые, описываемые точкой $B\in Q_m$, распределения (18) в смысле [7] с касательными, принадлежащими Γ_{m-r}, в силу (1) и (17)

определяются с учетом (10), (13) и (14) следующей вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений Пфаффа:

$$\Theta^{a_1} = 0 \overset{(9)}{\Leftrightarrow} \omega_0^{\hat{i}_1} = 0, \tag{19}$$

так как

$$B^{a_1}_{[\hat{a}_1\hat{b}_1]} = 0. \tag{20}$$

Иными словами, распределение (18) является голономным.

2.2. Заметим с учетом (2) и (10), что точка A_0 в соответствующем при отображении $V^r_{m,n}$ проективном пространстве P_n описывает r-поверхность $S_r \subset P_n$ с касательной r-плоскостью

$$L_r = (\bar{A}_0, \bar{A}_1, ..., \bar{A}_r). \tag{21}$$

При этом в силу (2), (13) и (19) r-плоскость $L_r \subset P_n$ постоянна вдоль интегральных кривых распределения (18). Следовательно, в случае $m<n$ поверхность S_m $(m \neq r)$ в P_n

с касательной m-плоскостью $L_m \supset L_r$, о которой идет речь в [2], в соответствии с [10–12] представляет собой $(m-r)$-мерное семейство r-плоскостей L_r, т. е. является тангенциально вырожденной поверхностью в смысле М.А. Акивиса.

Таким образом, с учетом (3), (13), (17) и (21) доказана

Теорема 2.1. Дифференцируемое отображение ранга r: $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ характеризуется тем, что оно каждую $(m-r+1)$-плоскость $_{\Gamma m-r+1}=(\Gamma_{m-r}, \bar{\varepsilon}_{a_1})u^{a_1} \subset Q_m$ переводит в соответствующее направление $x=(^{a_1}_0, \bar{A}_{i_1})\, A^{i_1}_{a_1} u^{a_1} \in L_r \subset P_n$.

Здесь $(m-r)$-плоскость $\Gamma_{m-r} \subset Q_m$; $\Gamma_{m-r} \ni B$ является ядром указанного отображения, а r-плоскость L_r касается r-поверхности $S_r \subset P_n$ в точке $A_0 \in P_n$.

2.3. Из результатов предыдущего пункта следует, что во всех случаях $m=n$, $m<n$ и $m>n$ при отображении $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ определена r-поверхность $S_r \subset P_n$ с касательной r-плоскостью L_r в точке $A_0 \in S_m$. Поэтому во всех указанных случаях при отображении $V^r_{m,n}$ можем воспользоваться результатами статьи [2] (в случае m-поверхности $S_m \subset P_n$ для доказательства того, что и с отображением $V^r_{m,n}$ инвариантным образом ассоциируются отображения f^{2n}_m: $Q_m \to M^{2n}$ и f^{2n-1}_m: $Q_m \to M^{2n-1}$ аффинного пространства Q_m в многообразие невырожденных нуль-пар, соответственно.

3. Существование отображения $V^r_{m,n}$

В этом разделе будет обосновано существование отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$.

3.1. Из результатов пункта 2.1 с учетом (15) и (18)–(20) следует, что голономное распределение $\Delta_{m-r,m}$ определяется дифференциальными уравнениями:

$$\Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 b}\Theta^b, \nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1 b} = B^{a_1}_{\hat{a}_1 bc}\Theta^c,$$
$$(a_1, b_1, c_1 = \overline{1,r}; \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = \overline{r+1,m}; a, b, c = \overline{1,m}). \tag{22}$$

Геометрически с учетом (19) это распределение характеризуется тем, что вдоль его интегральных кривых, описываемых точкой $B \in Q_m$, соответствующая точка $A_0 \in P_n$ неподвижна. Вдоль этих интегральных кривых в силу (14), (15) в точке $B \in Q_m$ выполняются дифференциальные уравнения

$$\Theta^{a_1} = 0, \omega_0^{i_1} = 0, \omega_0^{\hat{i}_1} = 0, \omega_{i_1}^{\hat{i}_1} = 0,$$
$$(a_1 = \overline{1,r}; i_1 = \overline{1,r}; \hat{i}_1 = \overline{1,r}). \tag{23}$$

Заметим, что вдоль интегральных кривых распределения $\Delta_{m-r,m}$: $B \to \Gamma_{m-r}$ точка $B \in Q_m$ описывает голономную $(m-r)$-поверхность $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ с касательной $(m-r)$-плоскостью (17). Из (22) с учетом (15) и (23) следует, что на $(m-r)$-поверхности $\tilde{S}_{m-r}$ выполняются дифференциальные уравнения

$$\Theta^{a_1} = 0,\ \Theta^{a_1}_{\hat{a}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1}\Theta^{\hat{b}_1},\ \nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1\hat{c}_1}\Theta^{\hat{c}_1},$$
$$B^{a_1}_{[\hat{a}_1\hat{b}_1]} = 0,\ B^{a_1}_{[\hat{a}_1\hat{b}_1\hat{c}_1]} = 0,$$
$$(a_1 = \overline{1,r};\ \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = \overline{r+1,m}). \tag{24}$$

Заметим также, что 1-формы $\Theta^{a_1}_{\hat{a}_1}$ и $\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1 c}$ получены путем внешнего дифференцирования системы $\Theta^{a_1}=0$ с последующим применением леммы Картана [4].

В соответствии с [13, 14] заключаем, что геометрический объект

$$\tilde{\Gamma} = \{B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1}\} \tag{25}$$

является фундаментальным геометрическим объектом $(m-r)$-поверхности $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$. Структура этого объекта такова, что он является объектом общего вида на $\tilde{S}_{m-r}$. Это означает, что $(m-r)$-поверхность $\tilde{S}_{m-r}$ является $(m-r)$-поверхностью общего вида в пространстве Q_m и определяется с произволом r функций $(m-r)$ аргументов (вдоль интегральных кривых голономного распределения $\Delta_{m-r,m}$).

Таким образом, система дифференциальных уравнений (24) в инволюции в смысле [4].

3.2. Заметим, что инволютивность системы (24) можно показать, если воспользоваться методом Кэлера [4].

Из (24) следует, что общее число N независимых величин $B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1\hat{c}_1}$, определяющих общий интегральный элемент, равно

$$N = r \cdot \frac{(m-r)(m-r+1)(m-r+2)}{6}.$$

Строим цепь по формам базиса $\Theta^{a_1}=0, [\Theta^{r+1}...\Theta^m]$.

Линейный элемент $E_{r+1}(\Theta^{a_1}=0,\ \Theta^{r+2}=...=\Theta^m=0)$ определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1} = B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1 r+1}\Theta^{r+1}, \Theta^{a_1} = 0, \Theta^{r+2} = ... = \Theta^m = 0.$$

Произвол линейного элемента E_{r+1} равен

$$R_{r+1} = \frac{r \cdot (m-r)(m-r+1)}{2}. \tag{26}$$

Давая всем R_{r+1} величинам $B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1, r+1}$ произвольные, но определенные значения $\overset{0}{B}{}^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1, r+1}$, получаем элемент E^0_{r+1}. Второй элемент $E_{r+2}(\Theta^{a_1}=0, \Theta^{r+3}=...=\Theta^m=0)$, проходящий через элемент E^0_{r+1}, определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1} = \overset{0}{B}{}^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1,r+1}\,\Theta^{r+1} + B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1,r+2}\Theta^{r+2},$$
$$(\Theta^{a_1} = 0, \Theta^{r+3} = \ldots = \Theta^{m} = 0). \qquad (27)$$

Коэффициенты при Θ^{r+1} уже известны. Поэтому из (27) в силу $B^{a_1}_{[\hat{a}_1\hat{b}_1\hat{c}_1]}=0$ замечаем, что произвол линейного элемента E_{r+2}, проходящего через элемент E^0_{r+1}, равен

$$R_{r+2} = \frac{r\cdot(m-r-1)(m-r-2)}{2}. \qquad (28)$$

Продолжая процесс, мы получаем, что интегральный элемент E_m, проходящий через элемент E^0_{m-1}, определяется дифференциальными уравнениями

$$\nabla B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1} = \overset{0}{B}{}^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}_1 h}\,\Theta^{h} + B^{a_1}_{\hat{a}_1\hat{b}\,m}\Theta^{m},$$
$$(\Theta^{a_1} = 0, \Theta^{m} \neq 0, h = \overline{1, m-1}). \qquad (29)$$

Коэффициенты при Θ^h уже известны. Поэтому из (29) следует, что произвол элемента E_m, проходящего через элемент E^0_{m-1}, равен

$$R_m = r\cdot\frac{\begin{pmatrix}\{(m-r)-(m-r-1)\}\times\\ \times\{(m-r)-(m-r-2)\}\end{pmatrix}}{2} = r. \qquad (30)$$

Из (26), (28) и (30) в силу (25) и в соответствии с [4] заключаем, что число Картана Q равно

$$Q = R_{r+1} + R_{r+2} + \ldots + R_m = N,$$

т. е. система (24) в инволюции и определяет решение с произволом r функций $m-r$ аргументов. Поэтому доказано, что отображение $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ существует.

Замечание 3.1. Учитывая результаты раздела 2, можно дать следующее геометрическое представление отображения $V^r_{m,n}$: $Q_m \to P_n$.

В аффинном пространстве Q_m с произволом r функций $m-r$ аргументов задается $(m-r)$-поверхность $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ с касательной $(m-r)$-плоскостью Γ_{m-r} в точке $B \in \tilde{S}_{m-r}$. Каждой точке $B \in \tilde{S}_{m-r}$ сопоставляется центропроективное пространство P_n с центром в точке A_0 так, что в этом пространстве задается соответствующая r-плоскость $L_r \ni A_0$.

В итоге вдоль $\tilde{S}_{m-r} \subset Q_m$ точка $A_0 \in P_n$ является текущей точкой r-поверхности $S_r \subset P_n$ с касательной r-плоскостью L_r.

Выводы

В работе рассмотрено регулярное отображение ранга r аффинного и проективного пространств. Дана геометрическая характеристика этого отображения. Показано, что с данным отображением инвариантно ассоциируется отображение m-мерного аффинного пространства в многообразие невырожденных нуль-пар. Доказывается (геометрически и методом Кэлера), что рассматриваемое многообразие существует. Полученные результаты могут быть использованы для детального изучения невырожденных нуль-пар и доказательства существования дифференцируемого отображения аффинных и проективных пространств в общих случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль-Хассани М.А., Молдаванова Е.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 28–32.
2. Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств (mn) // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 16–20.
3. Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространств $(m>n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2014. – Т. 324. – № 2. – С. 47–51.
4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
5. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
6. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. Т. 6. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 37–42.
7. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
8. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
9. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev.math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
10. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
11. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
12. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей // Институт научной информации. Итоги науки. Геометрия. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 5–64.
13. Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Труды геометрического семинара. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 1. – С. 239–263.
14. Швейкин П.И. Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве // Труды геометрического семинара. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 331–423.

Поступила 10.02.2013 г.

UDC 514.757.2

DIFFERENTIABLE MAPPING OF *R* RANK IN AFFINE Q_m AND PROJECTIVE P_n SPACES

Mudkhar Abbas Al-Khassani,
University of Basrah, Iraq; Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: mughar73@yahoo.com

Anatoly A. Luchinin,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: luchinin@tpu.ru.

The urgency of the work is caused by necessity of additional studying of special mapping $V^r_{m,n}$ of r<min (m, n) rank in affine Q_m and projective P_n spaces.
The main aim of the study. *The previous works considered the mappings $V_{m,n}$, when r<min (m, n) in cases m=n, m<n, m>n. In the given work the authors consider the differentiable mapping $V^r_{m,n}$ of r<min (m,n) rank in affine space Q_m and projective space P_n.*
Methods of research. *The basic methods of research are Cartan method of external forms in local differential geometry and G.F. Lapteva's theoretical-group method. These methods assume local studying of the considered object and the use of functions of a class C^∞.*
Results. *The paper considers the regular mapping of rank of affine and projective spaces. The geometrical characteristic of this mapping is given. The mapping of m-dimensional affine space in manifold nonsingular null-pair is associated with $V^r_{m,n}$ invariant mapping. The existence of the given mapping is proved (geometrically and by Kähler's method). The authors studied analytically and geometrically the structure of internal fundamental geometrical object of mapping $V^r_{m,n}$.*

Key words:
Differentiated mapping, multidimensional spaces and surfaces, geometrical objects.

REFERENCES

1. Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 28–32.
2. Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv ($m<n$) [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces ($m<n$)]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 16–20.
3. Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv ($m>n$) [Differentiable mapping affine Q_m and projective P_n spaces ($m>n$)]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 47–51.
4. Finikov C.P. *Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometrii* [Method of Cartan's exterial forms in differential geometry]. Moscow, GITTL, 1948. 432 p.
5. Laptev G.F. Differentsialnaya geometriay pogruzhennykh mnogoobraziy [Differential geometry of the immersed manifolds]. *Trudy matematicheskogo obshchestva* [Proc. of Moscow mathematical society]. Moscow, GITTL, 1953, no. 2, pp. 275–382.
6. Laptev G.F. K invariantnoy teorii differentsialnykh otobrazheniy [To the invariant theory of differentiable mappings]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proc. of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1974. Vol. 6, pp. 37–42.
7. Evtushik L.E., Lumiste Yu.G., Ostianu N.M., Shirokov A.P. Differentsialno-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh [Differential-geometrical structure on manifolds]. *Results of a science and engineering. Series: Problems of geometry*, 1979, vol. 9, pp. 3–246.
8. Ivlev E.T., Luchinin A.A. Otobrazhenie affinnykh i evklidovykh prostranstv [Mapping affine and Euclidean spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 8–14.
9. Ostianu N.M. O kanonizatsii podvizhnogo repera pogruzhennogo mnogoobraziya [On canonization of a mobile reference point of the immersed manifold]. *Rev. math. pures et appl.* (*RNR*), 1962, no. 2, pp. 231–240.
10. Akivis M.A. Fokalnye obrazy poverkhnosti ranga *r* [Focal images of surface of a rank *r*]. *Bulletin of high schools. Mathematics*, 1957, no. 1, pp. 9–19.
11. Akivis M.A. Ob odnom klasse tangentsialno vyrazhdennykh poverkhnostey [On one class of tangential singular surfaces]. *Reports of Academy of Sciences the USSR*, 1962, vol. 146, no. 3, pp. 515–518.
12. Laptev G.F. Differentsialnaya geometriya mnogomernykh poverkhnostey [Differential geometry of multidimentional surfaces]. *Institut nauchnoy informatsii. Itogi nauki. Geometriya* [Institute of the scientific information. Result of a science. Geometry]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1965, pp. 239–263.
13. Ostianu N.M. O geometrii mnogomernoy poverkhnosti proektivnogo prostranstva [On geometry of a multidimmentional surface of projective space]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proc. of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1966. Vol. 1, pp. 239–263.
14. Shveykin P.I. Normalnye geometricheskie obekty poverkhnosti v affinnom prostranstve [Normal geometrical objects of a surface in affine space]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Works of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1966. Vol. 1, pp. 331–423.

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии
Ошского государственного университета, Республика Кыргызстан, 714000,
г. Ош, ул. Ленина, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

При исследовании любой динамической системы особый интерес представляют критические значения ее параметров, при которых происходят качественные изменения свойств стационарных или квазистационарных режимов, т. е. наблюдаются бифуркации. Один из видов бифуркации, при которой нарушается условие асимптотической устойчивости и выполняется предельный переход, появляется в системах, встречающихся в физике лазеров, химической кинетике, пластической деформации, биофизике, в модифицированной системе Циглера, и при моделировании верховых лесных пожаров, безопасных процессов горения с максимальной температурой. В работе, применяя метод стационарной фазы, построена асимптотика решения системы сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими точками поворота в комплексной плоскости при нарушении условия асимптотической устойчивости. Полученная асимптотическая оценка для решения задачи является неулучшаемой.

Ключевые слова:
Асимптотика решения, точка поворота, сингулярное возмущение, асимптотическая устойчивость, линия Стокса, обыкновенное дифференциальное уравнение.

Введение

При исследовании любой динамической системы особый интерес представляют критические значения ее параметров, при которых происходят качественные изменения свойств стационарных или квазистационарных режимов, т. е. наблюдаются бифуркации. Один из видов бифуркации, при которой нарушается условие асимптотической устойчивости и выполняется предельный переход, появляется в системах, встречающихся в физике лазеров [1], химической кинетике [2], пластической деформации [3], биофизике [4, 5], в модифицированной системе Циглера [6], и при моделировании верховых лесных пожаров [7], безопасных процессов горения с максимальной температурой [8]. В данной работе строится асимптотика решения, в случае нарушения условия асимптотической устойчивости.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=A(t)x(t,\varepsilon)+f(t), \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \tag{2}$$

где $A(t)$ – квадратная матрица-функция второго порядка с элементами $a_{jk}(t)$; $f(t)=\{f_1(t)\ f_2(t)\}$, $a_{jk}(t)$, $f_k(t)$ – аналитические функции в области D; $x^0=\{x_1^0,x_2^0\}$ – постоянный вектор, $t\in D$, $t=t_1+it_2$.

Условие $\mathbf{U}_1$. Пусть $A(t)$ – матрица-функция второго порядка, имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\lambda_{1,2}(t)=\sin t\pm ia\cos t$, $\mathbf{0<a<1}$, $t_0=-\arccos((1-a)^{1/2})$.

Асимптотику решения задачи (1), (2) при условиях $\mathbf{U}_1$ построим в области D при $\varepsilon\to 0$, которая содержит неустойчивую область.

Систему (1) можно рассматривать как возмущенную по отношению к вырожденной системе

$$A(t)\tilde{x}(t)+f(t)=0. \tag{3}$$

Вырожденная система (3) имеет единственное решение $\tilde{x}(t)=-A^{-1}(t)f(t)$.

Это решение в области D, а именно в точках $t=\pi k$, $\pm\alpha i$, $k\in\mathbf{Z}$, имеет особенность, так как собственные значения матрицы-функции $A(t)$ в этих точках обращаются в нуль:

$$\lambda_1(\pi k\alpha)\equiv 0,\ \lambda_2(\pi k,-\alpha)\equiv 0,\ \alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Поэтому рассматриваемую задачу можно называть бисингулярной [9].

Для приведения $A(t)$ к диагональному виду выполняем следующее преобразование

$$B_0^{-1}(t)A(t)B_0(t)=D(t),$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix},$$

$$B_0(t)=\begin{pmatrix} \lambda_1(t)-a_{22}(t) & \lambda_2(t)-a_{22}(t) \\ a_{21}(t) & a_{21}(t)\end{pmatrix},$$

$$D(t)=\mathrm{diag}\,(\lambda_1(t),\lambda_2(t)).$$

Пусть в области D выполняется неравенство $\det B_0(t)\neq 0$.

Задача (1), (2) с заменой $x(t,\varepsilon)=B_0(t)y(t,\varepsilon)$ принимает вид:

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=D(t)\,y(t,\varepsilon)+\varepsilon B(t)\,y(t,\varepsilon)+h(t), \tag{4}$$

$$y(t_0,\varepsilon)=y^0, \tag{5}$$

где

$$B(t)=-B_0^{-1}(t)B_0'(t),\ \ y^0=B_0^{-1}(t_0)x^0,$$

$$h(t)=B_0^{-1}(t)f(t).$$

Задачу Коши для дифференциальных уравнений (4), (5) заменим интегральным уравнением:

$$y(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)y^0 + \\ + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)\left(B(\tau)y(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}h(\tau)\right)d\tau, \qquad (6)$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right)$.

Если обозначить $y(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)/\varepsilon$, то (6) примет вид:

$$z(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0 + \\ + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)(B(\tau)z(\tau,\varepsilon) + h(\tau))d\tau. \qquad (7)$$

Теорема 1. Если для интеграла

$$\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau \qquad (8)$$

в некоторой области D справедлива оценка

$$\left\|\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right\| \le c\delta(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \le c\delta(\varepsilon) < 1,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon) = 0,$$

то для решения систем интегральных уравнений (7) справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le c\delta(\varepsilon).$$

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений:

Пусть $z_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$z_n(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0 + \\ + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)(B(\tau)z_{n-1}(\tau,\varepsilon) + h(\tau))d\tau.$$

Тогда

$$z_1(t,\varepsilon) = \varepsilon E(t,t_0,\varepsilon)y^0 + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau.$$

$$z_n(t,\varepsilon) = z_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_{n-1}(\tau,\varepsilon)d\tau.$$

По условию теоремы $\left\|\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right\| \le c\delta(\varepsilon)$ и $\varepsilon\le\delta(\sigma)<1$. Тогда для первого приближения имеем:

$$\|z_1(t,\varepsilon)\| \le \left|E(t,t_0,\varepsilon)y^0\right|\varepsilon + \left|\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)h(\tau)d\tau\right| \le c\delta(\varepsilon).$$

Оценим второе приближение

$$\|z_2(t,\varepsilon)\| \le |z_1(t,\varepsilon)| + \\ + \left|\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_1(\tau,\varepsilon)d\tau\right| \le c\delta(\varepsilon) + (c\delta(\varepsilon))^2.$$

Для n-го приближения справедлива оценка

$$\|z_n(t,\varepsilon)\| \le c\delta(\varepsilon) + (c\delta(\varepsilon))^2 + \ldots + (c\delta(\varepsilon))^n.$$

Действительно, применим метод математической индукции. При $n=1$ мы уже доказали верность. Пусть $n=k$:

$$\|z_k(t,\varepsilon)\| \le c\delta(\varepsilon) + (c\delta(\varepsilon))^2 + \ldots + (c\delta(\varepsilon))^k.$$

Для (k+1)-го приближения имеем:

$$\|z_{k+1}(t,\varepsilon)\| \le |z_1(t,\varepsilon)| + \left|\int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)B(\tau)z_k(\tau,\varepsilon)d\tau\right| \le \\ \le c\delta(\varepsilon) + c\delta(\varepsilon)(c\delta(\varepsilon) + (c\delta(\varepsilon))^2 + \ldots + (c\delta(\varepsilon))^k).$$

Отсюда и получаем

$$\|z_{k+1}(t,\varepsilon)\| \le c\delta(\varepsilon) + (c\delta(\varepsilon))^2 + \ldots + (c\delta(\varepsilon))^{k+1}.$$

Последовательные приближения равномерно ограничены

$$\forall n\in\mathrm{N}:\ \|z_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon).$$

Рассмотрим ряд

$$\|z_n(t,\varepsilon)\| = \|z_1(t,\varepsilon)\| + (\|z_2(t,\varepsilon)\| - \|z_1(t,\varepsilon)\|) + (\|z_3(t,\varepsilon)\| - \|z_2(t,\varepsilon)\|) + \\ + \ldots + (\|z_n(t,\varepsilon)\| - \|z_{n-1}(t,\varepsilon)\|),$$

так как

$$\|z_1(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)<1,\ (\|z_2(t,\varepsilon)\| - \|z_1(t,\varepsilon)\|)\le(c\delta(\varepsilon))^2<1, \\ (\|z_3(t,\varepsilon)\| - \|z_2(t,\varepsilon)\|)\le(c\delta(\varepsilon))^3<1,\ldots(\|z_n(t,\varepsilon)\| - \|z_{n-1}(t,\varepsilon)\|)\le \\ \le(c\delta(\varepsilon))^n<1,$$

то в рассматриваемой области последовательность $\{z_n(t,\varepsilon)\}$ является сходящейся и имеет предел $z(t,\varepsilon)$:

$$\|z_n(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon)(1-(c\delta(\varepsilon))^{n+1})/(1-c\delta(\varepsilon)),$$

при $n\to\infty$ получим

$$\|z(t,\varepsilon)\|\le c\delta(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь собственные значения $\lambda_{1,2}(t)=\sin t\pm ia\cos t$, при $0<a<1$.

Отсюда

$$\mathrm{Re}(\lambda_1(t))=\mathrm{Re}(\lambda_2(t))=\sin t,\ \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}(t))<0,$$

при $-\pi+2\pi k<t<2\pi k$,

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}(t))>0,\ \text{при } 2\pi k<t<\pi+2\pi k,\ \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}(t))=0,$$

при $t=\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Если $t=t_1+it_2$, то

$$\lambda_1(t_1,t_2)=\sin t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+i\cos t_1(\mathrm{sh}t_2+a\,\mathrm{ch}t_2),$$
$$\lambda_2(t_1,t_2)=\sin t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+i\cos t_1(\mathrm{sh}t_2-a\,\mathrm{ch}t_2).$$

Из систем

$$\begin{cases}\sin t_1(\mathrm{ch}t_2 + a\,\mathrm{sh}t_2) = 0,\\ \cos t_1(\mathrm{sh}t_2 + a\,\mathrm{ch}t_2) = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\sin t_1(\mathrm{ch}t_2 - a\,\mathrm{sh}t_2) = 0,\\ \cos t_1(\mathrm{sh}t_2 - a\,\mathrm{ch}t_2) = 0\end{cases}$$

находим нули $\lambda_1(t_1,t_2)$ и $\lambda_2(t_1,t_2)$ в комплексной плоскости:

$$\begin{cases}\sin t_1 = 0,\\ \mathrm{sh}t_2 + a\,\mathrm{ch}t_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1 = \pi k, k\in Z,\\ t_2 = -\alpha,\ \alpha = \ln\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}} > 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin t_1 = 0,\\ \mathrm{sh}t_2 - a\,\mathrm{ch}t_2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1 = \pi k, k\in Z,\\ t_2 = \alpha,\end{cases}$$

т. е. $(\pi k,-\alpha)$ и $(\pi k,\alpha)$ $k\in\mathbf{Z}$ являются нулями собственных значений $\lambda_1(t_1,t_2)$ и $\lambda_2(t_1,t_2)$ соответственно. Заметим, что $\mathrm{Im}\lambda_1(t_1,t_2)>0$, $\mathrm{Im}\lambda_2(t_1,t_2)<0$, при $|t_1|<|t_0|$, $|t_2|<\alpha$.

Рассмотрим теперь функции

$$u_1(t)=\int\lambda_1(t)dt,\qquad u_2(t)=\int\lambda_2(t)dt.$$

Если $t=t_1+it_2$, то

$$u_1(t_1,t_2)-u_1(t_0,0)=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}t_2+a\,\mathrm{ch}t_2)+\sqrt{1-a^2},$$

$$u_2(t_1,t_2)-u_2(t_0,0)=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+i\sin t_1(a\,\mathrm{ch}t_2-\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}.$$

Пусть

$$u_{11}(t_1,t_2)=\mathrm{Re}(u_1(t_1,t_2)-u_1(t_0,0))=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2},$$

$$u_{21}(t_1,t_2)=\mathrm{Re}(u_2(t_1,t_2)-u_2(t_0,0))=$$
$$=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}.$$

Приступаем к построению области D:

$$D=\{(t_1,t_2):u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\le 0,|t_2|\le\alpha\}.$$

Из равенств $u_{11}(t_1,t_2)=0$, $u_{21}(t_1,t_2)=0$ имеем:

$$-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}=0\Rightarrow t_2=\varphi_1(t_1),\ t_2=\varphi_2(t_1),$$

$$-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2-a\,\mathrm{sh}t_2)+\sqrt{1-a^2}=0\Rightarrow t_2=-\varphi_1(t_1),\ t_2=-\varphi_2(t_1),$$

где

$$\varphi_1(t_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t_1}{2}\right)\right),$$

$$\varphi_2(t_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t_1}{2}\right)\right).$$

Функция $t_2=\varphi_1(t_1)$ монотонно возрастает, а функция $t_2=\varphi_2(t_1)$ монотонно убывает при $t\in[t_0,-t_0]$. Эти две функций $t_2=\varphi_1(t_1)$, $t_2=\varphi_2(t_1)$ пересекаются в точке $(0,-\alpha)$.

В окрестности точки $(0,-\alpha)$ функция $u_{11}(t_1,t_2)=0$ делит плоскость на четыре равных сектора, в которых знак функций $u_{11}(t_1,t_2)=0$ чередуется. Аналогично в окрестности точки $(0,-\alpha)$ функция $u_{21}(t_1,t_2)=0$ делит плоскость на четыре равных сектора. Обе функции отрицательны в секторе, который содержит действительную ось Ot_1. Из пересечений секторов мы получаем криволинейный четырехугольник. Следовательно, область D является криволинейным четырехугольником с вершинами $A(t_0,0)$, $B(0,-\alpha)$, $C(-t_0,0)$ и $D(0,\alpha)$.

Перейдем к оценке интеграла (8):

Теорема 2. Для интеграла

$$J_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}}h_1(\tau)d\tau=$$
$$=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{L}e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}}h_1(\tau)d\tau,\qquad(9)$$

в области D справедлива оценка

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right|\le c\Omega_{131}(t,\varepsilon),$$

где

$$u_1(t)=-\cos t_1(\mathrm{ch}t_2+a\,\mathrm{sh}t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}t_2+a\,\mathrm{ch}t_2)+\cos t_0,$$
$$\cos t_0=\sqrt{1-a^2},$$

$$\Omega_{31}(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon,\ \text{при}\ t\in H_0,\\ \varepsilon^{1-\gamma},\ \text{при}\ t\in H_1,\\ \sqrt{\varepsilon},\ \text{при}\ t\in H_2,\end{cases}\quad\text{при}\ h_1(0,-\alpha)\ne 0,$$

$$\Omega_{31}(t,\varepsilon)=\varepsilon,\ \text{при}\ h_1(0,-\alpha)=0,$$
$$H_{00}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\le 0,\ t_1\le-\delta,\ \delta^2\le|t_1+i\,(t_2+\alpha)|\};$$
$$H_{01}=\{t:u_{21}(t_1,t_2)\le 0,\ -\delta\le t_1,\ u_{11}(t_1,t_2)\le(\varepsilon\ln\varepsilon)/2,$$
$$\delta^2\le|t_1+i\,(t_2+\alpha)|\};$$
$$H_{10}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ -\alpha\le t_2,\ |t_1+i(t_2+\alpha)|=\varepsilon^{2\gamma}\delta^2,$$
$$-\varepsilon^{\gamma}c\le t_1\le\delta_1(\varepsilon)\};$$
$$H_{11}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)=(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon,$$
$$\delta_1(\varepsilon)\le t_1\le-t_0+c(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon\};$$
$$H_{20}=\{t:u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ -\alpha\le t_2,\ |t_1+i(t_2+\alpha)|\le\varepsilon\delta^2\};$$
$$H_{21}=\{t:-c\varepsilon\le u_{11}(t_1,t_2)\le 0,\ u_{21}(t_1,t_2)\le 0,\ c\varepsilon^{1/2}\le t_1,\ t_2>-\alpha\};$$
$$H_0=H_{00}\cup H_{01},\ H_1=H_{10}\cup H_{11},\ H_2=H_{20}\cup H_{21},$$
$$D=H_0\cup H_1\cup H_2.$$

δ – достаточное малое число, $0\le\gamma<1/2$.

Лемма 1. Если $t\in H_{00}$, то для интеграла (9) справедлива оценка

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right|\le c\varepsilon.\qquad(10)$$

Доказательство. Путь интегрирование состоит из отрезка прямой, соединяющей точки $(t_0,0)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_2=(\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2$, при этом $t_0\le\tau_1\le t_1$. Так как в области H_{00} интеграл не имеет особенностей, то воспользуемся правилом интегрирования по частям:

$$J_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{t_1}e^{-\frac{u_1(\tau_1,s(\tau_1))}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,s(\tau_1))d\tau_1=$$
$$=\varepsilon k e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{t_1}\frac{h_1(\tau_1)}{-\lambda_1(\tau_1)}de^{-\frac{u_1(\tau_1)}{\varepsilon}}=$$
$$=\varepsilon k\left(\begin{array}{l}\dfrac{h_1(t_1)}{-\lambda_1(t_1)}+\dfrac{h_1(t_0)}{-\lambda_1(t_0)}e^{\frac{u_1(t)-u_1(t_0)}{\varepsilon}}-\\ -\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{h_1(\tau_1)}{-\lambda_1(\tau_1)}\right)'e^{-\frac{u_1(\tau_1)}{\varepsilon}}d\tau_1\end{array}\right),$$

где

$$k=1+i(t_1-t_0)/t_2,\ u_1(\tau_1)=-\cos\tau_1(\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{sh}\,((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))+i\sin\tau_1(\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{ch}\,((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))+\cos t_0,$$
$$\lambda_1(\tau_1)=\sin\tau_1(\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{sh}\,((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))+i\cos\tau_1(\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{ch}\,((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)).$$

Так как

$$\mathrm{Re}(\lambda_1(\tau_1))=\sin\tau_1(\mathrm{ch}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2)+$$
$$+a\,\mathrm{sh}((\tau_1-t_0)(t_1-t_0)/t_2))<0$$

при $\tau_1<0$ в области D, то функция $\mathrm{Re}\,(u_1(\tau_1))$ убывает при $t_0\le\tau_1\le t_1\le-\delta<0$, и

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right|\le\varepsilon c\frac{\left|h_1(t_1,t_2)\right|}{\left|\lambda_1(t_1,t_2)\right|}\le c\varepsilon.$$

Лемма 2. Если $t\in H_{10}$, то для интеграла (9) справедлива оценка

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right| = \begin{cases} O(\varepsilon^{1-\gamma}), \text{ при } h_1(0,-\alpha)\neq 0, \\ O(\varepsilon), \text{ при } h_1(0,-\alpha)=0, \end{cases}$$

$$0<\gamma\leq 1/2. \qquad (11)$$

Доказательство вытекает из леммы 1, при $\delta=c\varepsilon^{2\gamma}$.

Лемма 3. Если $t\in H_{20}$, то для интеграла (9) справедлива оценка

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right| = \begin{cases} O(\sqrt{\varepsilon}), \text{ при } h_1(0,-\alpha)\neq 0, \\ O()\varepsilon, \text{ при } h_1(0,-\alpha)=0. \end{cases} \qquad (12)$$

Доказательство. Путь интегрирование состоит из двух частей: l_1 – линии Стокса, $\tau_2=\varphi_2(\tau_1)$, $t_0\leq\tau_1\leq 0$, где $\varphi_2(\tau_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau_1}{2}\right)\right)$, при этом

$$u_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1)) = i\sin\tau_1(\operatorname{sh}\varphi_2(\tau_1)+a\operatorname{ch}\varphi_2(\tau_1)) =$$

$$= i\sin\tau_1((1+a)e^{\varphi_2(\tau_1)}+(1+a)e^{-\varphi_2(\tau_1)})/2 =$$

$$= -\frac{i}{2}\sqrt{1-a^2}\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_1}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_1}{2}\right)\right)\sin\tau_1 =$$

$$= i\sqrt{1-a^2}\operatorname{tg}\tau_1\sin\tau_1,$$

$$d\tau_2 = \varphi'_2(\tau_1)d\tau_1 = -\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t_1}{2}\right)}\frac{d\tau_1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t_1}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{d\tau_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t_1\right)} = -\frac{d\tau_1}{\cos\tau_1}, \cos\tau_1\neq 0,\ \tau_1\in[t_0,0].$$

l_2 – отрезок, соединяющий точки $(0,-\alpha)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$.

$$J_3(t,\varepsilon) = j_{31}(t,\varepsilon)+j_{32}(t,\varepsilon),$$

где

$$j_{31}(t,\varepsilon) = e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{0} e^{-\frac{iS(\tau_1)}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1))\left(1-\frac{i}{\cos\tau_1}\right)d\tau_1,$$

$$j_{32}(t,\varepsilon) =$$

$$= e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{-\alpha}^{t_2} e^{-\frac{u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)}{\varepsilon}}h_1(\psi(\tau_2),\tau_2)(t_1/(t_2+\alpha)+i)d\tau_2,$$

$S(\tau_1)=\sqrt{1-a^2}-a^2\sin\tau_1$, $\psi(\tau_2)=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$.

Рассмотрим функцию $S(\tau_1)$:

$S(0)=0$, $S(\tau_1)\neq 0$ при $\tau_1\in[t_0,0)$, $|t_0|<\pi/2$;

$$S'(\tau_1) = \sqrt{1-a^2}\sin\tau_1\left(\frac{1}{\cos^2\tau_1}+1\right),\ S'(0)=0.$$

$$S''(\tau_1) = \sqrt{1-a^2}\left(\cos\tau_1\left(\frac{1}{\cos^2\tau_1}+1\right)-\frac{2\sin^2\tau_1}{\cos^3\tau_1}\right),$$

$$S''(0) = 2\sqrt{1-a^2}>0.$$

Из леммы 1 имеем

$$j_{311}(t,\varepsilon) =$$

$$= e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0}^{-\delta} e^{-\frac{iS(\tau_1)}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1))\left(1-\frac{i}{\cos\tau_1}\right)d\tau_1 = O(\varepsilon).$$

В окрестности точки перевала $(0,-\alpha)$ применяем метод стационарной фазы.

$$j_{312}(t,\varepsilon) = e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{-\delta}^{0} e^{-\frac{iS(\tau_1)}{\varepsilon}}h_1(\tau_1,\varphi_2(\tau_1))\left(1-\frac{i}{\cos\tau_1}\right)d\tau_1 =$$

$$\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2S''(0)}}h_1(0)e^{-\frac{u_1(t)}{\varepsilon}+i\pi/4}+O(\varepsilon).$$

$j_{32}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, при $h_1(0,-\alpha)=0$; $j_{32}(t,\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$, при $h_1(0,-\alpha)\neq 0$.

Объединяя оценки $j_{311}(t\varepsilon)$, $j_{312}(t,\varepsilon)$, получим оценку для интеграла $j_{31}(t,\varepsilon)$:

$$j_{31}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon), \text{при } h_1(0,-\alpha)=0, \\ O(\sqrt{\varepsilon}), \text{при } h_1(0,-\alpha)\neq 0. \end{cases}$$

Для интеграла $j_{32}(t,\varepsilon)$ в окрестности точки перевала $(0,-\alpha)$ функцию $u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)$ заменяем функцией $u_1(\psi(\tau_2),\tau_2)\sim -k(\tau_2+\alpha)^2$, $k=u''_1(\psi(-\alpha),-\alpha)/2$, а функцию $h_1(t_2)$ разлагаем в ряд Тейлора в окрестности $t_2=-\alpha$. Получим:

$$j_{32}(t,\varepsilon) =$$

$$= ce^{\frac{-k(t_2+\alpha)^2}{\varepsilon}}\int_{-\alpha}^{t_2} e^{\frac{k(\tau_2+\alpha)^2}{\varepsilon}}\begin{pmatrix} h_{10}+(\tau_2+\alpha)h_{11}+ \\ +O((\tau_2+\alpha)^2) \end{pmatrix}d\tau_2 =$$

$$= c\sqrt{\varepsilon}h_{10}+c\varepsilon h_{11}+O(\varepsilon^{3/2}).$$

Отсюда

$$j_{32}(t,\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon), \text{при } h_1(0,-\alpha)=0, \\ O(\sqrt{\varepsilon}), \text{при } h_1(0,-\alpha)\neq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right| = \left|j_{31}(t,\varepsilon)\right|+\left|j_{32}(t,\varepsilon)\right| =$$

$$= \begin{cases} O(\varepsilon), \text{при } h_1(0,-\alpha)=0, \\ O(\sqrt{\varepsilon}), \text{при } h_1(0,-\alpha)\neq 0. \end{cases}$$

Лемма 4. Если $t\in H_{00}$, то для интеграла (9) справедлива оценка (10).

Доказательство. Путь интегрирование состоит из двух частей: l_1 – линии Стокса $\tau_2=\varphi_2(\tau_1)$, $t_0\leq\tau_1\leq 0$, где $\varphi_2(\tau_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau_1}{2}\right)\right)$; l_2 – отрезок, соединяющий точки $(0,-\alpha)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$. Из (9) имеем

$$J_3(t,\varepsilon) =$$

$$= e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{t_0+i0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}}h_1()\tau d\tau + e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}}\int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1()\tau}{\varepsilon}}h_1(\tau)d\tau.$$

Из леммы 3 для первого интеграла имеем оценку,

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i_0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le c\varepsilon.$$

При $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$ справедливо неравенство:

$$u_{11}(\tau_2)\ge(\tau_2+\alpha)^2u_{11}(t_2)/(t_2+\alpha)^2\ge u_{11}(t_2),$$

где $u_{11}(\tau)=-\cos\,(t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha))(\mathrm{ch}\,\tau_2+a\,\mathrm{sh}\,\tau_2)+\cos t_0$, так как функция $0\ge u_{11}(\tau_2)\ge u_{11}(t_2)$ и $1/(\tau_2+\alpha)\ge \ge 1/(t_2+\alpha)$, то отсюда и следует неравенство $u_{11}(\tau_2)\ge(\tau_2+\alpha)^2u_{11}(t_2)/(t_2+\alpha)^2$.

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1()\tau}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le$$

$$\le ce^{\frac{u_{11}(t_2)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha}^{t_2} e^{-\frac{(\tau_2+\alpha)^2 u_{11}(t_2)}{(t_2+\alpha)^2\varepsilon}} d\tau_2 \le c\int_{-\alpha}^{t_2} e^{\frac{(t_2-\tau_2)u_{11}(t_2)}{(t_2+\alpha)\varepsilon}} d\tau_2.$$

Отсюда

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le c\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right| \le \left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i_0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| +$$

$$+\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| \le c\varepsilon.$$

Лемма 5. Если $t\in H_{11}$, то для интеграла (9) справедлива оценка (11).

Доказательство вытекает из леммы 4, при $\delta=c\varepsilon^{2\gamma}$.

Лемма 6. Если $t\in H_{21}$, то для интеграла (9) справедлива оценка (12).

Доказательство. Путь интегрирование состоит из двух частей: l_1 – линии Стокса $\tau_2=\varphi_2(\tau_1)$, $t_0\le\tau_1\le 0$, где $\varphi_2(\tau_1)=\ln\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\tau_1}{2}\right)\right)$; l_2 – отрезок, соединяющий точки $(0,-\alpha)$ и (t_1,t_2), уравнение прямой имеет вид $\tau_1=t_1(\tau_2+\alpha)/(t_2+\alpha)$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$.

Из (9) имеем

$$J_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau +$$

$$+e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau.$$

Из леммы 3 для первого интеграла имеем оценку

$$\left| e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0+i0}^{0-i\alpha} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau \right| = \begin{cases} O(\varepsilon), \text{при } h_1(0,-\alpha)=0, \\ O(\sqrt{\varepsilon}), \text{при } h_1(0,-\alpha)\ne 0. \end{cases}$$

Пусть

$$j_{33}(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_1(t)}{\varepsilon}} \int_{0-i\alpha}^{t} e^{-\frac{u_1(\tau)}{\varepsilon}} h_1(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим функцию

$u_1(t)=-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2+a\,\mathrm{sh}\,t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}\,t_2+a\,\mathrm{ch}\,t_2)+\sqrt{1-a^2}$, в области $t\in H_{21}$, $-c\le\varepsilon-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2+a\,\mathrm{sh}\,t_2)+\sqrt{1-a^2}\le 0$ т. е. $-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2+a\,\mathrm{sh}\,t_2)+\sqrt{1-a^2}=O(\varepsilon)$.

Тогда

$$j_{33}(t,\varepsilon)\sim O(1)e^{i\frac{u_{12}(t)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha}^{t_2} e^{-i\frac{u_{12}(\tau_2)}{\varepsilon}} h_1(\tau_2)d\tau_2 =$$

$$=O(1)e^{i\frac{u_{12}(t)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha}^{-\alpha+\delta} e^{-i\frac{u_{12}(\tau_2)}{\varepsilon}} h_1(\tau_2)d\tau_2 +$$

$$+e^{c+i\frac{u_{12}(t)}{\varepsilon}} \int_{-\alpha+\delta}^{t_2} e^{-c-i\frac{u_{12}(\tau_2)}{\varepsilon}} h_1(\tau_2)d\tau_2.$$

Для первого интеграла применяем метод стационарной фазы, а второй интеграл интегрируем по частям. Получим оценку:

$$\left|j_{33}(t,\varepsilon)\right|=O(\sqrt{\varepsilon})(h_{10}+\sqrt{\varepsilon}h_{11}+O(\varepsilon))+O(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\left|J_3(t,\varepsilon)\right|=\begin{cases} O(\sqrt{\varepsilon}), \text{ при } h_1(0,-\alpha)\ne 0, \\ O(\varepsilon), \text{ при } h_1(0,-\alpha)=0. \end{cases}$$

Из лемм 1–6 вытекает доказательство теоремы 2.

Теорема 3. Для интеграла

$$\tilde{J}_3(t,\varepsilon)=e^{\frac{u_2(t)}{\varepsilon}} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{u_2(\tau)}{\varepsilon}} h_2(\tau)d\tau = e^{\frac{u_2(t)}{\varepsilon}} \int_{\tilde{L}} e^{-\frac{u_2(\tau)}{\varepsilon}} h_2(\tau)$$

в области D справедлива оценка

$$\left|\tilde{J}_3(t,\varepsilon)\right|\le c\tilde{\Omega}_{131}(t,\varepsilon),$$

где $u_1(t)=-\cos t_1(\mathrm{ch}\,t_2-a\,\mathrm{sh}\,t_2)+i\sin t_1(\mathrm{sh}\,t_2-a\,\mathrm{ch}\,t_2)+\cos t_0$, $\cos t_0=\sqrt{1-a^2}$, если $h_2(0,\alpha)\ne 0$, то

$$\tilde{\Omega}_{131}(t,\varepsilon)=\begin{cases} \varepsilon, \text{ при } t\in\tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in\tilde{H}_1, \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{при } t\in\tilde{H}_2. \end{cases}$$

Если $h_2(0,\alpha)=0$, то $\tilde{\Omega}_{131}(t,\varepsilon)=\varepsilon$, $0\le\gamma<1/2$, $\alpha=\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$, $\tilde{H}_0$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ симметричны относительно действительной оси областям H_0, H_1, H_2 соответственно. $D=\tilde{H}_0\cup\tilde{H}_1\cup\tilde{H}_2$.

При доказательстве теоремы 2 путь интегрирования $\tilde{L}$ берется симметрично L относительно действительной оси. Вычисляются точно такие же интегралы, которые были вычислены при доказательствах лемм 1–6.

Следовательно, при $h_1(0,-\alpha)\ne 0$, $h_2(0,\alpha)\ne 0$ имеем:

$$\left\| \int_{t_0}^{t} diag\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_1(s)ds, \int_{t_0}^{t}\lambda_2(s)ds \right) \begin{pmatrix} h_1(\tau) \\ h_2(\tau) \end{pmatrix} \right\| \le c\Omega_{132}(\varepsilon,t),$$

где

$$\Omega_{132}(\varepsilon,t)=$$

$$=\begin{cases} \varepsilon, \text{ при } t\in H_0\cap\tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{1-\gamma}, \text{ при } t\in H_1\cup\tilde{H}_1,\ t_1\le -t_0+(1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon, \\ \sqrt{\varepsilon}, \text{при } t\in H_2\cup\tilde{H}_2,\ 0\le\gamma<1/2 \end{cases}$$

а при $h_1(0,-\alpha)=0$ и $h_2(0,\alpha)=0$,

$$\left\| \int_{t_0}^{t} diag\left(\int_{t_0}^{t} \lambda_1(s)ds, \int_{t_0}^{t} \lambda_2(s)ds \right) \begin{pmatrix} h_1(\tau) \\ h_2(\tau) \end{pmatrix} \right\| \le c\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая теорему 1, для решения систем интегрального уравнения (7) имеем:

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le c\Omega_{132}(\varepsilon,t),$$

при выполнении условий

$$\mathbf{U}_1,\ h_1\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) \ne 0,\ h_2\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) \ne 0;$$

и $\|z(t,\varepsilon)\| \le c\varepsilon$ при выполнении условий

$$\mathbf{U}_1,\ h_1\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) = 0,\ h_2\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) = 0.$$

Отсюда мы получаем справедливость следующих теорем.

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$$\mathbf{U}_1,\ f\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) \ne 0,\ f\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) \ne 0.$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c\Omega_{133}(t,\varepsilon),$$

где

$$\Omega_{133}(t,\varepsilon) = \\ = \begin{cases} 1, \text{ при } t \in H_0 \cap \tilde{H}_0, \\ \varepsilon^{-\gamma}, \text{ при } t \in H_1 \cup \tilde{H}_1,\ t_1 \le -t_0 + (1/2-\gamma)\varepsilon\ln\varepsilon, \\ \varepsilon^{-1/2}, \text{при } t \in H_2 \cup \tilde{H}_2,\ 0 \le \gamma < 1/2. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия

$$\mathbf{U}_1,\ f\left(0,-\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) = 0,\ f\left(0,\ln\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) = 0.$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение и для него справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c.$$

Заключение

Из теорем 4, 5 следует, что асимптотическое поведение решения задачи (1), (2) существенно зависит от неоднородной части уравнения (1), т. е. от $f(t)$. Построен главный член асимптотики решения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с четырьмя периодическими точками поворота при нарушении условия асимптотической устойчивости. Полученная асимптотическая оценка для решения рассмотренной задачи является неулучшаемой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erneux T., Mandel P. Stationary, harmonic and pulsed operations of an optically bistable laser with saturable absorber. II // Phys. Rev. A. – 1984. – V. 30. – № 4. – P. 1902–1909.
2. Tsotsis T.T., Sane R.C. Lindstrom T.H. The bifurcation behavior of a catalytic reaction system due to a slowly-varying control parameter. I // AIChE. – 1987. – V. 34. – P. 383–388.
3. Семенов М.Е., Колупаева С.Н., Рожнов А.И. Математическое моделирование процессов пластической деформации ГЦК материалов в условиях изменяющейся скорости деформирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2011. – № 3. – С. 100–117.
4. Baer S.M., Erneux T., Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects and resonance // SIAM J. Appl. Math. – 1989. – V. 49. – № 1. – P. 55–71.
5. Su J. On delayed oscillation in nonspatially uniform Fitz Hugh Nagumo equation // J. deff. Equations. – 1994. – V. 110. – № 1. – P. 38–52.
6. Neishtadt A.I., Sidorenko V.V. Stability loss delay in a Ziegler system // J. App. MathsMechs. – 1997. – V. 61. – № 1. – P. 15–25.
7. Гришин А.М., Зеленский Е.Е. Апериодическая неустойчивость фронта верхового лесного пожара // Физика горения и взрывов. – 1998. – Т. 34. – № 5. – С. 23–28.
8. Щепакина Е.А. Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 8. – С. 113–117.
9. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.

Поступила 16.10.2013 г.

UDC 517.928

ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEM WITH PERIODIC TURNING POINTS IN COMPLEX PLANE

Dilmurat A. Tursunov,
Cand. Sc., Osh State University,
Kyrgyz Republic, 723500, Osh, Lenin street, 331. E-mail: d_osh@rambler.ru

When studying any dynamical system the critical values of its parameters are of special interest. Properties of stationary or quasi-stationary regimes change fundamentally, i.e. the bifurcation is observed. One type of bifurcation, when asymptotic stability condition is disturbed and limiting process is carried out, appears in the systems occurring in laser physics, chemical kinetics, plastic deformation, biophysics, in the modified Ziegler system, and when modeling the crown forest fire and safe combustion with maximum temperature. Using the stationary phase method the author has constructed the asymptotic for solving singularly perturbed ordinary differential equations with periodic turning points in the complex plane when the condition of asymptotic stability is disturbed. The obtained asymptotic estimation for solving the problem is not the improved one.

Key words:
Solution asymptotic, turning point, singularly perturbation, asymptotic stability, Stokes line, ordinary differential equation.

REFERENCES

1. Erneux T., Mandel P. Stationary, harmonic and pulsed operations of an optically bistable laser with saturable absorber. II. *Phys. Rev. A.*, 1984, vol. 30, no. 4, pp. 1902–1909.
2. Tsotsis T.T., Sane R.C. Lindstrom T.H. The bifurcation behavior of a catalytic reaction system due to a slowly-varying control parameter. I. *AIChE*, 1987, vol. 34, pp. 383–388.
3. Semenov M.E., Kolupaeva S.N., Rozhnov A.I. Matematicheskoe modelirovanie protsessov plasticheskoy deformatsii GCK materialov v usloviyakh izmenyayushcheysya skorosti deformirovaniya [Mathematical modeling of plastic deformation of GCK materials under varying strain rate]. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2011, no. 3, pp. 100–117.
4. Baer S.M., Erneux T., Rinzel J. The slow passage through a Hopf bifurcation: delay, memory effects and resonance. *SIAM J.Appl. Math.*, 1989, vol. 49, no. 1, pp. 55–71.
5. Su J. On delayed oscillation in nonspatially uniform Fitz Hugh Nagumo equation. *J. deff. Equations*, 1994, vol. 110, no. 1, pp. 38–52.
6. Neishtadt A.I., Sidorenko V.V. Stability loss delay in a Ziegler system. *J. App. MathsMechs.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 15–25.
7. Grishin A.M., Zelenskiy E.E. Aperiodicheskaya neustoychivost fronta verkhovogo lesnogo pozhara [Aperiodic instability in front crown forest fire]. *Physics of combustion and explosions*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 23–28.
8. Shchepakina E.A. Singulyarnye vozmushheniya v zadache modelirovaniya bezopasnykh rezhimov goreniya [Singular perturbations in the problem of safe combustion regimes]. *Mathematical modeling*, 2003, vol. 15, no. 8, pp. 113–117.
9. Ilin A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p.

УДК 514.757.2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ АФФИННОГО Q_m И ПРОЕКТИВНОГО P_n ПРОСТРАНСТВ ($m>n$)

Ивлев Евгений Тихонович,
канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: iet@tpu.ru

Аль-Хассани Мудхар Аббас,
преподаватель кафедры математики Университета Басры, Ирак;
аспирант кафедры высшей математики Физико-техническсго института ТПУ
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: mudhar73@mail.ru

Лучинин Анатолий Алексеевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью детального изучения дифференцируемых отображений многомерных пространств.

***Цель работы**. Изучить дифференцируемые отображения $V_{m,n}$ аффинного пространства Q_m на проективное пространство P_n ($m>n$). Рассмотрение отображений провести не только аналитическими методами, но и геометрически с помощью присоединенных геометрических образов.*

***Методы исследования**. Основным методом исследования является метод внешних форм Картана в локальной дифференциальной геометрии и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева. Эти методы предполагают локальное изучение рассматриваемых объектов и использование функций класса C^∞*

***Результаты**. Получены дифференциальные уравнения внутренних фундаментальных геометрических объектов первого и второго порядков дифференцируемых отображений пространства Q_m в многообразия вырожденных и невырожденных нуль-пар пространства P_n. Найдены аналитически и геометрически инвариантные геометрические образы, определяемые компонентами фундаментального объекта, с помощью которых решена задача об инвариантном определении отображения пространства Q_m в многообразия нуль-пар пространства P_n.*

Ключевые слова:
Дифференцируемое отображение, многомерные аффинные и проективные пространства.

1. Аналитический аппарат

1.1. Рассматривается m-мерное аффинное пространство Q_m и n-мерное эквипроективное пространство P_n, отнесенные к подвижному аффинному реперу Q и подвижному эквипроективному реперу P с соответствующими деривационными формулами и структурными уравнениями

$$Q_m : Q=\{\bar{B},\bar{\varepsilon}_a\},\quad d\bar{B}=\theta^a\bar{\varepsilon}_a\ ,\quad d\bar{\varepsilon}_a=\theta_a^b\bar{\varepsilon}_b\ ,$$
$$D\theta^a=\theta^b\wedge\theta_b^a\ ,\quad D\theta_a^b=\theta_a^c\wedge\theta_c^b\ .\quad (a,b,c=\overline{1,m});\ (1)$$

$$P_n : P=\{\bar{A}_I\},\quad d\bar{A}_I=\omega_I^J\bar{A}_J\ ,\quad D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J\ ,$$
$$\omega_K^K=0,\quad (I,J,K=\overline{0,n}).\qquad (2)$$

Предполагается, что между пространствами Q_m и P_n существует сюръективное дифференцируемое отображение

$$V_{m,n}:Q_m\to P_n,\ (m>n).$$

1.2. Дифференциальные уравнения этого отображения с учетом (1) и (2) запишутся в виде:

$$\omega_0^i=A_a^i\theta^a,\quad (i,j,k=\overline{1,n}).\qquad (3)$$

Двукратные продолжения [1–3] этой системы дифференциальных уравнений с учетом (1) и (2) приводят к дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют компоненты внутренних фундаментальных геометрических объектов [4, 5] $\Gamma_1=\{A_a^i\}$ (первого порядка) и $\Gamma_2=\{A_a^i, A_{ab}^i\}$ (второго порядка):

$$dA_a^i+A_a^j\Omega_j^i-A_b^i\theta_a^b=A_{ab}^i\theta^b\ ,$$
$$\Omega_j^i=\omega_j^i-\delta_j^i\omega_0^0\ ,\quad A_{[ab]}^i=0;$$
$$dA_{ab}^i+A_{ab}^j\Omega_j^i-A_{cb}^i\theta_a^c-A_{ac}^i\theta_b^c-$$
$$-(A_a^iA_b^j+A_b^iA_a^j)\omega_j^0=A_{abc}^i\theta^c\ ,$$
$$A_{[abc]}^i=0,\quad (a,b,c=\overline{1,m};\quad i,j,k=\overline{1,n}).\qquad (4)$$

1.3. Заметим в соответствии с [3], что геометрически отображение (3) каждое направление $u=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_a)n^a\in Q_m$ переводит в направление $x=(\bar{A}_0,\bar{A}_i)x^i$:$V_{m,n}u=x$, где

$$x^i=A_a^iu^a.\qquad (5)$$

Отсюда следует, что совокупность всех направлений $u\in Q_m$ в точке $B\in Q_m$, которые принадлежат ядру сюръективного отображения (3), поскольку $m>n$, образуют $(m-n)$-мерное подпространство $\Gamma_{m-n}\subset Q_m$, проходящее через точку B. Это подпространство определяется системой n линейных однородных уравнений с m неизвестными ($m>n$)

$$A^i_\alpha u^\alpha + A^i_{\hat\alpha} u^{\hat\alpha} = 0,$$
$$(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,n}\,;\ \hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma = \overline{n+1,m}). \qquad (6)$$

Проведем в точке $B\in Q_m$ такую канонизацию аффинного репера Q аффинного пространства Q_m, при которой

$$A^i_{\hat\alpha} = 0, \quad \det[\,A^i_\alpha\,] \neq 0. \qquad (7)$$

Из дифференциальных уравнений (3)–(5) с учетом (7) получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega^i_0 = A^i_\alpha \theta^\alpha, \quad dA^i_\alpha + A^j_\alpha \Omega^i_j - A^i_\beta \theta^\beta_\alpha = A^i_{\alpha a}\theta^a,$$
$$\theta^\alpha_{\hat\alpha} = B^\alpha_{\hat\alpha a}\theta^a,$$
$$dB^\alpha_{\hat\alpha a} + B^\beta_{\hat\alpha a}\theta^\alpha_\beta - B^\alpha_{\hat\beta a}\theta^{\hat\beta}_{\hat\alpha} - B^\alpha_{\hat\alpha\beta}\theta^b_a = B^\alpha_{\hat\alpha ab}\theta^b,$$
$$B^\alpha_{\hat\alpha a} = -A^i_{\hat\alpha a}B^\alpha_i, \quad B^\alpha_{\hat\alpha ab} = -A^i_{\hat\alpha ab}B^\alpha_i - A^i_{\hat\alpha a}\overset{*}{B}{}^\alpha_{ib}. \qquad (8)$$

Здесь в силу (7) величины B^α_i определяются по формулам

$$B^\alpha_i A^j_\alpha = \delta^j_i, \quad B^\alpha_i A^i_\beta = \delta^\alpha_\beta$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dB^\alpha_i + B^\beta_i\theta^\alpha_\beta - B^\alpha_j\Omega^j_i = \overset{*}{B}{}^\alpha_{ib}\theta^b, \quad \overset{*}{B}{}^\alpha_{ib} = -A^j_{\hat\beta}B^\alpha_j B^\beta_i.$$

В соответствии с [6] дифференциальные уравнения (8) свидетельствуют о существовании канонизации аффинного репера Q типа (7). Геометрически с учетом (6) эта канонизация означает, что

$$\Gamma_{m-n} = (\overline{B},\overline{\varepsilon}_{n+1},\ldots,\overline{\varepsilon}_m). \qquad (9)$$

В каждой точке $B\in Q_m$, при этом из рассмотрения исключается случай $\det[A_\alpha]=0$ $(i,\alpha=\overline{1,n})$, когда размерность ядра Γ_{m-n} отображения (3) больше $m-n$.

Замечание 1.1. Из (5) с учетом (6), (7) и (9) заключаем, что каждая $(n-m+1)$-плоскость

$$\Gamma_{n-m+1}(u) = (\Gamma_{n-m},\overline{\varepsilon}_\alpha)u^o \subset Q_m \qquad (9')$$

при отображении $V_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ переходит в направление

$$x = (\overline{A}_0,\overline{A}_i)x^i \in P_n, \quad x^i = A^i_\alpha u^\alpha. \qquad (9'')$$

2. Поле гиперконусов $K^{m-n}_{n-1}\subset P_n$ класса $m-n$

2.1. В соответствии с [7] из (1), (8) и (9) замечаем, что в аффинном пространстве Q_m определено распределение

$$\Delta_{m,m-n}: B \to \Gamma_{m-n} \qquad (10)$$

интегральные кривые которого, описываемые точкой $B\in Q_m$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\theta^\alpha = 0. \qquad (11)$$

Поскольку в силу (4) и (8) величины $B^\alpha_{\hat\alpha\hat\beta}$ симметричны по нижним индексам, т. е.

$$B^\alpha_{[\hat\alpha\hat\beta]} = 0,$$

то с учетом (11) заключаем, что распределение (10) является голономным или инволютивным в смысле [7] (см. также [8]).

2.2. Точке $B\in Q_m$ сопоставим в пространстве P_n гиперплоскость $L_{n-1}\subset A_0$, определяемую в терминах проективного репера P уравнением

$$L_{n-1}(x) \Leftrightarrow x_i x^i = 0. \qquad (12)$$

Воспользуемся далее условиями инвариантности геометрических образов аффинного пространства и учтём (1), (7)–(12). Тогда получаем, что совокупность всех направлений, касательных к интегральным кривым распределения $\Delta_{m,n-1}$ в точке $B\in Q_m$, вдоль которых Γ_{m-n} и бесконечно близкая к ней первого порядка Γ'_{m-n} при отображении $V_{m,n}$ принадлежат гиперплоскости $L_{n-1}\subset P_n$, образует $(m-n-1)$-мерный конус $Q^2_{m-n-1}(x)\subset\Gamma_{m-n}$ второго порядка с вершиной B. Этот конус в терминах аффинного репера Q определяется уравнениями:

$$Q^2_{m-n-1}(x) \Leftrightarrow x_i A^i_{\hat\alpha\hat\beta}u^{\hat\alpha}u^{\hat\beta} = 0, \quad u^\alpha = 0,$$
$$(\alpha = \overline{1,n};\ \hat\alpha,\hat\beta = \overline{n+1,m}). \qquad (13)$$

Таким образом, каждой гиперплоскости $L_{n-1}\subset P_n$, соответствующей точке $B\in Q_m$, в $(m-n)$-плоскости $\Gamma_{m-n}\subset Q_m$ отвечает конус $Q^2_{m-n-1}(x)$. Рассмотрим множество $\{L_{n-1}(x)\}$ всех гиперплоскостей $L_{n-1}(x)\subset P_n$, которым отвечают в Γ_{m-n} вырожденные конусы $Q^2_{m-n-1}(x)$, т. е. конусы по крайней мере с прямолинейными вершинами, проходящими через точку A_0. Из (13) следует, что множество $\{L_{n-1}(x)\}$ определяется уравнением:

$$\det[\,x_i A^i_{\hat\alpha\hat\beta}\,] = 0. \qquad (14)$$

Отсюда следует, что множество $\{L_{n-1}(x)\}$ указанного типа в точке $B\in Q_m$ является гиперконусом $K^{m-n}_{n-1}\subset P_n$ класса $m-n$ с вершиной $A_0\in P_n$, который в тангенциальных координатах проективного репера P определяется уравнением:

$$\Psi^{i_1 i_2\ldots i_{m-n}}\, x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{m-n}} = 0. \qquad (15)$$

Здесь симметрические величины $\Psi^{i_1 i_2\ldots i_{m-n}}$ определяются по формулам

$$\Psi^{i_1 i_2\ldots i_{m-n}} = \frac{1}{(m-n)!}A^{(i_1}_{m-n+1,[m-n+1}A^{i_2}_{|m-n+2|m-n+2}\ldots A^{i_{m-n})}_{|m|m]}. \qquad (16)$$

Причем как обычно символы () и [] означают симметрирование и альтернирование по соответствующим индексам. Заметим, что каждой гиперплоскости $L_{n-1}(x)\in K^{m-n}_{n-1}\subset P_n$ в $(m-n)$-плоскости $\Gamma_{m-n}\supset Q_m$ отвечает прямая, проходящая через точку $B\in Q_m$ и являющаяся вершиной K^{m-n}_{n-1}, которая определяется с учетом (13) системой линейных однородных уравнений

$$x_i A^i_{\hat\alpha\hat\beta}u^{\hat\alpha} = 0, \ (x_i \text{ фиксированы}),$$

с условием (14).

Из дифференциальных уравнений (5) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $\Psi^{i_1 i_2\ldots i_{m-n}}$:

$$d\Psi^{i_1 i_2\ldots i_{m-n}} + \Psi^{i i_2\ldots i_{m-n}}\Omega^{i_1}_i + \ldots +$$
$$+\Psi^{i_1 i_2\ldots i\, i_{m-n}}\Omega^{i}_{i_{m-n-1}} + \Psi^{i_1 i_2\ldots i_{m-n-1} i}\Omega^{j}_{i_{m-n}} = \Psi^{j i_2\ldots i_{m-n}}_a\theta^a,$$
$$(i_1,i_2,\ldots,i_{m-n}, i = \overline{1,n}). \qquad (17)$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^a, для нас несущественный.

Замечание 2.1. По аналогии с [1, (38)] и [9] и с учетом (16) будем считать, что числа m и n удовлетворяют неравенствам, при которых определяется гиперконус (15):

$$m-n>2\,,\; n\le\frac{(m-n)(m-n+3)}{2}. \qquad (18)$$

3. Инвариантная линейная n-сеть пространства P_n

3.1. Каждой точке $B\in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставим n линейно независимых направлений в точке $A_0\in P_n$:

$$x_i=(\bar{A}_0,\bar{A}_j)x_i^j\;;\quad \det[x_i^j]\ne 0\,,\quad (i,j=\overline{1,n}). \qquad (19)$$

По аналогии с пунктом 2 система $\Psi(x)$ направлений (19) называется основной относительно гиперконуса $K_{n-1}^{m-n}\subset P_n$, отвечающего точке $B\in Q_m$, если каждое направление $x_i\in\Psi(x)$ является линейным полюсом (полюсом порядка $n-1$) [9] соответствующей гиперплоскости G_{in-1} ($i\ne j$), проходящей через все остальные направления этой системы. Из (15) и (16) по аналогии с [1] заключаем, что система $\Psi(x)$ будет основной относительно гиперконуса $K_{n-1}^{m-n}\subset P_n$ в точке $B\in Q_m$ ($m>n$) тогда и только тогда, когда n^2 величин x_i^j удовлетворяют следующей системе $n(n-1)$ алгебраических уравнений

$$\Psi^{i_1i_2\ldots i_{m-n}}\,x_{i_1}^{j}x_{i_2}^{j}\ldots x_{i_{m-n-1}}^{j}\,x_{i_{m-n}}^{k}=0,$$
$$(i_1,\ldots,i_{m-n},j,k=\overline{1,n}\,;\; j\ne k). \qquad (20)$$

Как и в случае [9], показывается, что в общем случае система (20) имеет конечное число решений относительно x_i^j.

3.2. Проведем в пространстве P_n такую канонизацию проективного репера P, при которой

$$\Psi^{\overbrace{i\ldots ij}^{n-1}}\begin{cases}=0, & i\ne j\\ \ne 0, & i=j\end{cases},$$

$$\Lambda\Psi=$$

$$=\det\begin{bmatrix}\Psi_1 & \Psi^1_{12} & \Psi^1_{13} & \ldots & \Psi^1_{1\,n-1} & \Psi^1_{1\,n}\\ \Psi^2_{21} & \Psi_2 & \Psi^2_{23} & \ldots & \Psi^2_{2\,n-1} & \Psi^2_{2\,n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Psi^n_{n\,1} & \Psi^n_{n\,2} & \Psi^n_{n\,3} & \ldots & \Psi^n_{n\,n-1} & \Psi_n\end{bmatrix}\ne 0. \qquad (21)$$

Здесь $\Psi_i=[\Psi^{\overbrace{i\ldots i\,jk}^{m-n-2}}]$ ($i\ne j,k$; i фиксировано), а матрица $\Psi^k_{ij}=[A^{\overbrace{i\ldots i}^{n}}]$ состоит из одного ненулевого элемента, принадлежащего строке с номером j и столбцу с номером k ($i,j,k=\overline{1,n}$).

Из (20) и (19) следует, что в каждой точке $B\in Q_m$ канонизация проективного репера P типа (21) означает, что каждая прямая

$$L_1^j=(\bar{A}_0,\bar{A}_i) \qquad (22)$$

является основной прямой, т. е. принадлежит основной системе $\Psi(x)$ направлений относительно гиперконуса $K_{n-1}^{m-n}\subset P_n$. При этом из рассмотрения исключается случай $\Psi=0$, когда основная система $\Psi(x)$ содержит бесчисленное множество основных направлений относительно K_{n-1}^{m-n}.

Из (16), (17) и (21) получаются с учетом (2) в каждой точке $B\in Q_m$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\omega_i^j=A_{ia}^j\theta^a\,,\; dA_{ia}^j+A_{ia}^k\omega_k^i-A_{ka}^j\omega_i^k-A_{ib}^j\theta_a^b=A_{iab}^j\theta^b\,,$$
$$(i,j,k=\overline{1,n}\,;\, a,b=\overline{1,m}\,;\, i\ne j\ne k). \qquad (23)$$

Здесь явный вид величин A_{iab}^j ($i\ne j$) для нас несущественный. Заметим в соответствии с [6] и с учетом (23), что канонизация проективного репера типа (21) существует в общем случае в каждой точке $B\in Q_m$.

3.3. В соответствии с [10] с учетом (22) заключаем, что в проективном пространстве P_n в каждой точке $B\in Q_m$ определена инвариантным образом линейная n-сеть из прямых L_1^j, проходящих через соответствующую при отображении $V_{m,n}$: $Q_m\to P_n$ точку $A_0\in P_n$.

Каждой точке $B\in Q_m$ в проективном пространстве P_n сопоставим основную прямую L_1^i и соответствующую ей гиперплоскость L_{n-1}^i, проходящую через все остальные основные прямые L_1^j:

$$L_1^i=(\bar{A}_0,\bar{A}_i)\,,\quad L_{n-1}^i=(\bar{A}_0,\bar{A}_1,\ldots,\bar{A}_{i-1},\bar{A}_{i+1},\ldots,\bar{A}_n). \qquad (24)$$

В точке $B\in Q_m$ проведем такую канонизацию аффинного репера Q в пространстве Q_m, при которой

$$A_\alpha^i\begin{cases}=0, & i\ne\alpha\\ \ne 0, & i=\alpha\end{cases};\quad A_1^1\ne A_2^2\ne\ldots\ne A_n^n\ne 0. \qquad (25)$$

Из дифференциальных уравнений (8) в точке $B\in Q_m$ получаются с учетом (23) и (1) дифференциальные уравнения

$$\omega_0^i=A_i^i\theta^i\,,\quad \theta_\alpha^\beta=B_{\alpha a}^\beta\theta^a\,,$$
$$dB_\alpha^\beta-B_\alpha^\gamma\theta_\gamma^\alpha+B_\gamma^\alpha\theta_\beta^\gamma-B_b^\alpha\theta_a^b=B_{\alpha a}^\beta\theta^a\,,$$
$$(i=\overline{1,n},\;\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n},\;a,b=\overline{1,m};\;\alpha\ne\beta,$$
$$\text{по } i \text{ не суммировать}). \qquad (26)$$

Здесь явный вид величин $B_{\alpha a}^\beta$ ($\alpha\ne\beta$) для нас несущественный. Дифференциальные уравнения (26) в соответствии с [9] свидетельствуют о существовании канонизации репера Q типа (26). Геометрически с учетом (24), (8), (9') и (9") эта канонизация означает, что каждая ($n-m+1$)-плоскость

$$\Gamma_{m-n+1}^\alpha=(\Gamma_{m-n},\bar{\varepsilon}_\alpha)\,,\quad (б=\overline{1,n}) \qquad (27)$$

является прообразом соответствующей прямой $L_1^\alpha=(\bar{A}_0,\bar{A}_\alpha)$ ($\alpha=\overline{1,n}$) пространства при отображении $V_{m,n}$: $Q_m\to P_n$. Поэтому гиперплоскость

$$\Gamma_{m-1}^\alpha=(\bar{B},\bar{\varepsilon}_1,\ldots,\bar{\varepsilon}_{\alpha-1},\bar{\varepsilon}_{\alpha+1},\ldots,\bar{\varepsilon}_n,\bar{\varepsilon}_{n+1},\ldots,\bar{\varepsilon}_m)\subset Q_m\,, \qquad (28)$$

в силу (24) проходящая через Γ_{m-n}, является прообразом соответствующей гиперплоскости $L_{n-1}^\alpha\subset P_n$ при отображении $V_{m,n}$. Заметим, что $\Gamma_{m-n+1}^\alpha\not\subset\Gamma_{m-1}^\alpha$.

В соответствии с [7] и с учетом (28) заключаем, что в аффинном пространстве Q_m определено гиперраспределение

$$\Delta_{m,m-1}^\alpha: B\to\Gamma_{m-1}^\alpha,\ (\alpha \text{ фиксировано}). \qquad (29)$$

Из (1) и (2) с учетом (27) и (25) заключаем, что интегральные кривые распределения (29) определяются дифференциальным уравнениям:

$$\hat{\theta^{\alpha}} = \theta^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \omega_0^i = 0, \quad (\alpha = i \text{ фиксировано}). \qquad (30)$$

Точке $B \in Q_m$ на прямой $L_1^i = (\bar{A}_0, \bar{A}_i)$ сопоставим при каждом фиксированном $i = \alpha$ точку

$$\bar{Y}_i = \bar{A}_0 + t_i \bar{A}_i, \ (i = \alpha \text{ фиксировано}). \qquad (31)$$

Из (30) с учетом (23), (24), (29), (31), (1) и (2) заключаем, что каждая точка Y_i является фокусом прямой A_0Y_i в смысле [11] вдоль фокальных интегральных кривых соответствующего распределения $\Delta_{m,m-1}$ (при $\alpha = i$) тогда и только тогда, когда

$$(A_{\tilde{a}}^{\tilde{j}} + t_i A_{i\tilde{a}}^{\tilde{j}})\theta^{\tilde{a}} = 0, \quad (\tilde{j}, \tilde{a} \neq i \ ; \tilde{j}, \tilde{a}, i = \overline{1,n}). \qquad (32)$$

Эта система имеет нетривиальные решения относительно $\theta^{\tilde{a}}$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном i имеем:

$$\det[A_{\tilde{a}}^{\tilde{j}} + t_i A_{i\tilde{a}}^{\tilde{j}}] = 0. \qquad (33)$$

Отсюда следует, что на прямой A_0Y_i имеется в общем случае $(n-1)$ фокусов Y_i с соответствующими фокальными направлениями, определяемыми в силу (33) из системы (32). Заметим с учетом (33) в соответствии с [10], что точка

$$G_i = A_{\tilde{j}}^{\tilde{j}} \bar{A}_0 - A_{i\tilde{j}}^{\tilde{j}} \bar{A}_i \ , \ (i, \tilde{j} = \overline{1,n}; i \neq \tilde{j}, \text{ по } \tilde{j} \text{ суммировать})$$

является гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокусов Y_j $(j \neq i)$ соответствующей прямой A_0A_i. Из (33) следует, что каждой точке $B \in Q_m$ в пространстве P_n отвечает гиперплоскость $\mathrm{Ln}-1 \ni G_i$, определяемая уравнением:

$$L_{n-1} \Leftrightarrow x^0 + g_i x^i = 0, \ g_i = A_{i\tilde{j}}^{\tilde{j}} (A_{\tilde{j}}^{\tilde{j}})^{-1},$$

$$(i, \tilde{j} = \overline{1,n}; i \neq \tilde{j}, \text{ по } \tilde{j} \text{ суммировать}). \qquad (34)$$

Заметим, что в общем случае $A_0 \notin L_{n-1}$.

3.4. Таким образом, с учетом (3), (18), (24) и (35) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. С отображением $V_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ при m и n, удовлетворяющих неравенствам

$$m > n, m - n > 2, n \leq \frac{(m-n)(m-n+1)}{2},$$

инвариантным образом ассоциируются отображения

$$f_{m,i}^{2n-1}: Q_m \to M_i^{2n-1} = \{A_0; L_{n-1}^i\}, \quad A_0 \in L_{n-1}^i,$$

$$f_m^{2n}: Q_m \to M^{2n} = \{A_0; L_{n-1}\}, \quad A_0 \notin L_{n-1}.$$

Здесь M_i^{2n-1} – многообразия вырожденных нуль-пар, а M^{2n} – многообразие невырожденных нуль-пар.

Заключение

В соответствии с [1] и теоремой 3.1 замечаем, что фактически изучение отображения $V_{m,n}$: $Q_m \to P_n$ сводится к изучению отображения

$$f_{m,i}^{2n-1}: Q_m \to M_i^{2n-1} = \{A_0; L_{n-1}^i\}, \quad A_0 \in L_{n-1}^i,$$

$$f_m^{2n}: Q_m \to \mathrm{M}^{2n} = \{A_0; L_{n-1}\}, \quad A_0 \notin L_{n-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Аль-Хассани М.А., Лучинин А.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_m и проективного P_n пространства $(m<n)$ // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 16–20.
2. Аль-Хассани М.А., Молдованова Е.А. Дифференцируемое отображение аффинного Q_n и проективного P_n пространства // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 28–32.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ,1948. – 432 с.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
5. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды Геометрического Семинара. Т. 6. – М.: ВИНИТИ АНСССР, 1974. – С. 37–42.
6. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
7. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. – 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
8. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения аффинных и евклидовых пространств // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 8–14.
9. Ивлев Е.Т. О многообразии E (L, L_m, L_{m+1}) в n-мерном проективном пространстве $P_n(m>2)$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
10. Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Институт научн. информации АН СССР. Итоги науки. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1963. – С. 139–164.
11. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.

Поступила 08.05.2013 г.

UDC 514.757.2

DIFFERENTIABLE MAPPING OF AFFINE Q_m AND PROJECTIVE P_n SPACES ($m>n$)

Evgeniy T. Ivlev,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: iet@tpu.ru

Mudhar Abbas Al-Khassani,
University of Basrah, Iraq; Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: mughar73@yahoo.com

Anatoliy A. Luchinin,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: luchinin@tpu.ru

The urgency of work is caused by necessity of detailed studying of differentiable mappings of multivariate space.
The main aim of the research *is to study differentiable mappings of $V_{m,n}$ of affine space Q_m to projective space P_n ($m>n$); to consider mapping not only by analytical methods but also geometrically with the help of the attached geometrical images.*
Methods of research. *The basic method of research is the method of external forms Cartan in local differential geometry and G.F. Lapteva's theoretical-group method. These methods assume local studying of the considered objects and use of functions of a class C^∞.*
Results*. The authors have obtained the differential equations of internal fundamental geometrical objects of the first and the second orders of differentiable mappings of space Q_m in manifolds singular and nonsingular null-pairs space P_n. The invariant geometrical images were found analytically and geometrically. The images were determined by the fundamental object components which helped in solving the problem of invariant determining the Q_m space mapping in manifolds of null-pairs of P_n space.*

Key words:
Differentiable mapping, multidimensional affine and projective spaces.

REFERENCES

1. Ivlev E.T., Al-Khassani M.A., Luchinin A.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv ($m<n$) [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces ($m<n$)]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 16–20.
2. Al-Khassani M.A., Moldovanova E.A. Differentsiruemoe otobrazhenie affinnogo Q_m i proektivnogo P_n prostranstv [Differentiable mapping of affine Q_m and projective P_n spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 28–32.
3. Finikov C.P. *Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometrii* [Method of Cartan's external forms in differential geometry]. Moscow, GITTL, 1948. 432 p.
4. Laptev G.F. Differentsialnaya geometriay pogruzhennykh mnogoobraziy [Differential geometry of the immersed manifolds]. *Trudy moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Proc. of the Moscow mathematical society]. Moscow, GITTL, 1953, no. 2, pp. 275–382.
5. Laptev G.F. K invariantnoy teorii differentsialnykh otobrazheniy [To the invariant theory of differentiable mappings]. *Trudy geometricheskogo seminara* [Proc. of a geometrical seminar]. Moscow, Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR, 1974. Vol. 6, pp. 37–42.
6. Evtushik L.E., Lumiste Yu.G., Ostianu N.M., Shirokov A.P. Differentsialno-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh [Differential-geometrical structure on manifolds]. *Results of a science and engineering. Series: Problems of geometry*, 1979, vol. 9, pp. 3–246.
7. Ivlev E.T., Luchinin A.A. Otobrazhenie affinnykh i evklidovykh prostranstv [Mapping affine and Euclidean spaces]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2010, vol. 317, no. 2, pp. 8–14.
8. Ivlev E.T. O mnogoobrazii E (L, L_m, L_{m+1}) v n-mernom proektivnom prostranstve P_n [On manifold in n-dimensional projective space P_n ($m>2$)]. *Siberian mathematical magazine*, 1967, vol. 8, no. 6, pp. 1307–1320.
9. Ostianu N.M. O kanonizatsii podvizhnogo repera pogruzhennogo mnogoobraziya [On canonization of a mobile reference point of the immersed manifold]. *Rev. math. pures et appl. (RNR)*, 1962, no. 2, pp. 231–240.
10. Bazylev V.T. O mnogomernykh setyakh i ikh preobrazovaniyakh [On multivariate networks and their transformation]. *Institut nauchnoy informatsii AN SSSR. Itogi nauki* [Institute of the Scientific Information an Academy of Sciences of the USSR. Science results]. Moscow, 1963. pp. 139–164.
11. Akivis M.A. Fokalnye obrazy poverkhnosti ranga r [Focal images of surface of a rank r]. *Bulletin of high schools. Mathematics*, 1957, no. 1, pp. 9–19.

УДК 621.81:625.08:62–192

ФОРМИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО КОМПЛЕКСА ТЕКУЩЕГО РЕМОНТА КОРОБКИ ПЕРЕДАЧ ОДНОКОВШОВЫХ ФРОНТАЛЬНЫХ ПОГРУЗЧИКОВ

Жандарбекова Асель Мергазиновна,
канд. техн. наук, доцент кафедры транспорта и логистики факультета машиностроения и транспорта Восточно-Казахстанского государственного технического университета им Д. Серикбаева, Республика Казахстан, 070004, г. Усть-Каменогорск, ул. Протозанова А.К., д. 69.
E-mail: AZhandarbekova@bk.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью поддержания требуемого уровня надежности дорожно-строительных машин, работающих в реальных (тяжелых) условиях, при оптимальном уровне затрат на текущий ремонт агрегатов.
Цель работы: *обоснование формирования рационального комплекса работ текущего ремонта агрегатов серийно выпускаемой дорожно-строительной машины путем моделирования на ЭВМ уровня их надежности с учетом затрат на приобретение машины и ее эксплуатацию.*
Методы исследования: *в ходе выполнения исследований использованы современные методы обеспечения надежности технических систем, теории восстановления работоспособности ремонтируемых изделий и компьютерное моделирование. Способом сокращения затрат на поддержание работоспособности агрегатов машин в реальных условиях эксплуатации выбрано повышение безотказности деталей и узлов, лимитирующих их надежность.*
Результаты: *предложена усовершенствованная последовательность моделирования уровня надежности агрегатов машин, состоящая из шести этапов. Она апробирована на примере коробки передач модели SB 165–2 одноковшовых фронтальных погрузчиков моделей L-34B и 534C. Разработана математическая модель, программы расчетов на ЭВМ, позволяющие оценить влияние качества изготовления деталей и узлов машин на выходные показатели надежности рассматриваемого агрегата и решить на практике задачи формирования рационального комплекса текущего ремонта агрегата машины. Показано, что при использовании оптимальных разновидностей текущего ремонта коробки передач модели SB 165–2 одноковшовых фронтальных погрузчиков возможно снижение минимальных суммарных удельных затрат $C_{уд_{min}}$ на поддержание надежности рассматриваемого агрегата до 15,1 %.*

Ключевые слова:
Эксплуатационная надежность, текущий ремонт, моделирование, гидромеханическая трансмиссия, коробка передач.

В процессе развития горно-металлургической отрасли в Восточно-Казахстанской области большое внимание уделяется разработке месторождений, строительству карьерных дорог. Реализация этих мероприятий требует повышения эффективности эксплуатации дорожно-строительных машин (ДСМ). Важным и специфическим показателем эффективности имеющейся и поступающей дорожно-строительной техники в регион Восточного Казахстана является конкурентоспособность, которая определяется совокупностью потребительских свойств, в частности возможностью эксплуатации в суровых климатических условиях.

Одноковшовые фронтальные погрузчики используются во многих климатических зонах Республики Казахстан, причем особенно эффективно в многоотраслевых хозяйствах, в которых годовой цикл работ включает большое число чередующихся производственных процессов и продолжительных погрузочно-разгрузочных работ в технологических циклах большой напряженности [1]. Отказы одноковшовых фронтальных погрузчиков в эксплуатации приводят к простою не только самой машины, но и комплекса совместно работающих машин и оборудования. Решение задач по сокращению отказов одноковшовых фронтальных погрузчиков и их простоев в ремонте связано с обеспечением и поддержанием надежности их часто отказывающих агрегатов и узлов.

Многолетними исследованиями сотрудников Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева установлено, что в практике эксплуатации одноковшовых фронтальных погрузчиков проводится большой объем текущих ремонтов агрегатов. При этом в случае отказа отдельных деталей групповая замена узлов с учетом показателей надежности не всегда обоснована.

Практика использования одноковшовых фронтальных погрузчиков моделей L-34B и 534C в условиях Восточного Казахстана показывает, что эффективность их применения в значительной степени зависит от их эксплуатационных свойств, которые, в свою очередь, определяются надежностью и конструктивно-технологическими особенностями его гидромеханической трансмиссии (ГМТ). На основе эксплуатационных испытаний погрузчиков моделей L-34B и 534C установлено, что ГМТ обладает сравнительно низкой надежностью, в которой наименее надежным агрегатом является коробка передач (КП) модели SB 165–2 [1–3].

Поэтому исследования, направленные на сокращение затрат по поддержанию работоспособности КП одноковшовых фронтальных погрузчиков моделей L-34B и 534C, обеспечивающих минимизацию затрат и сокращение простоев машин в эксплуатации, имеют огромную практическую значимость для обоснования приобретения и повыше-

ния конкурентоспособности погрузчиков данных моделей.

Научно обоснованный подход к формированию рационального комплекса работ текущего ремонта КП модели SB 165–2 путем моделирования уровня их надежности на ЭВМ позволяет существенно сократить число ремонтов агрегата, а также эксплуатационные затраты. Используя методы обеспечения надежности технических систем, результаты современной теории вероятностей, математической статистики и компьютерного моделирования [4–6], можно разработать рекомендации по снижению объемов текущего ремонта машин в эксплуатации при минимальных затратах и простоях.

Одним из способов сокращения затрат на поддержание работоспособности агрегатов одноковшовых фронтальных погрузчиков в эксплуатации является повышение безотказности деталей и узлов, лимитирующих их надежность. Это дает возможность повысить надежность отдельных элементов, но не решает проблему недостаточной надежности агрегата в целом. С этих позиций следует оптимизировать работы текущего ремонта КП модели SB 165–2 с учетом характеристик надежности его деталей и узлов.

Формирование рационального комплекса текущего ремонта заключается в обеспечении высокого уровня надежности коробки передач модели SB 165–2 ГМТ путем выявления таких значений показателей надежности элементов данного агрегата, которые позволяют объединить их в легко заменяемые блоки и модули, состоящие из деталей равной (близкой) долговечности. При этом удается сократить общее количество отказов агрегата и повысить его безотказность. Разработка научно обоснованных рекомендаций по обеспечению равной (близкой) долговечности деталей позволит осуществить замену групп деталей, выполненных в виде конструктивно-технологического блока, с минимальным значением их неиспользованного остаточного ресурса. Это возможно при дальнейшем развитии математического аппарата теории восстановления работоспособности технических систем.

В ходе данного исследования с целью повышения эксплуатационной надежности КП модели SB 165–2 погрузчиков L-34B и 534C рассмотрен комплекс работ текущего ремонта ее узлов. В качестве критерия его оптимизации принято условие снижения затрат на поддержание работоспособности агрегата. Поэтому при формировании рационального комплекса текущего ремонта КП учитывались не только конструктивные и технологические особенности агрегата [7, 8], но и условия организации технического содержания погрузчиков L-34B и 534C на предприятиях.

Математический аппарат теории восстановления [9–12] позволяет просчитать характеристики процессов восстановления и оценить надежность технической системы. При этом использованы такие характеристики процессов восстановления, как функция $\Omega(t)$ и параметр потока отказов $\omega(t)$. Следует отметить, что показатели надежности механической системы, на которых базируются расчеты, оценены в реальных условиях эксплуатации подконтрольной группы погрузчиков L-34B и 534C в количестве 20 единиц. Кроме того, с использованием моделирования на ЭВМ показателей надежности узлов машин удалось оптимизировать показатели долговечности и безотказности наиболее часто отказывающих деталей.

В ходе исследования разработана математическая модель, программы расчетов, которые позволили имитировать влияние повышения качества изготовления деталей и узлов на выходные показатели надежности рассматриваемого агрегата (суммарные минимальные удельные затраты $C_{\text{уд}\min}$, уровень надежности n, оптимальный ресурс $t_{\text{опт}}$, наработка до первого отказа $T_{\text{до}}$). Для оценки характера изменения качества изготовления использован коэффициент рассеивания ресурса детали (группы деталей) $k_{\text{рр}}$. При этом целевая функция математической модели оптимизации комплекса работ текущих ремонтов имеет вид:

$$\begin{cases} C_{\text{пн}}(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_i} C_{\text{отк}_i}\Omega_i(t) \to \min, \\ \beta_{\text{с}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{N_i} C_i\beta_{\text{р}_i}}{\sum\limits_{i=1}^{N_i} C_i} \to 1, \\ \beta_{\text{р}_i} = \dfrac{t_{\text{сргр}}}{t_{\text{ср}_i}} \to 1, i = \overline{1, M}, \end{cases}$$

где $C_{\text{пн}}(t)$ – затраты на поддержание надежности за наработку t i-й системы; $C_{\text{отк}}$ – стоимость устранения отказа i-й системы; $\Omega(t)$ – ведущая функция потока отказов i-й системы; $\beta_{\text{р}_i}$ – коэффициент использования ресурса i-й системы; $t_{\text{ср}_{\text{гр}}}$, $t_{\text{ср}_i}$ – средняя наработка до отказа группы деталей и i-й детали; $\beta_{\text{с}}$ – стоимостной коэффициент; C_i – стоимость i-й системы.

При рассмотрении целевой функции математической модели, описывающей характеристику комплекса работ текущих ремонтов машин, оптимизация ведется по суммарным затратам на приобретение машин и поддержание их надежности в эксплуатации. В качестве ограничений в математической модели применены: коэффициент использования ресурса ($\beta_{\text{р}_i}$) и коэффициент стоимостного использования ресурса ($\beta_{\text{с}}$). Естественно, при моделировании на ЭВМ уровня надежности можно добиться повышения указанных коэффициентов до 1,0.

Оптимизация выходных показателей надежности агрегата сводится к определению на основе моделирования на ЭВМ значений параметров наименее надежной, ненадежной и недостаточно надежной групп деталей, позволяющих прежде всего снизить суммарные удельные затраты на изготовление машины (агрегата) и поддержание ее на-

дежности. При этом в основу положено сокращение затрат при эксплуатации путем оптимизации комплекса работ текущего ремонта КП модели SB 165–2 на основе выявления оптимальных разновидностей текущего ремонта (РТР).

Показано, что при использовании оптимальных разновидностей текущего ремонта КП модели SB 165–2 возможно снижение минимальных суммарных удельных затрат $C_{уд_{min}}$ по первой группе деталей на 13,44 %, по второй – на 15,1 %, а по третьей – на 13,86 % (табл. 1, 2).

Формирование рационального комплекса текущего ремонта коробки передач ГМТ одноковшовых фронтальных погрузчиков с учетом конструктивно-технологических факторов предполагает выполнение шести этапов исследования.

На первом этапе путем технологической проработки предложено последовательно провести анализ и расчет характеристик надежности КП модели SB 165–2. При этом расчеты базируются на исходных данных, включающих характеристики распределений ресурсов деталей, выявляемых на основе эксплуатационных испытаний машин на надежность, их стоимость, а также удельные затраты, связанные с устранением отказов.

На втором этапе производится объединение деталей, лимитирующих надежность КП, по конструктивно-технологическому признаку. В задачи данного этапа входит выявление элементов, лимитирующих надежность агрегата на основе результатов эксплуатационных испытаний одноковшовых фронтальных погрузчиков, составление карты надежности и технологической схемы его разборки–сборки, в которую следует включать только детали, лимитирующие надежность агрегата.

Третий этап предполагает группирование деталей внутри конструктивно-технологической зоны общей совокупности по признаку равной долговечности. При этом производится анализ долговечности деталей внутри выделенной совокупности совместно разбираемых деталей в общей конструктивно-технологической зоне. Среди них выделяются: детали, имеющие ресурс менее половины ресурса узла (наименее надежные); детали, ресурс которых сопоставим либо значительно выше ресурса узла (ненадежные); детали, имеющие ресурс выше половины ресурса узла (недостаточно надежные).

На четвертом этапе определяется стратегия замен деталей по каждой РТР и расчет распределения наработок группы деталей совместных замен в общей конструктивно-технологической зоне, если групповая замена признана нецелесообразной. При этом производится расчет композиций распределений вторых, третьих и т. д. замен группы элементов совместной замены на основе аналитических зависимостей расчета вероятностей и плотностей композиции распределения наработок до очередного отказа. Определяется ведущая функции Wпотока отказов деталей и групп деталей совместных замен в общей конструктивно-технологической зоне и степень использования их ресурсов.

На пятом этапе производится моделирование и выравнивание ресурсов деталей сопоставимой долговечности в конструктивно-технологических группах по стоимостному признаку. В задачу данного этапа входит моделирование повышения ресурсов и сокращения их рассеивания относительно дешевых деталей внутри каждой группы конструктивно-технологической зоны с целью формирования группы с максимальным использованием ресурсов и стоимости деталей. Результаты компьютерного моделирования, полученные на данном этапе, являются исходными данными для разработки рекомендаций по усовершенствованию узла (агрегата) с позиций повышения технологичности изготовления его деталей. При этом моделирование повышения надежности групп деталей путем изменения долговечности часто отказывающих деталей позволяет добиться выравнивания долговечности деталей, тяготеющих к единой группе совместных замен.

Шестой этап предполагает оптимизацию систем замен деталей и РТР с целью минимизации количества ремонтов агрегата ДСМ. На данном этапе производится моделирование на ЭВМ групп деталей совместных замен с учетом обеспечения кратности ресурсов групп деталей КП в общей конструктивно-технологической зоне. Подобный подход обусловлен стремлением повысить ресурс более дорогих деталей. При этом ресурсы различных групп деталей совместных замен следует выравнивать не только внутри узла, но и между узлами агрегата.

Выше подробно описаны этапы формирования рационального комплекса текущего ремонта коробки передач ГМТ одноковшовых фронтальных погрузчиков в целях дальнейшей детализации ранее полученных результатов, изложенных в [13].

В данном исследовании для повышения надежности исследуемого агрегата одноковшовых фронтальных погрузчиков предложено сократить число текущих ремонтов путем повышения безотказности наименее надежной (№ 3), ненадежной (№ 1) и недостаточно надежной (№ 5) групп деталей совместных замен (табл. 1) [14]. С этой целью было произведено моделирование на ЭВМ повышения ресурсных и стоимостных показателей наиболее часто отказывающих групп деталей КП модели SB 165–2.

Моделирование затрат на поддержание эксплуатационной надежности произведено с учетом характера изменения отказов, т. е. на основе ведущей функции потока отказов. Кроме того, учтены и показатели надежности КП модели SB 165–2 в целом.

В процессе исследования были получены результаты расчетов минимальных суммарных удельных затрат, уровня надежности и наработки до первого отказа КП модели SB 165–2 рассматриваемых групп деталей КП № 3, 1 и 5 [15]. В табл. 2 представлены результаты улучшения показателей надежности КП модели SB 165–2 методом моделирования на ЭВМ показателей долговечности рассматриваемых групп деталей.

Таблица 1.*Стоимостные и ресурсные данные групп деталей, лимитирующих надежность КП модели SB 165–2*

№ узлов по каталогу	№ групп деталей	Стоимость, тенге	Первая/Вторая замена			Закон распределения
			Средняя наработка до отказа, мото-ч	Среднеквадратическое отклонение, мото-ч	Коэффициент вариации	
07-11, 07-12	1	23689	3,08/2,70	0,89/0,76	0,28/0,28	Нормальный
	2	63025	9,90/9,10	4,60/4,80	0,46/0,52	Вейбулла
07-13	3	28373	2,67/2,25	0,75/0,65	0,28/0,28	Нормальный
	4	65528	9,90/6,80	3,90/3,40	0,39/0,50	Вейбулла
07-14	5	34778	3,0/2,60	0,86/0,66	0,28/0,25	Нормальный
	6	12317	10,5/6,80	2,93/1,76	0,27/0,25	Нормальный

Таблица 2*. Эффективность повышения надежности КП модели SB 165–2*

Показатели надежности	Исходное значение	Улучшение показателей надежности КП при моделировании					
		Группы деталей					
		№ 3		№ 5		№ 1	
		факт.	%	факт.	%	факт.	%
Минимальные суммарные удельные затраты $C_{уд_{min}}$, тенге/мото-ч	651,6	561,6	13,86	463,2	15,1	375,6	13,44
Уровень надежности *n*	1,38	1,65	19,56	2,10	32,60	3,05	68,84

Результаты исследований, представленные в табл. 2, показывают эффективность работ, направленных на дальнейшее повышение надежности находящихся в эксплуатации агрегатов машин с позиции повышения уровня надежности. Имеется возможность поднять уровень надежности КП модели SB 165–2 более чем в два раза, т. е. с 1,38 до 3,05.

Выполненные исследования позволили разработать рекомендации по сокращению затрат на поддержание надежности машин, пригодные для практического использования предприятиями. Рекомендовано из шести РТР, в целях оптимизации объемов текущего ремонта, сформировать три РТР с учетом конструктивно-технологического исполнения КП модели SB 165–2. При этом группы деталей № 1 и 2, находящиеся в 3-й конструктивно-технологической зоне (07–11, 07–12), объединены в РТР 3; группы деталей № 3 и 4, находящиеся во 2-й конструктивно-технологической зоне, объединены в РТР 2; группы деталей № 5 и 6 (07–14) – в РТР 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жандарбекова А.М. Практика эксплуатации одноковшовых фронтальных погрузчиков в Восточно-Казахстанской области» // Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе: матер. Междунар. научно-практ. конф. – Перьм, 2012. – Т. 1. – С. 164–167.
2. Кульсеитов Ж.О., Жандарбекова А.М. Результаты эксплуатационных испытаний одноковшовых фронтальных погрузчиков на пневмоколесном ходу// Науч. жур. МОН РК «Поиск». – 2008. – № 2. – С. 294–297.
3. Кульсеитов Ж.О., Жандарбекова А.М. Влияние повышения качества изготовления деталей и узлов на выходные показатели надежности агрегата дорожно-строительных машин// Валихановские чтения 16: Матер. Междунар. научно-практ. конф. – Кокшетау, 2012. – Т. 8. – С. 76–79.
4. Труханов В.М., Матвеенко А.М. Надёжность сложных систем на всех этапах жизненного цикла: монография / под ред. В.М. Труханова. – М.: Изд. дом «Спектр», 2012. – 663 с.
5. Чепурин Е., Дехтерев И. Statistical analysis of Russian obligatory motor third party liability insurance // Теория вероятностей и ее приложения: тезисы докладов Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко. – М., 26–30 июня 2012. – М., ЛЕНАНД, 2012. – Р. 26–30.
6. Мартынов В.В., Мартынов П.В. Метод обработки и анализа выборочных данных // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Технические науки. – 2012. – № 3. – С. 3–14.
7. Каталог деталей L-34B serial numbers 20001 and up DRESSTA Co. Ltd. ajoint venture of Komatsu America international Co end Huta Stalowa Wola s.a. catalog Czesci parts catalocue.
8. Инструкция по ремонту фронтального погрузчика L-34B от серийного номера 20001 и выше. DRESSTA Co. Ltd. joint venture of Komatsu America international Co end Huta Stalowa Wola s.a.
9. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. – М.: Советское радио, 1967. – 299 с.
10. Franken P., Streller A. Reliability analysis of complex repairable systems by means of marked point processes // Journal of Application Probability. – 1980. – № 17. – P. 154–167.
11. Tadikamala P.R. Age Replacement Policies for Weibull Failure Times// IEEE transactions on reliability. – 1980. – V. R-29. – Iss. 1. – № 1. – P. 88–90.
12. Чепурин Е.В. Статистические методы обработки данных о надежности оборудования в эксплуатации // Энциклопедия «Надежность и эффективность в технике». – М.: Машиностроение, 1986. – Т. 2. – С. 181–194.
13. Кульсеитов Ж.О., Жандарбекова А.М. Вопросы повышения надежности коробки передач гидромеханической трансмиссии одноковшовых фронтальных погрузчиков // Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева. – 2011. – № 3. – С. 46–49.
14. Жандарбекова А.М., Кульсеитов Ж.О., Муздыбаев М.С. Рекомендации по повышению надежности коробки передач одноковшовых фронтальных погрузчиков // Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева. – 2010. – № 1. – С. 60–66.
15. Кульсеитов Ж.О., Муздыбаев М.С., Жандарбекова А.М. Оптимизация показателей надежности коробки передач гидромеханической трансмиссии одноковшового фронтального погрузчика методом моделирования на ЭВМ // Науч. жур. МОН РК «Поиск». – 2008. – № 4. – С. 240–245.

Поступила 11.10.2013 г.

UDC 621.81:625.08:62–192

FORMATION OF RATIONAL RANGE FOR RUNNING REPAIRS OF FRONT-END SHOVEL LOADER GEARBOX

Acel M. Zhandarbekova,
Cand. Sc., D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University,
Republic of Kazakhstan, 070004, Ust-Kamenogorsk,
A.K. Protozanov street, 69. E-mail: AZhandarbekova@bk.ru

The work relevancy is caused by the necessity to sustain the required reliability level of road-building machines operating in real hard conditions at optimum level of costs on running repair of aggregates.
The work goal *is to justify the formation of rational range of aggregates running repair. These aggregates belong to series-produced road-building machines by computer modeling of their reliability when machine purchase and operation costs are taken into account.*
Research methods: *while carrying out the researches the author has used the up-to-date methods providing reliability of engineering systems, the theory of maintainable item efficiency restoration and computer modeling. The method for reducing costs on maintenance of machine aggregates in real operation conditions was chosen as the increasing reliability of parts and units which limit their reliability.*
The results. *The author proposed the enhanced modeling sequence of reliability level of machines aggregates consisting of six stages. This sequence was tested on gearbox SB165–2 of front-end shovel loaders L-34B and 534C. The mathematical model of computer calculation program was developed to evaluate the influence of machines parts and units production quality on output factors of concerned aggregate reliability and to achieve the work goal practically. The goal is to form rational range of machine aggregate running repairs. It was proved that while using optimal running repairs of gearbox SB 165–2 of front-end shovel loaders it is possible to reduce minimum total cost per unit* $C_{spec_{min}}$ *on reliability maintenance of the aggregate under concern to 15,1 %.*

Key words:
Operational reliability, running repair, modeling, hydromechanical transmission, gearbox.

REFERENCES

1. Zhandarbekova A.M. Praktika expluatatsii odnokovshovykh frontalnykh pogruzchikov v Vostochno-Kazakhstanskoy oblasti [Operation of front-end shovel loaders in East Kazakhstan Oblast]. *Modernizatsiya i nauchnye issledovaniya v transportnom komplekse. Materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Materials of International scientific practical conference. Modernization and scientific researches in transport complex]. Perm, 2012, vol. 1, pp. 164–167.
2. Kulseitov Z.O., Zhandarbekova A.M. Rezultaty explutatsyonnykh ispytaniy odnokovshovykh frontalnykh pogruzchikov na pnevmokolyosnom khodu [The results of operational test of front-end shovel loaders with trucklike chassis]. *Nauchny zhurnal MON RK «Poisk»*, 2008, no. 2, pp. 294–297.
3. Kulseitov Z.O., Zhandarbekova A.M. Vliyaniye povysheniya kachestva izgotovleniya detaley i uzlov na vykhodnye pokazateli nadyozhnosti agregata dorozhno-stroitelnykh mashin [Influence of increasing parts and units production quality on output factors of road-building machines aggregate reliability]. *Valikhanovskie chteniya 16: Materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* (Materials of International scientific practical conference. Valikhanov's reading 16). Kokshetau, 2012, vol. 8, pp. 76–79.
4. Trukhanov V.M., Matveyenko A.M. *Nadyozhnost slozhnykh sistem na vsekh etapakh zhiznennogo tsykla. Monografiya* [Reliability of complicated systems at all stages of life cycle. Monography]. Moscow, Publishing house «Spektr», 2012. 663 p.
5. Chepurin E., Dekhterev I. *Statistical analysis of Russian obligatory motor third party liability insurance. Teoriya veroyatnostey i ee prilozheniya. Tezisy dokladov mezhdunarodnoy konferentsii posvyashchyonnoy stoletiyu so dnya rozhdeniya B.V. Gnedenko* [Probability theory and its applications. Papers of International conference devoted to 100th anniversary of B.V. Gnedenko]. Moscow, LENAND, 2012, pp. 26–30.
6. Martynov V.V., Martynov P.V. Metod obrabotki i analiza vyborochnykh dannykh [Method of sampled data processing and analysis]. *Izvestiya vuzov. Povolzhskiy region. Tehnicheskiye nauki*, 2012, no. 3, pp. 3–14.
7. *Katalog detaley L-34B ot seriynogo nomera 20001* [Catalogue of parts L-34B Serial numbers 20001], DRESSTA Co. LTD. ajoint venture of Komatsu America international Co end Huta Stalowa Wola s.a.catalog Czesci parts catalocue.
8. *Instruktsiya po remontu frontalnogo pogruzchika L-34-B ot seriynogo nomera 20001 i vyshe* [Repair instruction for front-end loader L-34B of serial number 20001 and below. DRESSTA Co. Ltd. joint venture of Komatsu America international Co end Huta Stalowa Wola s.a.
9. Koks D.R., Smith V.L. *Teoriya vosstanovleniya* [Theory of restoration]. Moscow, Sovetskoe radio, 1967. 299 p.
10. Franken P., Streller A., Reliability analysis of complex repairable systems by means of marked point processes. *Journal of Application Probability*, 1980, no. 17, pp. 154–167.
11. Tadikamala P.R. Age Replacement Policies for Weibull Failure Times. *IEEE transactions on reliability*, 1980, vol. R-29, Iss. 1, no. 1, pp. 88–90.
12. Chepurin E.V. O statisticheskikh vyvodakh dlya protsessov vostanovleniya [On statistical conclusions for recovery processes]. *Entsyklopediya Nadyozhnost i effektivnosti v tekhnike* [Encyclopedia of reliability and efficiency in engineering]. Moscow, Mashinostroniye, 1986, vol. 2, pp. 181–194.
13. Kulseitov Z.O., Zhandarbekova A.M. Voprosy povysheniya nadyozhnosti korobki peredach gidromekhanicheskoy transmissii odnokovshovykh frontalnykh pogruzchikov [Issues of reliability increase of hydromechanical transmission gearbox of front-end shovel loaders]. *Vestnik VKGTU im. D. Serikbayeva* – Scientific journal of East Kazakhstan state technical university, 2011, no. 3, pp. 46–49.
14. Zhandarbekova A.M., Kulseitov Z.O., Muzdybaev M.S. Rekomendatsii po povysheniyu nadyozhnosti korobki peredach odnokovshovykh frontalnykh pogruzchikov [Recommendations for increasing hydromechanical transmission of gearbox of front-end shovel loader]. *Vestnik VKGTU im. D. Serikbayeva* – Scientific journal of East Kazakhstan state technical university, 2010, no. 1, pp. 60–66.
15. Kulseitov Z.O., Muzdybaev M.S., Zhandarbekova A.M. Optimizatsiya pokazateley nadyozhnosti korobki peredach gidromekhanicheskoy transmissii odnokovshovogo frontalnogo pogruzchika metodom modelirovaniya [Optimization of reliability factors of hydromechanical transmission of gearbox of front-end shovel loader by method of computer modeling]. *Nauchnyi zhurnal MON RK «Poisk»*, 2008, no. 4, pp. 240–245.

УДК 544.772.3:519.87:534–8

УЛЬТРАЗВУКОВОЕ ОСАЖДЕНИЕ МЕЛКОДИСПЕРСНОГО АЭРОЗОЛЯ

Антонникова Александра Александровна,
мл. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Россия, Алтайский край, 659322, г. Бийск, ул. Социалистическая, д. 1. E-mail: antonnikova.a@mail.ru

Коровина Наталья Владимировна,
мл. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Россия, Алтайский край, 659322, г. Бийск, ул. Социалистическая, д. 1. E-mail: korovina.nata@mail.ru

Кудряшова Ольга Борисовна,
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. лаб. 5 Института проблем химико-энергетических технологий СО РАН, Россия, Алтайский край, 659322, г. Бийск, ул. Социалистическая, д. 1. E-mail: olgakudr@inbox.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью осаждения промышленных и техногенных пылей и дымов.
***Цель работы**: теоретическое и экспериментальное исследование процесса осаждения мелкодисперсных аэрозолей с характерным размером частиц, порядка микрометров, под действием акустического поля с целью ускорения осаждения частиц. Наложение акустического поля приводит к ускорению коагуляции частиц, кроме того, давление звукового излучения, направленное вниз, ускоряет гравитационное осаждение аэрозоля. Введение мелкодисперсной дополнительной фазы повышает скорость осаждения за счет увеличения количества центров коагуляции.*
***Методы исследования:** физико-математическое моделирование. Математическая модель основана на уравнении Смолуховского, описывающем динамику изменения функции распределения частиц аэрозолей по размерам с учетом ультразвукового воздействия, испарения (для жидко-капельных аэрозолей) и осаждения. В качестве вещества модельного аэрозоля использовалось подсолнечное масло; измерение дисперсности и концентрации частиц аэрозолей проводилось с помощью оптических методов.*
***Результаты:** теоретическое и экспериментальное исследование дисперсных параметров и скорости осаждения показали эффективность использования акустического поля и дополнительной дисперсной фазы в целях осаждения аэрозоля.*

Ключевые слова:
Коагуляция аэрозоля, ультразвуковое воздействие, двухфазный аэрозоль, испарение капель, функция распределения частиц по размерам.

Способность звуковых колебаний вызывать укрупнение мельчайших частиц, взвешенных в воздухе, была обнаружена еще на раннем этапе изучения особенностей мощного ультразвука [1, 2]. В промышленных установках очистки газов и осаждения дымов успешно используются акустические колебания в основном звуковых частот [2]. В работах [3–6] показано, что при осаждении наиболее сложных в этом смысле тонкодисперсных дымов необходимо использовать более высокие, ультразвуковые (УЗ) частоты. В данной работе подробно исследованы механизмы влияния УЗ-колебаний на осаждение аэрозолей с характерным размером частиц, порядка микрометра. Теоретически и экспериментально показано, что эффективность коагуляции и осаждения твердофазных и слабоиспаряемых аэрозолей при УЗ-воздействии повышает предварительное введение субмикронного жидкокапельного аэрозоля. Предложена математическая модель для описания кинетики коагуляции в зависимости от основных параметров УЗ-воздействия, свойств аэрозоля и среды: частоты и амплитуды звуковых колебаний, концентрации и дисперсного состава исходного аэрозоля, вязкости и температуры среды, физико-химических параметров материала частиц. Как вариант рассмотрена задача осаждения двухфазного аэрозоля с применением и без применения УЗ-воздействия.

Целью данной работы является теоретическое и экспериментальное исследование процесса осаждения вредных аэрозольных образований под УЗ-воздействием, в том числе с внесением дополнительной дисперсной фазы.

Полученные данные и предложенный метод осаждения могут быть применены для устранения мелкодисперсного аэрозоля пыли, задымленности, пара в закрытом пространстве, к примеру, в шахтах (угольная пыль и водяной туман), при тушении пожаров (дым и вода), при осаждении промышленных пылей с помощью водных аэрозолей и т. п.

Рассмотрим трансформацию распределения частиц в произвольном облаке по размерам с течением времени t. Следуя [5–7], запишем балансовое уравнение (интегральный вариант уравнения Смолуховского), описывающее изменение со временем вектора массовой функции распределения частиц по размерам. При этом сделаны следующие предположения:

- облако частиц пространственно однородно;
- существенными являются эффекты столкновения частиц; при этом учитываются только пар-

ные столкновения (параметр «упаковки», то есть отношения объема всех частиц к занимаемому им объему воздуха, много меньше единицы), каждое столкновение приводит к слиянию частиц. Существенным является испарение, в первую очередь за счет кривизны поверхности капли (в силу малости их размера), а также осаждение на стенках экспериментальной камеры.

Итак:

$$\frac{\partial g(D,t)}{\partial t} = I_1 + I_2 + I_3, \qquad (1)$$

где I_1 описывает убыль частиц с диаметром D за единицу времени в единице объема за счет столкновения капли диаметра D с любой каплей диаметра D_1:

$$I_1 = -g(D,t)\int_0^{D_{\text{кр}}(t)} K(D,D_1)g(D_1,t)dD_1,$$

где $K(D,D_1)$ – вероятность столкновений частиц, $D_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{18\eta H}{G\rho_p t}}$, H – верхняя граница облака; G – ускорение свободного падения, η – динамическая вязкость среды, ρ_p – плотность частицы. Все частицы, масса которых превышает критическое значение $D_{\text{кр}}(t)$, выпадают из облака и не принимают дальнейшего участия в коагуляции; спектр масс частиц на каждый момент времени t будет обрезан справа за счет седиментации крупных частиц, причем, постепенно эта граница будет смещаться в сторону все более малых частиц.

Член I_2 описывает возникновение частиц диаметра D за счет столкновения капель с диаметрами D_1 и $D-D_1$:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^D K(D-D_1,D_1)g(D_1,t)g(D-D_1,t)dD_1.$$

Член I_3 описывает уменьшение массы частиц за счет их испарения:

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{dm}{dt}f(D)\right) = \frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{2\pi D_f M(p_{drop}-p_{pl})f(D)}{RT}\right],$$

где m – масса капли; D_f – коэффициент диффузии; M – молекулярная масса жидкой капли; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура; p_{drop} и p_{pl} – парциальное давление над каплей и плоской поверхностью.

Учитывая формулу Кельвина:

$$\ln(p_{drop}/p_{pl}) = \frac{4\sigma M}{\rho_p RTD},$$

где σ – поверхностное натяжение, выражая массу частицы через ее диаметр, получим:

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial D}\left[4\pi D_f M p_{pl}\left(\exp\left(\frac{4\sigma M}{\rho_p RTD}\right)-1\right)\frac{f(D)}{RTD\rho_p}\right].$$

Начальные условия для уравнения (1): при $t=t_0 g(D,t_0)=g_0(D)$ – начальное распределение частиц по размерам. Для описания функции распределения частиц по размерам обычно применяют гамма-распределение. Счетная функция $f_0(D)=aD^{\alpha}\exp(-bD)$, где b, α – параметры распределения, a – нормировочный коэффициент, связана с массовой функцией следующим соотношением: $g(D)=m/m_{10}f(D)$, где m_{10} – среднеарифметическая масса частиц: $m_{10} = \int_0^{\infty} mf(D)dD$. Одна из статистических характеристик функции распределения частиц по размерам – это объемно-поверхностный диаметр $D_{32}=(\alpha+3)/b$.

Важным вопросом является определение вероятности столкновений частиц: чем она выше, тем быстрее произойдет коагуляция и осаждение аэрозоля. При отсутствии какого-либо воздействия эта величина обуславливается броуновским движением. В модели (1) вероятность столкновений частиц аэрозоля без дополнительного воздействия считалась пропорциональной сумме квадратов диаметров частиц:

$$K(D,D_1) = \frac{k_b n_0}{\nu}(D^2 + D_1^2), \qquad (2)$$

где k_b – коэффициент пропорциональности; ν – кинематический коэффициент вязкости среды. В условиях УЗ-воздействия повышается вероятность столкновений частиц. Именно с помощью выражения (2) мы учтем параметры, характеризующие УЗ-воздействие, прежде всего, амплитуду и частоту излучения.

В [5, 6] получено, что число встреч частиц в звуковом поле пропорционально диаметру частиц, квадрату скорости их движения U_0 (которая, в свою очередь, определяется амплитудой звуковых колебаний), концентрации частиц, коэффициенту обтекания $k_{\text{обт}}$ и обратно пропорционально вязкости среды:

$$N \approx \frac{U_0^2 n_0 k_{\text{обт}}^2 (D^2 + D_1^2)}{\nu}. \qquad (3)$$

Взвешенная в газе частица под действием сил звукового поля вовлекается в колебательное движение. В зависимости от свойств среды, размеров и плотности частицы она может увлекаться средой лучше или хуже, что определяется коэффициентом увлечения $k_{\text{увл}}$ – отношение амплитуды скорости взвешенной частицы к амплитуде скорости частицы газа. Считая, что между частицей и средой действует сила Стокса, получим формулу для коэффициента увлечения в виде [2]:

$$k_{\text{увл}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \qquad (4)$$

где ω – частота акустического воздействия; $\tau=\rho_{\text{ч}}D^2/18\eta$ – время релаксации частицы, η – динамический коэффициент вязкости среды.

Учитывая выражение для коэффициента увлечения частицы в звуковом поле (4), считаем, что

частица увлекается звуковым полем, повышая вероятность столкновений с фиксированной частицей в $k^2_{обт}=k_a(1-k_{квл})^2$ раз, где k_a – коэффициент пропорциональности. Тогда вероятность столкновений частиц с диаметрами D и D_1 пропорциональна $N(1-k_{увл})^2$, или с учетом (2)–(4):

$$K(D,D_1)=$$
$$=\frac{k_b n_0}{\nu}(D^2+D_1^2)\left(1+k_a U_0^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right)^2\right). \quad (5)$$

Из (5) следует, что чем меньше диаметр частиц (и τ), тем требуется большая частота ω для повышения скорости коагуляции. Из этого выражения также видно, что повышение концентрации частиц n_0 способствует ускорению коагуляции и осаждения. Мы предлагаем повысить концентрацию частиц путем введения в существующий аэрозоль дополнительной фазы. В этом случае следует ожидать, что при использовании одной и той же массы вводимого аэрозоля больший эффект будет получен при большей дисперсности последнего: больше количество частиц n_0, выше удельная поверхность, выше число столкновений в единицу времени и выше скорость коагуляции, осаждения.

Описанную выше модель коагуляции аэрозоля (1) для учета второй фазы дополним начальным условием вида:

$$f(D)=a((1-\delta)D^{\alpha}\exp(-bD)+\delta D^{\alpha_1}\exp(-b_1 D)),$$

где параметры распределения с индексом 1 относятся к дополнительной фазе аэрозоля; δ – счетная доля частиц дополнительной фазы. Вероятность столкновений повышается при введении дополнительной фазы на $(1+\delta/(1-\delta))$:

$$K(D,D_1)=\frac{k_b n_0}{\nu}\left(1+\frac{\delta}{1-\delta}\right)(D^2+D_1^2).$$

Модель (1) описывает, прежде всего, изменение спектра масс частиц аэрозоля при воздействии на него УЗ-поля, испарении частиц, гравитационном осаждении и введении дополнительной фазы. В практическом смысле важным является вопрос уменьшения массы аэрозоля со временем.

Выражение изменения массы за счет седиментации можно получить из закона Стокса движения частиц в воздухе:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{G\rho_p D^2}{18\eta},$$

где dh – расстояние, которое проходит частица диаметра D за время dt. В каждый момент времени dt от общей массы аэрозоля, размещенного в объеме SH, исчезнет масса частиц, размещенных в слое $dm=dh(D)S$, где S – площадь дна экспериментальной камеры. Относительное уменьшение массы составит: $\frac{dm}{m_{all}}=\frac{dh(D)}{H}$, где m_{all} – масса аэрозоля на текущий момент времени. Таким образом,

$$\frac{dm}{dt}=\frac{dh}{dt}\frac{m_{all}}{H}=\frac{G\rho_p D^2 m_{all}}{18\eta H}. \quad (6)$$

Необходимо также учесть убыль массы за счет испарения и за счет тех частиц, которые полностью выпали в осадок (частицы с диаметром, более D_{cr}). Таким образом, общее изменение массы, после суммирования по всем фракциям распределения, составит:

$$\frac{dm}{dt}=\int_0^{D_{кр}}\left(\frac{2\pi D_f M D p_{pl}}{RT\rho_p}\left(e^{\frac{4\sigma M}{\rho_p RT_K D}}-1\right)+\frac{G\rho_p D^2 m_{all}}{18\eta H}\right)g(D)dD+$$
$$+\int_{D_{cr}}^{\infty} m_{all}(t)g(D)dD.$$

Второй механизм повышения скорости осаждения заключается в том, что УЗ-воздействие создает избыточное давление (при размещении источника ультразвука над облаком аэрозоля) [8]. Это давление приводит к уменьшению высоты облака H во время действия излучения, а значит, в соответствии с выражением (6), к ускорению осаждения аэрозоля (независимо от его коагуляции). Давление звукового излучения выражается формулой [9]: $P=2E_{k1}(1-R^2)-2E_{k2}$, где E_{k1} и E_{k2} – средние по времени значения плотности кинетической энергии падающей волны в воздухе и прошедшей волны в облаке, R – коэффициент отражения звуковой волны от поверхности раздела фаз. При уровне интенсивности 140 Дб, применяемом в установках для коагуляции аэрозолей, P~10 Па. Скорость движения верхней границы облака, вызванного избыточным радиационным давлением, определяется выражением:

$$\frac{dH}{dt}=\sqrt{\frac{2P}{\rho_p}}.$$

Для создания жидкокапельного аэрозоля использовался краскопульт КРАТОН R 200 LVLP-02S, настроенный на заданные нами характеристики (средний размер частиц около 9 мкм). В ходе проведения экспериментов камера заполнялась аэрозолем в течение 1 минуты (масса распыленной жидкости составила 9 г). Дополнительная фаза (водный аэрозоль с параметрами функции распределения α=2,1, b=0,9) генерировалась с помощью УЗ-распылителя «Муссон-2» (распылитель 2). Для создания акустического поля, воздействующего на аэрозоль, использовался ультразвуковой дисковый излучатель УЗКС 320. Технические характеристики УЗ-аппарата: диаметр излучателя – 320 мм, уровень звукового давления – не менее 140 дБ, частота колебаний – 28 кГц. Дисперсные характеристики и концентрацию аэрозоля измеряли с помощью оптических методов, описанных в [10]. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.

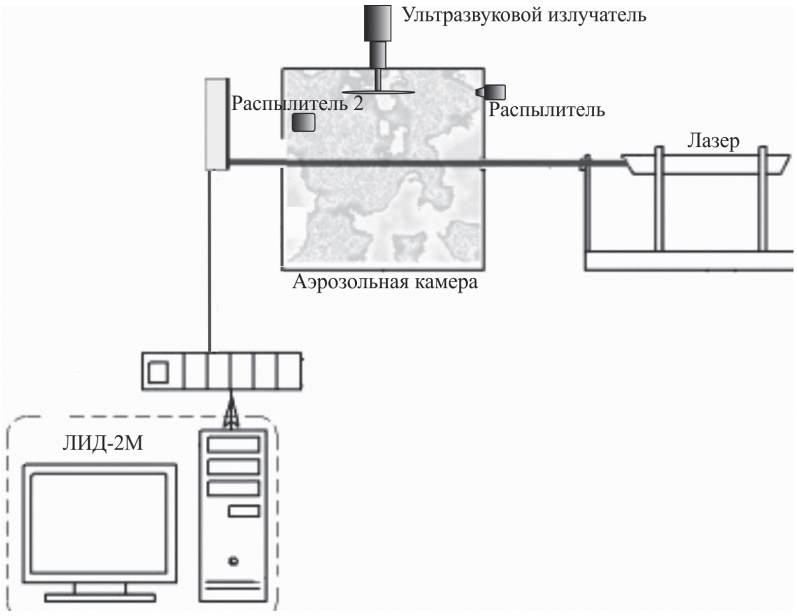


Рис. 1. *Схема экспериментальной установки*

В качестве модельной среды рассмотрено подсолнечное масло. Подсолнечное масло содержит влагу и летучие вещества от 10 до 30 %. В расчетах доля быстроиспаряемых веществ в масле была принята равной 15 %.

На рис. 2, *а* приведена зависимость относительной массы аэрозоля подсолнечного масла m/m_0 (где m_0 – начальная масса частиц аэрозоля), рассчитанная по приведенной выше модели (кривые) и измеренные экспериментально (точки), в зависимости от времени при УЗ-воздействии (кривая 2) и без него (кривая 1). Перегиб кривой в области около 100 секунд обусловлен испарением воды и летучих веществ из капель масла. Дальнейшая эволюция аэрозоля обусловлена коагуляцией капель, радиационным давлением на облако и осаждением частиц. На рис. 2, *б* приведена зависимость объемно-поверхностного диаметра от времени для масляного аэрозоля в случае с УЗ и без УЗ-воздействия. Распределение частиц от времени деформируется слабо, но несколько сильнее при наложении акустического поля, что связано с ускоренной коагуляцией частиц.

На рис. 3 показана зависимость относительной массы (а) и объемно-поверхностного диаметра (б) аэрозоля подсолнечного масла от времени при УЗ-воздействии с использованием дополнительной фазы (водного аэрозоля, кривая 2) и без нее (кривая 1). Введение в аэрозоль дополнительной фазы ускоряет осаждение аэрозоля, способствуя коагуляции.

Рис. 4 иллюстрирует эффект воздействия дополнительной фазы водного аэрозоля на осаждение подсолнечного масла без наложения акустического поля. Более глубокое снижение концентрации аэрозоля обусловлено испарением дополнительной фазы водных капель; затем снижение концентрации происходит практически с той же скоростью, что и у исходного масляного тумана.

В таблице приведено расчетное время осаждения масляного аэрозоля для четырех случаев: без

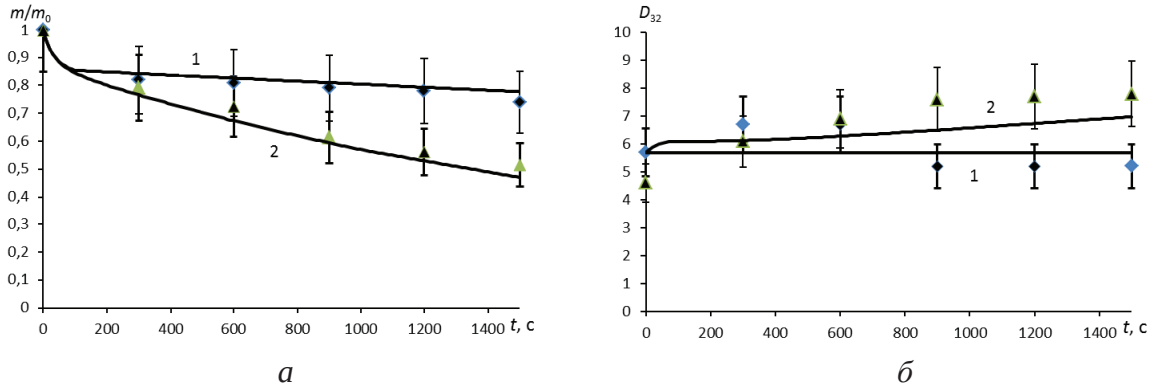
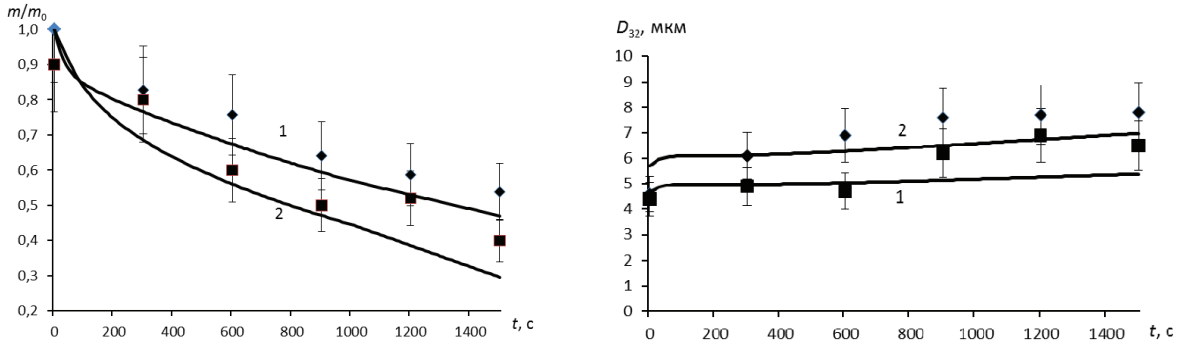


Рис. 2. *Зависимость а) относительной массы; б) объемно-поверхностного диаметра аэрозоля подсолнечного масла от времени без УЗ-воздействия (1) и с УЗ-воздействием (2)*



а *б*

Рис. 3. *Зависимость а) относительной массы; б) объемно-поверхностного диаметра аэрозоля подсолнечного масла от времени при УЗ-воздействии с дополнительной фазой водного аэрозоля (2) и без дополнительной фазы (1)*

УЗ-воздействия и введения дополнительного водного аэрозоля; с УЗ-воздействием; под действием ультразвука и дополнительным водным аэрозолем; только с водным аэрозолем, без УЗ-воздействия.

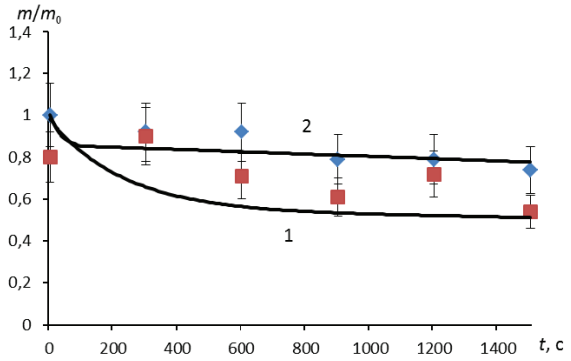


Рис. 4. *Зависимость относительной массы частиц аэрозоля подсолнечного масла от времени без УЗ-воздействия: 1 – с введением 5 г водного аэрозоля дополнительно; 2 – без введения дополнительного аэрозоля*

Таблица. *Время полного осаждения масляного аэрозоля при разных видах воздействия*

Вид воздействия	Время осаждения, ч
Без воздействия	4,41
УЗ-воздействие, 28 кГц, 140 Дб	1,07
Введение дополнительно водного аэрозоля (D_{32}~5 мкм)	4,38
УЗ-воздействие + дополнительный водный аэрозоль	0,69

Как видно из проведенных расчетов, УЗ-воздействие и введение дополнительного мелкодисперсного водного аэрозоля позволяет существенно снизить время осаждения исходного (слабоиспаряемого) аэрозоля. Эксперименты подтверждают этот вывод. Предложенная физико-математическая модель, основанная на уравнении Смолуховского с учетом испарения, ускорения коагуляции и осаждения облака за счет УЗ-воздействия, в том числе облака двухфазного аэрозоля, удовлетворительно описывает экспериментальные данные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Patterson H.S., Cawood W. Phenomena in a Sounding Tube // Nature. – 1931. – V. 127. – № 3209. – 667 p.
2. Розенберг Л.Д. Физические основы ультразвуковой технологии. – М.: Наука, 1970. – 689 с.
3. Ультразвуковая коагуляция аэрозолей (монография) / В.Н. Хмелев, К.В. Шалунова, С.Н. Цыганок, Р.В. Барсуков, А.Н. Сливин, А.В. Шалунов. – Бийск: АлтГТУ, 2010. – 228 с.
4. Экспериментальное исследование процессов трансформации аэрозолей при ультразвуковом воздействии / А.А. Антонникова, Н.В. Коровина, О.Б. Кудряшова, И.Р. Ахмадеев // Оптика атмосферы и океана. – 2012. – Т. 25. – № 07. – С. 650–652.
5. Кудряшова О.Б., Антонникова А.А. Физико-математическая модель эволюции двухфазных аэрозолей при ультразвуковом воздействии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2012. – № 4 (20). – С. 87–94.
6. Кудряшова О.Б., Антонникова А.А. Математическая модель эволюции аэрозолей при ультразвуковом воздействии // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 160–163.
7. Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 284 с.
8. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 403 с.
9. Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука. 2 изд. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – Т. 2. – 503 с.
10. Remote optical diagnostics of nonstationary aerosol media in a wide range of particle sizes / O. Kudryashova, A. Pavlenko, B. Vorozhtsov, S. Titov, V. Arkhipov, S. Bondarchuk, E. Maksimenko, I. Akhmadeev, E. Muravlev // Photodetectors. – Rijeka, Croatia: InTech, 2012. – P. 341–364.

Поступила 29.07.2013 г.

UDC 544.772.3:519.87:534–8

ULTRASONIC SEDIMENTATION OF SUPERFINE AEROSOL

Aleksandra A. Antonnikova,
Institute for Problems of Chemical & Energetic Technologies of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Altai territory, 659322, Biysk, Socialisticheskaya street, 1. E-mail: antonnikova.a@mail.ru

Natalya V. Korovina,
Institute for Problems of Chemical & Energetic Technologies of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Altai territory, 659322, Biysk, Socialisticheskaya street, 1. E-mail: korovina.nata@mail.ru

Olga B. Kudryashova,
Cand. Sc., Institute for Problems of Chemical & Energetic Technologies of the Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, Altai territory, 659322, Biysk, Socialisticheskaya street, 1. E-mail: olgakudr@inbox.ru

Relevance of the work is caused by the need of sedimentation of industrial and technogenic dusts and smokes.
The main aim of research *is theoretical and experimental study of sedimentation of superfine aerosols with a typical particle size, about micrometers, under the influence of acoustic field for particle sedimentation acceleration. The acoustic field imposing results in particle coagulation acceleration, besides, the sound radiation downward pressure accelerates aerosol gravitational sedimentation. Introduction of a superfine additional phase increases sedimentation speed because of growth of coagulation center number.*
The methods used in the study: *physical and mathematical modeling. The mathematical model is based on Smolukhovsky equation, describing dynamics in changing distribution function of aerosol particles by size considering ultrasonic influence, evaporation (for liquidly-drop aerosols) and sedimentation. Sunflower oil was used as a substance of a model aerosol; dispersion and concentration of aerosol particles were measured by optical methods.*
The results: *theoretical and experimental study of disperse parameters and speed of sedimentation showed the efficiency of application of acoustic field and additional disperse phase for aerosol sedimentation.*

Key words:
Aerosol coagulation, ultrasonic influence, two-phase aerosol, evaporation of droplets, particle size distribution function.

REFERENCES

1. Patterson H.S., Cawood W. Phenomena in a Sounding Tube. *Nature*, 1931, vol. 127, no. 3209, 667 p.
2. Rozenberg L.D. *Fizicheskie osnovy ultrazvukovoy tekhnologii* [Physical bases of ultrasonic technology]. Moscow, Nauka, 1970. 689 p.
3. Khmelev V.N., Shalunova K.V., Tsyganok S.N., Barsukov R.V., Slivin A.N., Shalunov A.V. *Ultrazvukovaya koagulyatsiya aerozoley (monografiya)* [Ultrasonic coagulation of aerosols (monograph)]. Biysk, AltSTU, 2010. 228 p.
4. Antonnikova A.A., Korovina N.V., Kudryashova O.B., Akhmadeev I.R. Eksperimentalnoe issledovanie protsessov transformatsii aerozoley pri ultrazvukovom vozdeystvii [Experimental study of aerosol transformation processes at ultrasonic exposure]. *Atmospheric and oceanic optics*, 2012, vol. 25, no. 07, pp. 650–652.
5. Kudryashova O.B., Antonnikova A.A. Fiziko-matematicheskaya model evolyutsii dvukhfaznykh aerozoley pri ultrazvukovom vozdeystvii [Physicomathematical model of evolution of two-phase aerosols at ultrasonic action]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 4 (20), pp. 87–94.
6. Kudryashova O.B., Antonnikova A.A. Matematicheskaya model evolyutsii aerozolei pri ultrazvukovom vozdeystvii [Mathematical model of aerosol evolution at ultrasonic influence]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 160–163.
7. Voloshchuk V.M. *Kineticheskaya teoriya koagulyatsii* [Kinetic Theory of Coagulation]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1984. 284 p.
8. Krasilnikov V.A., Krylov V.V. *Vvedenie v fizicheskuyu akustiku* [Introduction into physical acoustics]. Moscow, Science Publ., 1984. 403 p.
9. Strett Dzh.V. (lord Reley) *Teoriya zvuka* [Theory of sound]. Moscow, State publishing house of technical and theoretical literature, 1955. Vol. 2, 503 p.
10. Kudryashova O., Pavlenko A., Vorozhtsov B., Titov S., Arkhipov V., Bondarchuk S., Maksimenko E., Akhmadeev I., Muravlev E. Remote optical diagnostics of nonstationary aerosol media in a wide range of particle sizes. *Photodetectors*. Rijeka, Croatia, InTech, 2012, pp. 341–364.

УДК 621.791.927.2

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ ПЛАЗМЕННОЙ НАПЛАВКИ НА МИКРОСТРУКТУРУ КАРБИДА ВАНАДИЯ В ПОКРЫТИЯХ НА ОСНОВЕ ПОРОШКА ПР-Х18ФНМ

Гнюсов Сергей Федорович,
д-р техн. наук, профессор кафедры «Оборудование и технология сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: gnusov@rambler.ru

Дегтерёв Александр Сергеевич,
ассистент кафедры «Оборудование и технология сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: Degterev@tpu.ru

Актуальность исследования связана с формированием однородной по объему структуры и фазового состава композиционных покрытий, что обеспечит им высокий комплекс эксплуатационных свойств. Целью настоящей работы является детальное исследование изменений средних объемной доли, размера, фактора формы частиц карбида ванадия, равномерности их распределения в зависимости от силы тока и скорости подачи порошка ПР-Х18ФНМ при плазменно-порошковой наплавке током прямой полярности. Анализ микроструктуры покрытий проводили с помощью оптического микроскопа Olympus GX51, снабженного анализатором изображений SIAMS 700. Исследование фазового состава наплавленных покрытий проводили методом рентгеноструктурного анализа на дифрактометре Shimadzu XRD 6000 с фильтрованным $Cu_{K\alpha}$- излучением. Изучено влияние таких параметров режима плазменно-порошковой наплавки, как сила тока прямой полярности и скорость подачи порошка ПР-Х18ФНМ на микроструктурные параметры карбида ванадия. Установлено, что в интервале токов 220...260 А с ростом скорости расхода порошка фактор формы частиц VC растет по линейному закону и при расходе более 1,5 кг/ч они становятся равноосными. При наплавке покрытий токами 160...200 А выделяются только равноосные частицы VC и их фактор формы мало зависит от скорости подачи порошка.

Ключевые слова:
Плазменная наплавка, композиционное покрытие, аустенитная сталь, карбид ванадия, структура.

Введение

Повышение работоспособности композиционных материалов, как в условиях абразивного воздействия, так и в узлах трения в широком интервале нагрузок и температур, в основном связано с режимами эксплуатации и их структурно-фазовым составом. Помимо влияния условий эксплуатации, сопротивление износу сильно зависит от микроструктурных параметров металлической матрицы и карбидов. Матрица ответственна за способность удерживать частицы твердых карбидов, упрочняться в процессе эксплуатации за счет субструктурных и фазовых превращений. Последнее особенно важно, поскольку позволяет релаксировать напряжения и, следовательно, сдерживать образование и развитие микротрещин, и передавать нагрузку на карбидные частицы. Эти свойства матрицы успешно достигаются за счет использования метастабильных аустенитных сталей и сплавов [1].

К микроструктурным параметрам карбидов относятся тип, морфология, объемная доля и распределение. Большую роль в уменьшении износа отводят карбиду ванадия. Независимо от класса сталей введение ванадия в несколько раз уменьшает износ [2–6]. Для повышения износостойкости композиционных материалов и покрытий на их основе в настоящее время предпринимают ряд подходов: получение мультимодального распределения карбидов по размерам, наличие нескольких типов карбидов, в том числе сложных метастабильных [7, 8], изменение скорости кристаллизации стали и (или) использование дополнительной термической обработки, позволяющее получить более мелкие, стабильные и равномерно распределенные карбиды [9–13], увеличение в быстрорежущих сталях содержания углерода, позволяющее перейти от пластинчатых к равноосным карбидам ванадия [3], или одновременно увеличение содержания углерода и ванадия [14].

Детальное изучение влияния углерода на морфологию карбида ванадия и свойства высокомарганцовистой стали проведено в [2]. Авторы показали, что с увеличением содержания углерода до 3 вес. % увеличивается доля карбида ванадия и первичные частицы VC изменяют свое строение от вытянутого до сферического, а их распределение становится более однородным. Дальнейшее увеличение содержания углерода уменьшает однородность распределения VC в аустенитной матрице, что отрицательно влияет на износостойкость и ударную вязкость. Самой высокой износостойкостью обладает сталь со сферическими однородно распределенными частицами карбида ванадия в аустенитной матрице.

Авторы [5] отмечают, что более высокой сопротивляемостью зарождению трещин обладают покрытия, содержащие частицы VC малых размеров равноосной формы, в отличие от частиц крупной «лепесткообразной» формы. Сопротивляемость

распространению трещин в материале связана с высокой плотностью однородного распределения VC. С уменьшением размеров частиц VC уменьшается их склонность к растрескиванию и выкрашиванию, а сокращение расстояния между ними способствует снижению развития адгезионного схватывания [15]. В [3] определено низкое сопротивление износу закрепленным абразивом сплава Fe-V-Cr-Mo-C, содержащего вытянутые частицы VC, расположенные в обедненной углеродом ферритной матрице.

Следовательно, чтобы получить оптимальные свойства композиционных материалов и покрытий необходимо управлять этими микроструктурными факторами, изменяя состав и проводя термическую обработку.

В настоящее время широкое распространение для поверхностного упрочнения деталей механизмов и машин получила обработка концентрированными потоками энергии (КПЭ) [16]. Обработка КПЭ – это воздействие на поверхность заготовки исключительно потока энергии, носителями которой являются частицы: электроны, фотоны, атомы, ионы, сконцентрированные в пучки ограниченных поперечных размеров.

Особенностью технологии плазменно-порошковой наплавки (ППН) является концентрированный ввод энергии в упрочняемую деталь [17]. Это способствует кратковременности термического цикла наплавки и формированию покрытий, содержащих метастабильные фазы и пересыщенные твердые растворы. Способ ППН позволяет обеспечить возможность раздельного управления процессами ввода энергии и подачи присадочного материала, что открывает широкие возможности для регулирования не только макроразмеров покрытий (ширины, высоты, доли основного металла в наплавленном), но и их микроструктуры.

В работах [18–20] показано, что с увеличением погонной энергии наплавки (уменьшением скорости наплавки и увеличением силы тока при постоянном расходе порошка) в покрытиях на основе порошка ПР-Х18ФНМ наблюдается рост средних диаметров частиц карбида ванадия, появление частиц вытянутой морфологии и уменьшение объемной доли VC. Это приводит к снижению износостойкости покрытий.

Целью настоящей работы является детальное исследование изменений средних объемной доли, размера, фактора формы частиц карбида ванадия, равномерности их распределения в зависимости от силы тока и скорости подачи порошка ПР-Х18ФНМ при плазменно-порошковой наплавке током прямой полярности.

Материал, оборудование и методы исследования

Материал. В качестве наплавочного материала в работе использовался промышленный порошок ПР-Х18ФНМ, фракцией от 125 до 200 мкм, следующего химического состава (мас. %): 2,1...2,4 C, 17...19 Cr, 2...3 Ni, 7...8 V, 2...2,6 Mo, Fe – основа. В качестве основного материала (подложки) использовали пластины из стали 20 размером 250×100×10 мм, поверхность которых предварительно шлифовалась.

Технология наплавки. Покрытия наносили на установке УПН-303УХЛ4 с водоохлаждаемым плазмотроном. Для более высокого уровня защиты создаваемых упрочняющих слоев от вредного влияния атмосферного воздуха на плазмотрон устанавливали устройство дополнительного обдува зоны наплавки. В качестве плазмообразующего, транспортирующего и защитного газов применяли аргон высшего сорта. Покрытия наплавляли за один проход током прямой полярности при расстоянии от плазмотрона до изделия 10...12 мм, расходе плазмообразующего газа 1...2 л/мин, транспортирующего 10...16 л/мин, для дополнительного поддува до 5...15 л/мин, напряжении на дуге ($U_д$) 30...39 В. Силу тока (I) изменяли в диапазоне 160...260 А с шагом в 20 А, скорость подачи присадочного порошка ($v_п$) в диапазоне 1,1...2,2 кг/ч с шагом 0,3...0,4 кг/ч (таблица). Скорость ППН, согласно ранее проведенной работе, была выбрана 6 м/ч [18, 19].

Таблица. *Параметры режимов плазменно-порошковой наплавки*

Режимы наплавки	I, А	$U_д$, В	$v_п$, кг/ч
1	160	30...31	1,1
2	180	31...33	1,1
3	200	32...34	1,1
4	200	32...34	1,5
5	200	32...34	1,9
6	220	34...36	1,1
7	220	34...36	1,5
8	220	34...36	1,9
9	220	34...36	2,2
10	240	36...38	1,1
11	240	36...38	1,5
12	240	36...38	1,9
13	240	36...38	2,2
14	260	37...39	1,1
15	260	37...39	1,5
16	260	37...39	1,9
17	260	37...39	2,2

Анализ макро- и микроструктуры. Анализ макро- и микроструктуры покрытий проводили на поперечных микрошлифах, вырезанных из зоны установившегося режима наплавки.

В настоящей работе способ приготовления микрошлифов традиционный – механическое шлифование и механическое полирование на алмазных пастах различной дисперсности. Химическое травление производилось различными реактивами при температуре 20 °С методом погружения образцов. Для макротравления использовали 4 % раствор HNO_3 в C_2H_5OH. Время травления составляло 15...20 с. Для выявления эвтектики (карбид типа Cr_7C_3+аустенит) применяли химический реактив следующего состава: 8,3 % $K_3[Fe(CN)_6]$, 8,3 %

KOH, 83,4 % H_2O. Время травления составляло 60 с. Для выявления границ аустенитных зерен использовали смесь кислот HNO_3 (1 об. часть) и HCl (3 об. части). Время травления 15...30 с.

Анализ микроструктуры покрытий проводили с помощью оптического микроскопа Olympus GX51, снабженного анализатором изображений SIAMS 700. Для оценки равномерности структуры по толщине формируемых покрытий, по оси покрытий, от границы сплавления к их вершине, прокалывали дорожку уколов (маркеров) алмазной пирамидой при нагрузке в 0,981 Н с шагом 300 мкм. Справа и слева от каждого маркера анализировали микроструктуру.

Частицы карбида ванадия, выявляемые рельефным полированием по методике [21], исследовали с применением методов дифференциального интерференционного контраста и темнопольного освещения. С помощью анализатора изображений (пакет прикладных программ SIAMS 700) оценивали объемную долю (*V*), средний размер (*d*, диаметр) и средний фактор формы (*f*) частиц VC, рассчитанный как отношение ортогональной максимальной проекции частицы к максимальной проекции частицы; а также число частиц (*N*), приходящихся на единицу площади шлифа (10^4 мкм^2). Для сферы фактор формы равен 1. Значения фактора формы для пяти типов правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) изменяются в интервале 0,8...0,97, из которого очевидна количественно близость формы сложных многогранников к сферической [22]. Поэтому в работе частицы карбида ванадия с фактором формы более 0,7 принимали за равноосные.

Исследование фазового состава наплавленных покрытий проводили методом рентгеноструктурного анализа (РСА) на дифрактометре Shimadzu XRD 6000 с фильтрованным $Cu_{K\alpha}$ – излучением в режиме сканирования в интервале углов 2Θ от 10° до 110°, с шагом 0,1°. При проведении качественного фазового анализа использовались хорошо известные картотеки. Для количественного фазового анализа использовали значения интегральной интенсивности дифракционных линий.

Результаты и обсуждение

На основе визуального анализа сформированных покрытий установлено, что с увеличением силы тока от 160 до 260 А и уменьшением скорости подачи порошка от 2,2 до 1,1 кг/ч уменьшаются угол смачивания (от 95 до 25°) и высота валиков (от 4,5 до 2,2 мм), повышается их ширина (от 7,5 до 14,8 мм).

Анализ макроструктуры наплавленных покрытий позволил построить зависимость глубины проплавления от силы тока наплавки и скорости подачи порошка (рис. 1). Из рисунка видно, что с увеличением силы тока глубина проплавления увеличивается и особенно интенсивно (в два раза) с ростом значений тока от 240 до 260 А во всем интервале скоростей подачи порошка. Наибольший уровень проплавления для всех значений тока наплавки наблюдается при малом расходе порошка, и он изменяется от 0,1 до 1 мм при увеличении тока от 160 до 260 А. Далее с увеличением расхода интенсивность проплавления уменьшается по линейному закону и для токов 160...240 А и расхода порошка 1,9...2,2 кг/ч не превышает 0,4 мм.

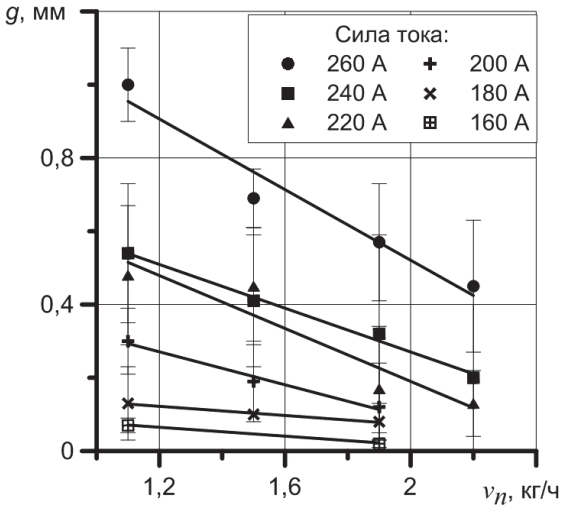


Рис. 1. *Влияние силы тока и скорости подачи порошка ($v_п$) на глубину проплавления основного металла (g)*

По данным рентгеноструктурного анализа матрица в упрочненном слое представлена γ- и α-твердыми растворами на основе железа (рис. 2, стрелки *D*). С увеличением тока наплавки от 160 до 260 А соотношение между γ- и α-фазами изменяется от ~70:30 до ~80:20. Это обусловлено увеличением температуры ванны расплава и, следовательно, большей растворимостью легирующих элементов в ней, что при дальнейшей кристаллизации и ускоренном охлаждении обеспечивает увеличение количества аустенита.

В карбидной подсистеме присутствуют карбид ванадия (рис. 2, стрелки *A* и *B*) и эвтектический карбид типа Cr_7C_3, выделившийся по некоторой части границ зерен в виде сетки (стрелки *C*). Объемная доля эвтектики уменьшается как с ростом тока наплавки, так и с уменьшением скорости подачи порошка от 30±6 до 10±1 %. В работе [20] показано, что с уменьшением объемной доли эвтектического карбида скорость изнашивания покрытия возрастает.

С увеличением глубины проплавления (объемной доли основного металла в наплавленном покрытии с 2 до 33 %) уменьшается объемная доля карбида ванадия в покрытии на 40 % (рис. 3). Более того, по толщине покрытия явно выделяются две области, сформированные токами 220...260 А. В первой области от границы сплавления на толщину проплавления наблюдается линейный рост числа частиц карбида ванадия, а далее во второй области их практически стабильное содержание по толщине. Причем для покрытий, сформированных током 260 А, данная зависимость сохраняется

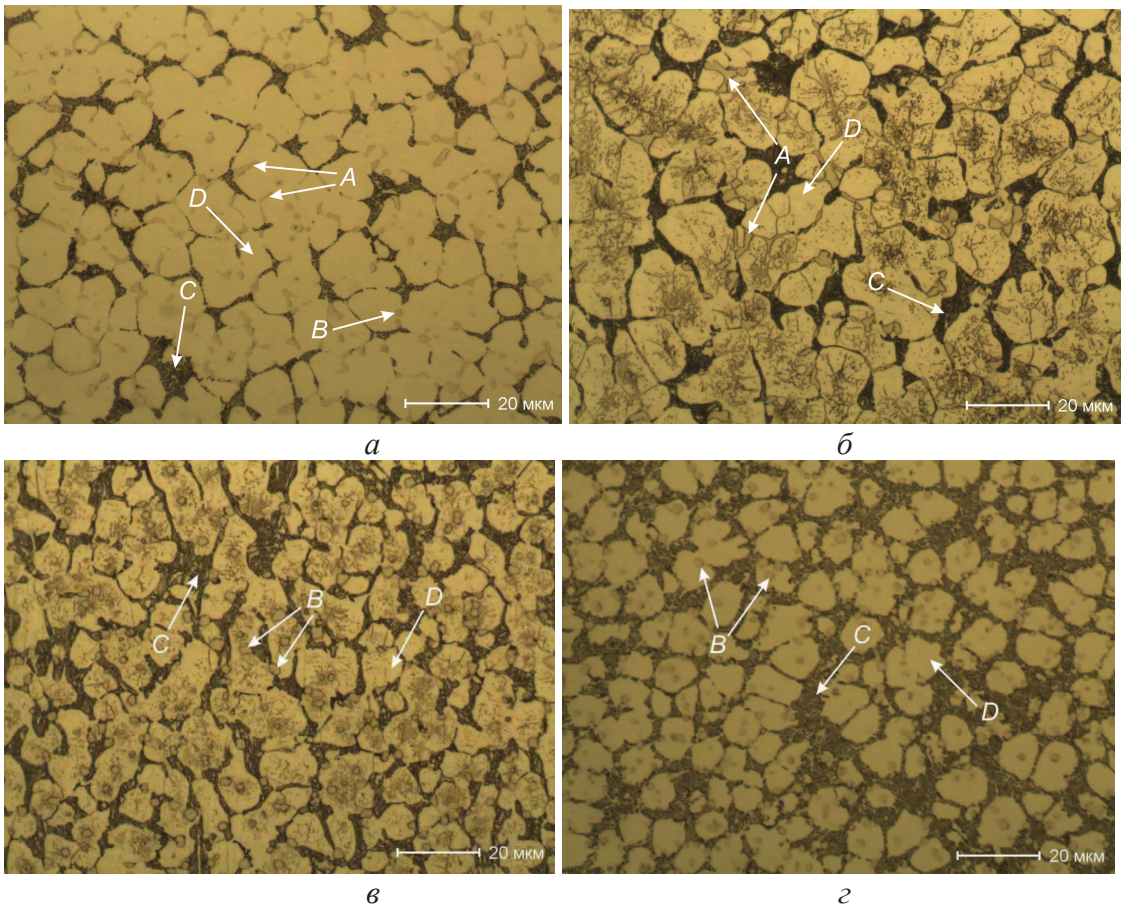


Рис. 2. *Микроструктура композиционных покрытий, сформированных по режимам: а, б) 260 А, 1,1 кг/ч (№ 14); в) 260 А, 2,2 кг/ч (№ 17); г) 220 А, 2,2 кг/ч (№ 9): А – частицы VC вытянутой формы; В – частицы VC равноосной формы; С – эвтектический карбид Cr_7C_3, D – матрица; на основе γ- и α-твердых растворов*

для всех скоростей расхода порошка. Далее с уменьшением тока наплавки формируется относительно однородное распределение числа частиц по всей толщине покрытия для скоростей расхода порошка 1,9...2,2 кг/ч (240 и 220 А), 1,5...1,9 кг/ч (200 А). Формирование первой области с неравномерным распределением частиц карбида ванадия при малом расходе порошка связано с интенсивным проплавлением основного металла.

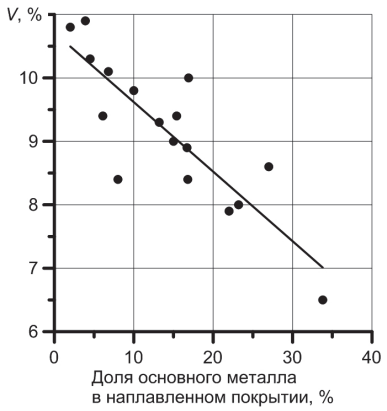


Рис. 3. *Зависимости объемной доли частиц VC (V) от доли участия основного металла в наплавленном покрытии*

В покрытиях, наплавленных токами 160...180 А при минимальном расходе присадочного порошка, распределение частиц VC неравномерно, однако эта неравномерность не связана с проплавлением основного металла, а обусловлена периодическим распределением частиц карбида ванадия по эллиптическим траекториям [18, 19].

Морфология частиц карбида ванадия в микроструктуре наплавленных покрытий в зависимости от режимов наплавки различна. В упрочняющих слоях, сформированных токами 220...260 А при скорости подачи присадочного порошка 1,1...1,5 кг/ч, частицы карбида ванадия, располагающиеся в основном по границам аустенитного зерна, имеют вытянутую морфологию (рис. 2, *а*, *б*, стрелки *А*). Увеличение скорости подачи присадочного порошка способствует формированию частиц карбида ванадия равноосной морфологии, как в зернах матрицы, так и в эвтектических колониях (рис. 2, *в*, *г*, стрелки *В*).

Анализ всего комплекса микроструктур свидетельствует о том, что для интервала токов от 180 до 200 А с увеличением скорости подачи порошка от 1,1 до 1,9 кг/ч средний размер частиц карбида ванадия слабо уменьшается, принимая значения в

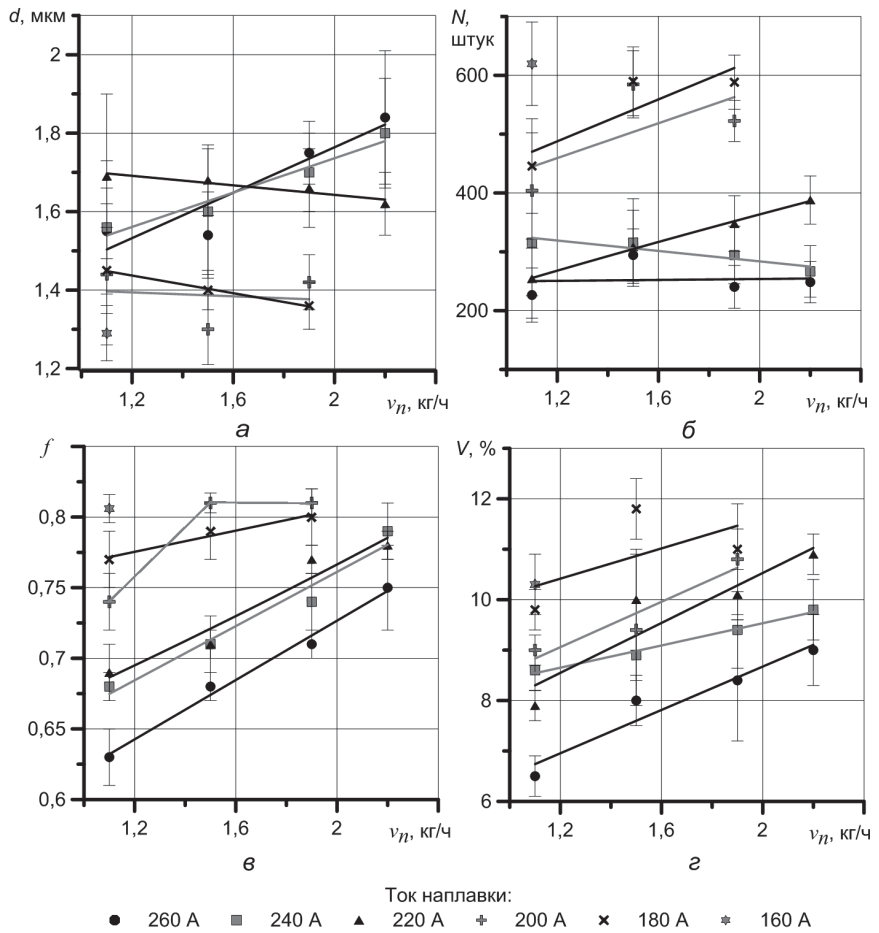


Рис. 4. *Изменение среднего размера d (а), количества N (б), фактора удлинения f (в) и объемной доли V (г) частиц VC от силы тока наплавки и скорости подачи присадочного порошка* $v_п$

пределах 1,30...1,45 мкм (рис. 4, *а*). Для тока 220 А средний размер частиц также слабо снижается с увеличением расхода порошка от 1,69 до 1,62 мкм (рис. 4, *а*). Далее с увеличением тока (240 и 260 А) средний размер частиц растет от 1,5 до 1,85 мкм по линейному закону с увеличением расхода порошка. Это вызывает уменьшение числа частиц примерно в два раза (от 600 до 300) на анализируемой площади шлифа (10^4 мкм^2, рис. 4, *б*).

Одновременно с ростом среднего размера и объемной доли (рис. 4, *г*) частиц VC наблюдается частичное изменение и их морфологии: в интервале токов 220...260 А с ростом скорости подачи порошка частицы удлинённой формы становятся более равноосными (рис. 4, *в*). Данное изменение происходит по закону, близкому к линейному. Для более детального изменения фактора формы было построено распределение числа частиц от *f* для покрытий, выполненных при силе тока 260 А и скорости подачи порошка 1,1 и 2,2 кг/ч (рис. 5). Анализ полученных данных свидетельствует, что при минимальном расходе порошка средний размер фактора формы не превышает 0,64 (рис. 5, *а*). При увеличении расхода порошка в два раза среднее значение *f* равно 0,8 (рис. 5, *б*), что подтверждает формирование практически равноосных частиц карбида ванадия.

При наплавке током 200 А фактор формы с увеличением расхода порошка до 1,5 кг/ч увеличивается от 0,74 до 0,81 и далее не меняется. При наплавке покрытий токами 180 и 160 А частицы VC в них описываются средним фактором формы 0,77 и 0,81 уже при минимальном расходе порошка (рис. 4, *в*).

Изменение объемной доли VC при варьировании скорости подачи присадочного порошка и силы тока можно связать, *во-первых*, с увеличением доли участия основного металла в наплавленном покрытии (рис. 3), *во-вторых*, с увеличением выгорания и окисления легирующих элементов в ходе плазменной наплавки при возрастании тока наплавки.

Морфология и размер частиц карбида ванадия связаны с металлургическими процессами, протекающими в ванне расплава, и с перераспределением легирующих элементов между фазами. В работе [18] показано, что исходный порошок ПР-Х18ФНМ содержит мелкодисперсные (менее 1 мкм) частицы VC. По данным [17, 23] при ППН средняя температура ванны расплава может дости-

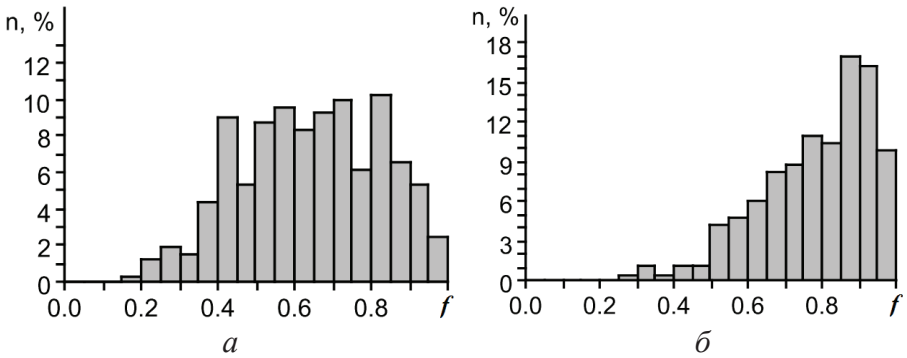


Рис. 5. *Распределение частиц VC в зависимости от фактора формы (f) в покрытиях, выполненных током 260 А при расходе порошка а) 1,1; б) 2,2 кг/ч*

гать 1500...1850 °С, а температура ванны под столбом плазмы может в два раза превосходить среднюю температуру ванны расплава [24].

Температура плавления карбида ванадия равна 2830 °С, а карбида M_7C_3 – 1665 °С [24]. Карбид ванадия начинает растворяться в аустените при температуре 1100...1150 °С, а выделяться из него при нагреве до 500...600 °С [21]. Поскольку сплав системы Fe-Cr-V-Mo-C содержит помимо ванадия такие карбидообразующие элементы, как Cr и Mo, образующие менее тугоплавкий карбид M_7C_3 (M_7C_3 растворяется при температурах 950...1150 °С), способный растворить в себе до 15 % ванадия, то карбид VC практически нерастворим в аустените [21]. В работе [12] показано, что в случае проведения аустенитизации Fe-Cr-V-Mo стали с высоким содержанием ванадия при температуре 1000 °С в ее микроструктуре будет находиться до 13 % частиц VC и до 8 % Cr_7C_3, а при 1200 °С доля карбида ванадия уменьшается до 10 % за счет растворения частиц мелкой фракции; карбид хрома полностью отсутствует уже при температуре аустенитизации 1150 °С. По данным [3] в жидкой стали или чугуне может растворяться до 3 % VC.

На основании вышесказанного, учитывая кратковременность (менее 1 минуты) существования ванны расплава и диффузионный характер растворения тугоплавких частиц, можно говорить лишь о частичном растворении частиц VC и более полном растворении карбида типа M_7C_3. Степень растворения частиц VC зависит от силы тока, полярности, скорости наплавки, скорости подачи присадочного порошка и их исходного размера.

Большое количество вытянутых частицы VC в зернах аустенитной матрицы с фактором формы меньше 0,7 в покрытиях, полученных при высоких значениях силы тока прямой полярности (220...260 А) и малых расходах (1,1...1,5 кг/ч), можно объяснить значительным растворением исходных частиц VC в перегретой жидкометаллической ванне. При дальнейшей кристаллизации оставшиеся исходные частицы получают направленный рост по границам зерен матрицы за счет диффузионного перераспределения углерода и ванадия между твердым раствором аустенита и карбидной фазой.

Увеличение расхода порошка более 1,5 кг/ч способствует уменьшению температуры жидкометаллической ванны и, следовательно, сокращению доли растворившихся исходных частиц карбида в ней. При дальнейшей кристаллизации и охлаждении многочисленные исходные частицы и вновь выпавшие равномерно подрастают, сохраняя равноосную форму.

В покрытиях, наплавленных при значениях тока 160...200 А, независимо от скорости подачи порошка частицы карбида ванадия формируются только равноосной формы (рис. 4, *в*). Это обусловлено меньшей температурой перегрева жидкометаллической ванны, что обеспечивает меньшую растворимость исходных частиц карбида ванадия.

Отдельно необходимо отметить формирование мелкодисперсных выделений строчек карбидов, которые хорошо просматриваются в аустенитных зернах (рис. 2, *б*, *в*). Данные дисперсные выделения, по-видимому, интенсивно формируются при температурах менее 800 °С, когда диффузионная подвижность легирующих элементов мала, а углерод еще способен активно диффундировать. Тип этих карбидных выделений можно определить только с применением высокоразрешающей электронной микроскопии. Несомненным фактом является то, что ППН позволяет формировать мульти модальное распределение упрочняющей фазы по размерам в объеме упрочненного слоя: микронные и субмикронные размеры частиц карбида ванадия в аустенитной матрице и эвтектические карбиды типа Cr_7C_3, что обеспечивает равномерность их распределения по объему. Это, по данным [16], является эффективным способом повышения износостойкости композиционных покрытий.

Выводы

При ППН порошком ПР-Х18ФНМ с увеличением тока в интервале 160...260 А глубина проплавления основного металла увеличивается и особенно интенсивно (в два раза в сравнении с наплавкой током 240 А) для значения 260 А во всем исследованном интервале скоростей подачи порошка (1,1...2,2 кг/ч). Наибольший уровень проплавления для всех значений тока наплавки наблюдается

при малом расходе порошка, и он изменяется от 0,1 до 1 мм при увеличении тока. Далее с увеличением расхода интенсивность проплавления уменьшается по линейному закону и для токов 160...240 А и расходе порошка 1,9...2,2 кг/ч не превышает 0,4 мм. С увеличением глубины проплавления (объемной доли основного металла в наплавленном покрытии с 2 до 33 %) уменьшается объемная доля карбида ванадия в упрочняющем слое на величину, достигающую 40 %.

Показано, что для интервала изменений тока от 160 до 200 А независимо от скорости подачи порошка средний размер частиц карбида ванадия равен 1,3...1,4 мкм, в случае наплавки током 220 А – 1,60...1,7 мкм, а для токов 240 и 260 А средний d растет по линейному закону с увеличением расхода порошка от 1,5 до 1,85 мкм.

Установлено, что в интервале токов 220...260 А с ростом скорости подачи порошка фактор формы частиц VC растет по линейному закону и при расходе более 1,5 кг/ч они становятся равноосными (f>0,7). При наплавке покрытий токами 160...200 А частицы VC в них описываются средним фактором формы больше 0,74 уже при минимальном расходе порошка.

Удлиненные частицы в основном располагаются по границам аустенитных зерен, а равноосные – в теле зерен и эвтектике.

Плазменная порошковая наплавка позволяет формировать мультимодальное распределение упрочняющей фазы по размерам в объеме упрочненного слоя: микронные и субмикронные размеры частиц карбида ванадия в аустенитной матрице и эвтектические карбиды типа Cr_7C_3, что обеспечивает равномерность их распределения по объему.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научно-исследовательских работ ТПУ № 862.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кульков С.Н., Гнюсов С.Ф. Карбидостали на основе карбидов титана и вольфрама. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 240 с.
2. Moghaddam E.G., Varahram N., Davami P. On the comparison of microstructural characteristics and mechanical properties of high-vanadium austenitic manganese steels with the Hadfield steel // Materials Science and Engineering A. – 2012. – V. 532. – P. 260–266.
3. Wei Shizhong, Zhu Jinhua, Xu Liujie, Long Rui. Effects of carbon on microstructures and properties of high vanadium high-speed steel // Materials and Design. – 2006. – V. 27. – P. 58–63.
4. The effect of thermal cycling by electron-beam surfacing on structure and wear resistance of deposited M2 steel / S.F. Gnyusov, A.A. Ignatov, V.G. Durakov, S.Yu. Tarasov // Applied Surface Science. – 2012. – V. 263. – P. 215–222.
5. Tokaji K., Horie T., Enomoto Y. Effects of microstructure and carbide spheroidization on fatigue behaviour in high V–Cr–Ni cast irons // International Journal of Fatigue. – 2006. – V. 28. – P. 281–288.
6. Дураков В.Г., Дампелон Б.В., Гнюсов С.Ф. Роль мелкодисперсных выделений карбида ванадия в повышении износостойкости покрытий из хромистого чугуна // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2009. – № 5. – С. 10–14.
7. Gnyusov S.F. Structure and Abrasive Wear Resistance of R6M5 Steel–Tungsten Carbide Composite Coatings // Technical Physics Letters. – 2012. – V. 38. – № 9. – P. 861–864.
8. Гнюсов С.Ф., Дураков В.Г., Маков Д.А. Формирование износостойких аустенитных покрытий с регулируемым карбидным упрочнением // ФИХОМ. – 2004. – № 6. – С. 54–60.
9. Effect of solidification rate on the morphology and distribution of eutectic carbides in centrifugal casting high-speed steel rolls / Yikun Luan, Nannan Song, Yunlong Bai, Xiuhong Kang, Dianzhong Li // Journal of Materials Processing Technology. – 2010. – V. 210. – P. 536–541.
10. Microstructure of the spray formed Vanadis 4 steel and its ultrafine structure / Fei Yan, Zhou Xu, Haisheng Shi, Junfei Fan // Materials Characterization. – 2008. – V. 59. – P. 592–597.
11. Косицина И.И., Сагарадзе В.В. Аустенитные стали различных систем легирования с карбидным упрочнением // Металлы. – 2001. – № 6. – С. 65–74.
12. Bilek P., Sobotová J., Jurči P. Evaluation of the microstructural changes in Cr-V ledeburitic tool steels depending on the austenitization temperature // Materials and technology. – 2011. – V. 45 (5). – P. 489–493.
13. Гнюсов С.Ф., Маков Д.А. Структура карбидной подсистемы композиционных покрытий на основе аустенитных сталей // Известия томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 120–124.
14. Effect of carbon contents on dry sliding wear behavior of high vanadium high speed steel / Ying Ping Ji, Su Jun Wu, Liu Jie Xu, Yan Li, Shi Zhong Wei // Wear. – 2012. – V. 294. – № 295. – P. 239–245.
15. Fontalvo G.A., Humer R., Mitterer C., Sammt K., Schemmel I. Microstructural aspects determining the adhesive wear of tool steels // Wear. – 2006. – V. 260. – P. 1028–1034.
16. Гнюсов С.Ф., Дураков В.Г. Электронный луч в формировании неравновесных структур. – Томск: Изд-во ТПУ, 2012. – 115 с.
17. Гладкий П.В., Переплетчиков Е.Ф., Рябцев И.А. Плазменная наплавка. – Киев: Екотехнология, 2007. – 292 с.
18. Влияние технологических параметров плазменной порошковой наплавки на формируемую структуру покрытий системы Fe-Cr-V-Mo-C / А.С. Дегтерёв, Б.Ф. Советченко, Е.А. Трущенко, С.Ф. Гнюсов // Сварка и диагностика. – 2011. – № 4. – С. 13–20.
19. Дегтерёв А.С., Гнюсов С.Ф. Влияние технологических параметров плазменной порошковой наплавки током прямой полярности на формируемую структуру Fe-Cr-V-Mo-C покрытий // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 87–94.
20. Дегтерёв А.С., Кирилкин М.С., Исакин И.А., Гнюсов С.Ф. Износ покрытий на основе системы Fe-Cr-V-Mo-C // Вестник науки Сибири. – 2012. – № 4 (5). – С. 118–123. URL: http://sjs.tpu.ru/journal/article/viewPDFInterstitial/432/372 (дата обращения: 25.06.2013).
21. Геллер Ю.А. Инструментальные стали. – М.: Металлургия, 1983. – 527 с.
22. Чернявский К.С. Стереология в материаловедении. – М.: Металлургия, 1977. – 280 с.
23. Нефедьев С.П. Особенности структуры и свойства поверхностных слоев углеродистых сталей с плазменным упрочнением и наплавкой комплексно-легированным белым чугуном: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Магнитогорск, 2012. – 18 с.
24. Лившиц Л.С., Хакимов А.Н. Металловедение сварки и термическая обработка сварных соединений. – М.: Машиностроение, 1989. – 336 с.

Поступила 26.08.2013 г.

UDC 621.791.927.2

EFFECT OF PLASMA SURFACING PARAMETERS ON VANADIUM CARBIDE MICROSTRUCTURE IN POWDER COATINGS BASED ON PR-Cr18VNiMo

Sergey F. Gnyusov,
Dr. Sc., Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30.
E-mail: gnusov@rambler.ru

Aleksandr S. Degterev,
Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30.
E-mail: Degterev@tpu.ru

The vital importance of the investigation is caused by forming the volume homogeneous structure and the phase composition of composite coatings to give them wide range of operational requirements. The paper seeks to study in detail the change of average volume fraction, size, carbide-vanadium particles shape factor, uniformity of their distribution depending on current intensity and the feed speed of PR-Cr18VNiMo powder in a plasma-powder deposition with the direct current. The microstructure analysis of the coatings was carried out with Olympus GX51 optical microscope supplied with SIAMS-700 image analyzer. The authors have carried out the phase composition investigations of the depositions using X-ray diffraction analysis by means of Shimadzu XRD-6000 diffractometer with CuK filtered α-radiation. The studies revealed the influence of plasma surfacing parameters such as current straight polarity and powder feed rate of PR-Cr18VNiMo on vanadium carbide microstructure. With the increasing powder feed rate in the range of current of 220...260 A the VC particle shape factor grows linearly. At rate exceeding 1,5 kg/h the VC particle shape factor become equiaxed. The use of surfacing coating currents of 160...200 A promotes the release of equiaxed particles. In this case their form factor does not depend on the powder feed rate.

Key words:
Plasma-jet hard-facing, composition coating, austenitic steel, vanadium carbide, structure.

REFERENCES

1. Kulkov S.N., Gnyusov S.F. *Karbidostali na osnove karbidov titana i volframa* [Carbide Steels Based on Carbides of Titanium and Tungsten]. Tomsk, NTL, 2006. 240 p.
2. Moghaddam E.G., Varahram N., Davami P. On the comparison of microstructural characteristics and mechanical properties of high-vanadium austenitic manganese steels with the Hadfield steel. *Materials Science and Engineering A*., 2012, vol. 532, pp. 260–266.
3. Wei Shizhong, Zhu Jinhua, Xu Liujie, Long Rui. Effects of carbon on microstructures and properties of high vanadium high-speed steel. *Materials and Design*, 2006, vol. 27, pp. 58–63.
4. Gnyusov S.F., Ignatov A.A., Durakov V.G., Tarasov S.Yu. The effect of thermal cycling by electron-beam surfacing on structure and wear resistance of deposited M2 steel. *Applied Surface Science*, 2012, vol. 263, pp. 215–222.
5. Tokaji K., Horie T., Enomoto Y. Effects of microstructure and carbide spheroidization on fatigue behaviour in high V-Cr-Ni cast irons. *International Journal of Fatigue*, 2006, vol. 28, pp. 281–288.
6. Durakov V.G., Dampelon B.V., Gnyusov S.F. Rol melkodispersnykh vydeleniy karbida vanadiya v povyshenii iznosostoykosti pokrytiy iz khromistogo chuguna [Role of disperse release vanadium carbide in increase of wear resistance of chromic pig-iron coverings]. *Strengthening technologies and coverings*, 2009, no. 5, pp. 10–14.
7. Gnyusov S.F. Struktura i abrazivnaya iznosostoykost kompozitsionnykh pokryty stal «P6M5 –WC» [Structure and Abrasive Wear Resistance of R6M5 Steel–Tungsten Carbide Composite Coatings]. *Technical Physics Letters*, 2012, vol. 38, no. 9, pp. 861–864.
8. Gnyusov S.F., Durakov V.G., Makov D.A. Formirovanie iznosostoykikh austenitnykh pokrytiy s reguliruemym karbidnym uprochneniem [Formation of wear resistant austenite coatings with regulated carbide hardening]. *Physics and chemistry of processing of materials*, 2004, no. 6, pp. 54–60.
9. Yikun Luan, Nannan Song, Yunlong Bai, Xiuhong Kang, Dianzhong Li. Effect of solidification rate on the morphology and distribution of eutectic carbides in centrifugal casting high-speed steel rolls. *Journal of Materials Processing Technology*, 2010, vol. 210, pp. 536–541.
10. Fei Yan, Zhou Xu, Haisheng Shi, Junfei Fan Microstructure of the spray formed Vanadis 4 steel and its ultrafine structure. *Materials Characterization*, 2008, vol. 59, pp. 592 – 597.
11. Kositsina I.I., Sagaradze V.V. Austenitnye stali razlichnykh sistem legirovaniya s karbidnym uprochneniem [Carbide hardened austenitic steels of different alloying systems]. *Metals*, 2001, no. 6, pp. 65–74.
12. Bilek P., Sobotová J., Jurči P. Evaluation of the microstructural changes in Cr-V ledeburitic tool steels depending on the austenitization temperature. *Materials and technology*, 2011, vol. 45 (5), pp. 489–493.
13. Gnyusov S.F., Makov D.A. Struktura karbidnoy podsistemy kompozitsionnykh pokrytiy na osnove austenitnykh staley [Structure of carbide subsystems of composite austenite steel based coatings]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 120–124.
14. Ying Ping Ji, Su Jun Wu, Liu Jie Xu, Yan Li, Shi Zhong Wei. Effect of carbon contents on dry sliding wear behavior of high vanadium high speed steel. *Wear*, 2012, vol. 294, no. 295, pp. 239–245.
15. Fontalvo G.A., Humer R., Mitterer C., Sammt K., Schemmel I. Microstructural aspects determining the adhesive wear of tool steels. *Wear*, 2006, vol. 260, pp. 1028–1034.
16. Gnyusov S.F., Durakov V.G. *Elektronny luch v formirovanii neravnovesnykh struktur* [Electronic beam in formation of nonequilibrium structures]. Tomsk, TPU Publ. house, 2012. 115 p.
17. Gladkiy P.V., Perepletchikov E.F., Ryabcev I.A. *Plazmennaya naplavka* [Plasma-jet hard-facing]. Kiev, Ekotehnologiya, 2007. 292 p.
18. Degteryov A.S., Sovetchenko B.F., Trushchenko E.A., Gnyusov S.F. Vliyanie tekhnologicheskikh parametrov plazmennoy

poroshkovoy naplavki na formiruemuyu strukturu pokrytiy sistemy Fe-Cr-V-Mo-C [Influence of technological parameters of plasma powder hard-facing on the formed structure of coverings of Fe-Cr-V-Mo-C system]. *Welding and diagnostics*, 2011, no. 4, pp. 13–20.
19. Degteryov A.S., Gnyusov S.F. Vliyanie tekhnologicheskikh parametrov plazmennoy poroshkovoy naplavki na formiruemuyu strukturu pokrytiy sistemy Fe-Cr-V-Mo-C [Influence of technological parameters of plasma powder hard-facing with direct polarity current on the formed structure of Fe-Cr-V-Mo-C coating]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 320, no. 2, pp. 87–94.
20. Degteryov A.S., Kirilkin M.S., Isakin I.A., Gnyusov S.F. Iznos pokrytiy na osnove sistemy Fe-Cr-V-Mo-C [Wear of coating on the basis of Fe-Cr-V-Mo-C system]. *Siberian Journal of Science*, 2012, no. 4 (5), pp. 118–123. Available at: http://sjs.tpu.ru/journal/article/viewPDFInterstitial/432/372 (accessed 25 June 2013).
21. Geller Yu.A. *Instrumentalnye stali* [Tool steels]. Moscow, Metallurgy, 1983. 527 p.
22. Chernyavskiy K.S. *Stereologiya v materialovedenii* [Stereometry in materials technology]. Moscow, Metallurgy, 1977. 280 p.
23. Nefedyev S.P. *Osobennosti struktury i svoystva poverkhnostnykh sloev uglerodistykh staley s plazmennym uprochneniem i naplavkoy kompleksno-legirovannym belym chugunom.* Avtoreferat Dis. kand. nauk [Features of structure and property of blankets of carbonaceous steels with plasma hardening and cladding with complex-alloyed white pig-iron. Cand. Diss.]. Magnitogorsk, 2012. 18 p.
24. Livshits L.S., Khakimov A.N. *Metallovedenie svarki i termicheskaya obrabotka svarnykh soedineniy* [Metallurgical science of welding and thermal processing of welded connections]. Moscow, Mechanical engineering, 1989. 336 p.

УДК 62–752+62–755

УРАВНОВЕШИВАНИЕ АВТОБАЛАНСИРОМ РОТОРА В УПРУГО-ВЯЗКО ЗАКРЕПЛЕННОМ КОРПУСЕ С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Филимонихин Геннадий Борисович,
д-р техн. наук, профессор кафедры деталей машин и прикладной механики
Кировоградского национального технического университета,
Украина, 25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8.
E-mail: filimonikhin@narod.ru, fgb@online.ua

Гончаров Валерий Владимирович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики
Кировоградского национального технического университета, Украина,
25006, г. Кировоград, пр. Университетский, 8. E-mail: matkora@yandex.ru

Изучается процесс уравновешивания автобалансиром статически неуравновешенного ротора, помещенного с возможностью вращения в тяжелый упруго-вязко закрепленный корпус с неподвижной точкой. Предложенная методика исследований может быть стандартной при решении подобных задач и включает следующие этапы:
- *составление упрощенных дифференциальных уравнений движения роторной системы, линеаризованных как по введенному малому параметру, так и по отклонениям системы от установившегося движения;*
- *составление замкнутой системы дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, определяющих движение ротора, его дисбаланс;*
- *проведение уравнений к безразмерному виду, их комплексное сворачивание и приведение к стационарному виду;*
- *составление характеристического уравнения и исследование его корней.*

В результате исследований установлено, что: принципиально возможно уравновесить ротор, только если условный составной ротор (образованный ротором и корпусом) длинный; при этом ротор имеет одну критическую скорость, и автобалансировка наступает при ее превышении; в процессе наступления автобалансировки сначала прекращаются быстрые движения корректирующих грузов относительно ротора, а потом они медленно движутся относительно ротора к автобалансировочному положению.

Ключевые слова:
Ротор, дисбаланс, автобалансир, основное движение, устойчивость движения.

Введение

Роторы многих центробежных машин – стиральных, экстракторов, сепараторов, центрифуг, осевых вентиляторов и пр. – установлены в корпус с возможностью вращения, а уже корпус закреплен упруго-вязко и совершает неплоское движение. В этих машинах дисбаланс ротора меняется в процессе выполнения технологических операций, поэтому его целесообразно уравновешивать на ходу пассивными автобалансирами (АБ) [1].

Наиболее полный обзор литературы по пассивной автобалансировке роторов приведен в [1]. Учет этого обзора и последних публикаций показывает, что на сегодня мало работ, в которых аналитиче-

ски исследуется автобалансировка ротора, совершающего неплоские движения [1–9]. При этом в них рассматриваются роторы, непосредственно установленные на опоры, и теоретически определяются только условия наступления автобалансировки, а переходные процессы не исследуются.

В данной работе изучается автобалансировка шаровым или роликовым АБ статически неуравновешенного ротора, помещенного с возможностью вращения в тяжелый упруго-вязко закрепленный корпус с неподвижной точкой. По предложенной методике [1, 9], которая может быть стандартной при исследовании роторных машин с осесимметричными опорами, определены условия наступления автобалансировки и оценены переходные процессы.

Описание теоретико-механической модели ротора и автобалансира

Ротор массы m_r установлен в корпус массы m_c с возможностью поворота вокруг собственной продольной оси, являющейся его главной центральной осью инерции (рис. 1). Ротор вращается относительно корпуса с постоянной угловой скоростью ω. Корпус удерживают опоры: шарнирная – в точке O, благодаря которой ротор имеет неподвижную точку O на продольной оси, и две упруго-вязкие, которые в недеформированном состоянии перпендикулярны продольной оси ротора и действуют в перпендикулярных направлениях.

Для описания движения системы используем три тройки правых ортогональных осей (рис. 1). Неподвижные оси $Oxyz$ введены для положения статического равновесия роторной системы так, что ось Oz направлена вдоль продольной оси ротора, оси Ox, Oy направлены параллельно направлениям упруго-вязких опор. Подвижные оси $Ouvw$ жестко связаны с корпусом, а $O\xi\eta\zeta$ – с ротором. В исходном положении роторной системы оси всех трех систем совпадают (рис. 1, *а*).

Относительно осей $Ouvw$ тензоры инерции ротора и корпуса имеют вид

$$\mathbf{J}_r = \mathrm{Diag}(A_r, A_r, C_r),\ \ \mathbf{J}_c = \mathrm{Diag}(A_c, A_c, C_c).$$

Упруго-вязкие опоры с коэффициентами жесткости k_x, k и вязкости b_x, b_y имеют радиус-векторы точек приложения в проекциях на оси $Oxyz$ (рис. 1, *а*)

$$\boldsymbol{r}_{B_1} = (-x_B, 0, z_B)^{\mathrm{T}},\ \ \boldsymbol{r}_{B_2} = (0, x_B, z_B)^{\mathrm{T}}.$$

В плоскости $P_0(\zeta=d_0)$ на расстоянии r_0 от продольной оси ротора находится точечная масса m_0, образующая статический дисбаланс s_0. Не ограничивая общности, считаем, что в начальный момент времени вектор s_0 направлен параллельно оси $O\xi$. В плоскости $P(\zeta=d)$, близкой к плоскости P_0, установлен АБ с n одинаковыми корректирующими грузами (КГ) – шарами или роликами массы m. КГ в АБ катятся без скольжения по кольцевой дорожке, при этом расстояние от продольной оси ротора до центра шара или продольной оси ролика равно r. Как это принято в теории пассивных АБ [1–9], пренебрегаем действием сил тяжести на систему и считаем, что: радиус КГ намного меньше радиуса их беговой дорожки; КГ не препятствуют движению друг друга.

Модель движения ротора и корпуса приведена на рис. 1. Вначале происходят повороты корпуса с ротором вокруг точки O на углы Резаля α, β (рис. 1, *б*), при этом оси $Oxyz$ переходят в оси $Ouvw$, задающие текущее положение корпуса. Потом ротор поворачивается вокруг продольной оси $Ow=O\zeta$ на угол $\gamma=\omega t$ (рис. 1, *в*), вследствие чего оси $Ouvw$ переходят в оси $O\xi\eta\zeta$, задающие текущее положение ротора.

Положение массы дисбаланса или i-го КГ в плоскостях соответственно P_0 и P определяются абсолютными φ_i, $/i=\overline{0,n}/$ (рис. 2, *а*) или относительны-

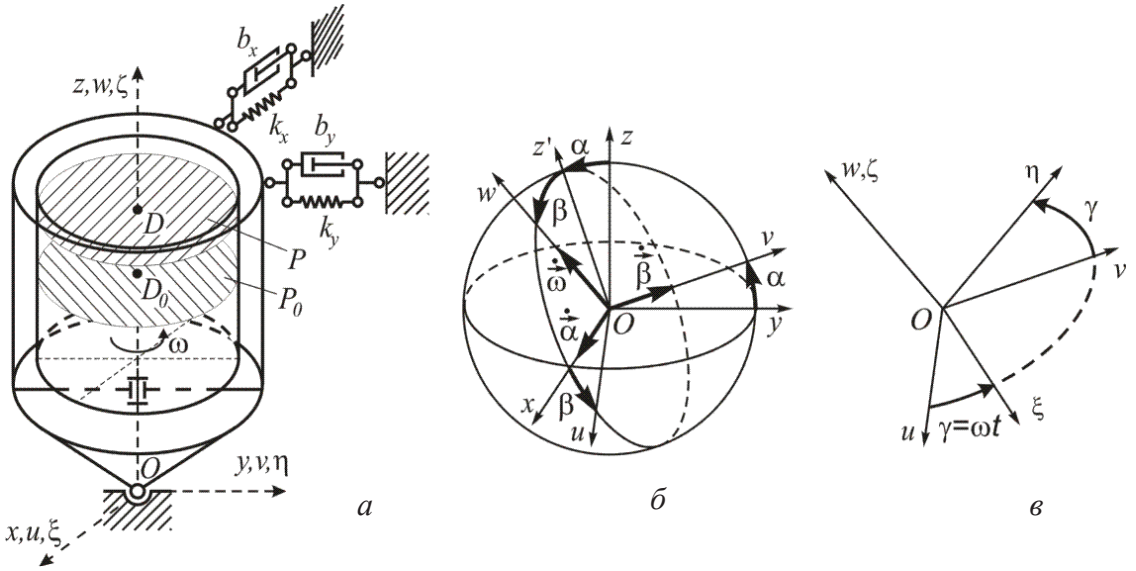


Рис. 1. *Кинематика движения ротора и корпуса*

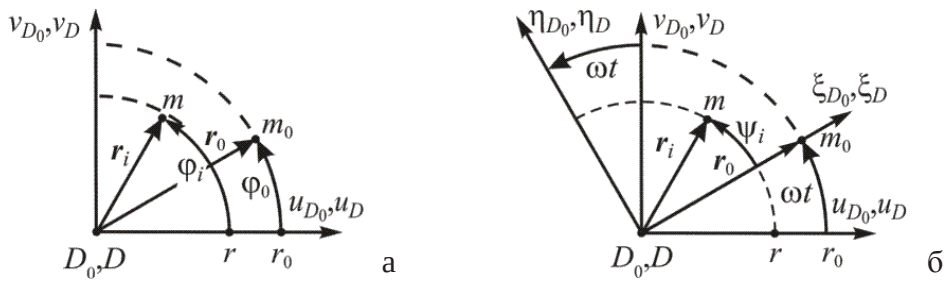


Рис. 2. *Углы, задающие положения массы дисбаланса и КГ относительно ротора*

ми ψ_i, $/i=\overline{0,n}/$ (рис. 2, *а*) углами, отсчитываемыми соответственно между осью $D_0u_{D_0}(Du_D)$ или $D_0\xi_{D_0}(D\xi_D)$ и относительным радиус-вектором r_i массы дисбаланса (i=0) или центров масс КГ ($i=\overline{0,n}$). Абсолютные и относительные углы связаны соотношениями

$$\varphi_i = \omega t + \psi_i, \ /i=\overline{0,n}/, \ \varphi_0 = \omega t, \ \psi_0 = 0. \qquad (1)$$

При движении i-го КГ по дорожке на него действует сила вязкого сопротивления $br(\omega-\dot{\varphi}_i)$, где b – коэффициент силы вязкого сопротивления, и $r(\omega-\dot{\varphi}_i)$ – скорость движения центра масс i-го КГ относительно ротора.

Составление упрощенных дифференциальных уравнений движения роторной системы в неподвижной системе координат

Упрощенные дифференциальные уравнения движения системы составляются по методике, предложенной в работе [9], с использованием уравнений Лагранжа II рода

$$d(\partial T/\partial \dot{\boldsymbol{q}})/dt - \partial T/\partial \boldsymbol{q} = -\partial \Pi/\partial \boldsymbol{q} - \partial \Phi/\partial \dot{\boldsymbol{q}},$$

$$\boldsymbol{q} = (\alpha, \beta, \varphi_1, ...\varphi_n)^{\mathrm{T}}, \qquad (2)$$

где T и Π – соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, Φ – диссипативная функция Релея; $\boldsymbol{q}$ – вектор обобщенных координат, определяющих движение системы. Упрощающие предположения касаются отношений малости величин [9]:

$$|\alpha|, |\beta|, |x|, |y|, |z| << 1; \quad |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}|, |\dot{x}|, |\dot{y}|, |\dot{z}| << 1;$$

$$mn << m_r, m_c \sim 1.$$

Кинетическая энергия системы равна $T=T_r+T_c+\Sigma_{i=0}^{n}T_i$, где T_r – кинетическая энергия ротора, T_c – массивного корпуса, T_i – массы дисбаланса или i-го КГ.

Кинетическая энергия ротора и корпуса равна кинетической энергии вращательного движения этих тел вокруг неподвижной точки O:

$$T_r = \boldsymbol{\omega}_r^T \mathbf{J}_r \boldsymbol{\omega}_r / 2; \ T_c = \boldsymbol{\omega}_c^T \mathbf{J}_c \boldsymbol{\omega}_c / 2.$$

где $\boldsymbol{\omega}_r \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}\omega + \dot{\alpha}\beta)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\omega}_c \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}\dot{\alpha}\beta)^{\mathrm{T}}$ – угловые скорости вращения, соответственно, ротора и корпуса в проекциях на подвижные оси $Ouvw$ с точностью до величин 2-го порядка малости включительно. Тогда с этой же точностью

$$T_r \approx [A_r(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + C_r(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)]/2,$$

$$T_c \approx A_c(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)/2.$$

Кинетическая энергия i-го КГ определяется как сумма кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и вращательного движения вокруг центра масс $T_i=T_i^{(tr)}+T_i^{(rot)}$, $/i=\overline{0,n}/$.

Кинетическая энергия массы дисбаланса и поступательного движения i-го КГ соответственно равна

$$T_0^{(tr)} = m_0 \boldsymbol{v}_0^2 / 2, \ T_i^{(tr)} = m\boldsymbol{v}_i^2 / 2, \ /i=\overline{1,n}/, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\rho}_i$, $/i=\overline{0,n}/$ – вектор скорости массы дисбаланса или центра масс КГ; $\boldsymbol{\rho}_0 \approx (r_0\cos\varphi_0, r_0\sin\varphi_0, d_0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\rho}_i \approx (r\cos\varphi_i, r\sin\varphi_i, d)^{\mathrm{T}}$, $/i=\overline{0,n}/$ – радиус-векторы соответственно массы дисбаланса и центра масс КГ в системе $Ouvw$; $\boldsymbol{\omega}_r \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}\omega + \dot{\alpha}\beta)^{\mathrm{T}}$ – вектор угловой скорости вращения вектора $\boldsymbol{\rho}_i$ вокруг точки O в системе $Ouvw$.

С точностью до величин 1-го порядка малости включительно

$$\boldsymbol{v}_0 \approx \begin{pmatrix} \dot{\beta}d_0 - \dot{\varphi}_0 r_0 \sin\varphi_0; \\ -\dot{\alpha}d_0 + \dot{\varphi}_0 r_0 \cos\varphi_0; \\ \dot{\alpha}r_0 \sin\varphi_0 - \dot{\beta}r_0 \cos\varphi_0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{v}_i \approx \begin{pmatrix} \dot{\beta}d - \dot{\varphi}_i r \sin\varphi_i; \\ -\dot{\alpha}d + \dot{\varphi}_i r \cos\varphi_i; \\ \dot{\alpha}r \sin\varphi_i - \dot{\beta}r \cos\varphi_i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \ /i=\overline{1,n}/. \qquad (4)$$

Из (3), (4) с точностью до величин 2-го порядка малости включительно получим

$$T_0^{(tr)} \approx m_0 r_0 \dot{\varphi}_0 [\dot{\varphi}_0 r_0 - 2d_0(\dot{\alpha}\cos\varphi_0 + \dot{\beta}\sin\varphi_0)]/2,$$

$$T_i^{(tr)} \approx mr\dot{\varphi}_i [\dot{\varphi}_i r - 2d(\dot{\alpha}\cos\varphi_i + \dot{\beta}\sin\varphi_i)]/2,$$

$$/i=\overline{1,n}/.$$

Кинетическая энергия вращательного движения i-го КГ с точностью до величин 2-го порядка малости включительно равна $T_i^{(rot)} \approx \kappa^{(rot)} mr^2\dot{\varphi}_i^2/2$, $/i=\overline{0,n}/$, где $\kappa^{(rot)}=2/5$ – для шаров и $\kappa^{(rot)}=1/2$ – для цилиндрических роликов.

Введем обобщенные координаты S_u, S_v, определяющие проекции суммарного дисбаланса точечной массы и КГ на оси Ou, Ov соответственно

$$s_u = d_0/d \cdot m_0 r_0 \cos\varphi_0 + mr\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i,$$

$$s_v = d_0/d \cdot m_0 r_0 \sin\varphi_0 + mr\sum_{i=1}^{n}\sin\varphi_i. \qquad (5)$$

Тогда кинетическая энергия системы с точностью до величин 2-го порядка малости включительно примет вид

$$T \approx [A\dot{\alpha}^2 + A\dot{\beta}^2 + C_r(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)]/2 -$$

$$-d(\dot{\alpha}\dot{s}_v - \dot{\beta}\dot{s}_u) + (m_0 r_0^2 \dot{\varphi}_0^2 + \kappa m r^2 \sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}_i^2)/2, \quad (6)$$

где $A=A_r+A_c$, $\kappa=1+\kappa^{(rot)}$, $/i=\overline{0,n}/$.

Потенциальная энергия, накопленная двумя опорами с точностью до величин 2-го порядка малости включительно равна:

$$\Pi \approx (k_\alpha \alpha^2 + k_\beta \beta^2)/2, \; k_\alpha = k_y z_B^2, \; k_\beta = k_x z_B^2. \quad (7)$$

Диссипативная функция Релея $\Phi=\Phi_c+\Sigma_{i=1}^{n}\Phi_i$, где $\Phi_c\approx(b_\alpha\dot{\alpha}^2+b_\beta\dot{\beta}^2)/2$ – составляющая корпуса (для упруго-вязких опор – с точностью до величин второго порядка малости включительно), $b_\alpha=b_y z_B^2$, $b_\beta=b_x z_B^2$; $\Phi_i=br^2(\dot{\varphi}_i-\omega)^2/2$, $/i=\overline{0,n}/$ – составляющая i-го КГ. Тогда с рассматриваемой точностью

$$\Phi \approx [b_\alpha \dot{\alpha}^2 + b_\beta \dot{\beta}^2 + br^2 \sum_{i=1}^{n} (\dot{\varphi}_i - \omega)^2]/2. \quad (8)$$

Подставив (6)–(8) в (2), получим в случае изотропных упруго-вязких опор ($k_\beta=k_\alpha$, $b_\beta=b_\alpha$) систему $(2+n)$ обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно обобщенных координат α, β, $_i$, $/i=\overline{0,n}/$:

$$A\ddot{\alpha} + \omega C_r \dot{\beta} + b_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha - d\ddot{s}_v = 0,$$

$$A\ddot{\beta} - \omega C_r \dot{\alpha} + b_\alpha \dot{\beta} + k_\alpha \beta + d\ddot{s}_u = 0, \quad (9)$$

$$mr\kappa\ddot{\varphi}_i + br(\dot{\varphi}_i - \omega) = md(\ddot{\alpha}\cos\varphi_i + \ddot{\beta}\sin\varphi_i),$$

$$/i = \overline{1,n}/. \quad (10)$$

Основные движения системы и дифференциальные уравнения для исследования их устойчивости

На основных движениях ротор уравновешен и вращается вокруг собственной продольной оси, поэтому:

$$\alpha = \beta = 0, \; s_u = s_v = 0. \quad (11)$$

Устойчивость основных движений можно исследовать по этим обобщенным координатам. Но система уравнений (9) незамкнута. К ней нужно добавить минимальное количество уравнений, являющихся комбинациями соответствующих дифференциальных уравнений движения КГ.

Замкнутая система дифференциальных уравнений

Умножим каждое уравнение в (10) поочередно на $\sin\varphi_i$ и сложим, затем – на $\cos\varphi_i$ и сложим. Полученные уравнения в окрестности определенного установившегося движения линеаризуются и с учетом (1), (5) принимают вид

$$\kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b(\dot{s}_u + \omega s_v)/m =$$

$$= -mnd\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(p_1 \sin 2\omega t + p_2 \cos 2\omega t) + \\ +\ddot{\beta}(1 - p_1 \cos 2\omega t + p_2 \sin 2\omega t) \end{bmatrix}/2,$$

$$\kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b(\dot{s}_v - \omega s_u)/m =$$

$$= mnd\begin{bmatrix} \ddot{\alpha}(1 + p_1 \cos 2\omega t - b_2 \sin 2\omega t) + \\ +\ddot{\beta}(p_1 \sin 2\omega t + p_2 \cos 2\omega t) \end{bmatrix}/2, \quad (12)$$

где $p_1 = (\sum_{i=1}^{n} \cos 2\tilde{\psi}_i)/n$, $p_2 = (\sum_{i=1}^{n} \sin 2\tilde{\psi}_i)/n$, $\tilde{\psi}_i$, $/i=\overline{0,n}/$ – угловое положение i-го КГ в установившемся движении.

Введем угол ϑ и параметр p:

$$\cos\vartheta = p_1/p, \; \sin\vartheta = p_2/p, \; p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

и сдвинем время: $2\omega t+\vartheta=2\omega\tilde{t}$ или $t=\tilde{t}-\vartheta/(2\omega)$. Тогда уравнения (12) примут вид

$$\kappa(\ddot{s}_u + 2\omega\dot{s}_v - \omega^2 s_u) + b(\dot{s}_u + \omega s_v)/m =$$

$$= -mnd[\ddot{\alpha} p \sin 2\omega\tilde{t} + \ddot{\beta}(1 - p\cos 2\omega\tilde{t})]/2,$$

$$\kappa(\ddot{s}_v - 2\omega\dot{s}_u - \omega^2 s_v) + b(\dot{s}_v - \omega s_u)/m =$$

$$= mnd[\ddot{\alpha}(1 + p\cos 2\omega\tilde{t}) + \ddot{\beta} p \sin 2\omega\tilde{t}]/2. \quad (13)$$

Уравнения (9) не изменятся при переходе к новому времени, поэтому уравнения (13) замыкают их относительно неизвестных функций α, β, s_v, s_u. Уравнения (9), (13) – это система линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. В нее входит 11 параметров ω, d, m, n, κ, A, C_r, b_α, b, p, k_α.

Приведение уравнений к безразмерному и комплексному виду, переход к подвижной системе координат

Уравнения в безразмерном виде. Введем безразмерные обобщенные координаты и выделим минимальное количество независимых безразмерных параметров, полностью описывающих динамику системы.

Сделаем следующие преобразования системы (9), (13):

а) введем безразмерные время $\tilde{\tau}$ и обобщенные координаты $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{s}_u$, $\tilde{s}_v$:

$$\tilde{\tau} = \omega_0 \tilde{t}, \; \tilde{\alpha} = \alpha / l_\alpha, \; \tilde{\beta} = \beta / l_\alpha,$$

$$\tilde{s}_u = s_u / l_s, \; \tilde{s}_v = s_v / l_s, \quad (14)$$

где ω_0, l_α, l_s – масштабные коэффициенты;

б) поделим первые два уравнения на $A\omega_0^2 l_\alpha$, а последние два – на $\kappa\omega_0^2 l_s$;

в) введем безразмерные параметры $\tilde{\omega}$, $\tilde{C}$, $\tilde{b}_\alpha$, $\tilde{b}$, $\tilde{m}$, и коэффициенты l_α, l_s, ω_0:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \; \tilde{C} = \frac{C_r}{A}, \; \tilde{b}_\alpha = \frac{b_\alpha}{A\omega_0}, \; \tilde{b} = \frac{b}{\kappa m \omega_0},$$

$$\tilde{m} = \frac{mnd^2}{2\kappa A}, \; \tilde{m} << 1, \; l_\alpha = \frac{l_s d}{A}, \; l_s = mr, \; \omega_0 = z_B\sqrt{\frac{k_x}{A}}.$$

Получим уравнения движения в безразмерном виде

$$\tilde{\alpha}'' + \tilde{b}_\alpha \tilde{\alpha}' + \tilde{\alpha} + \tilde{\omega}\tilde{C}\tilde{\beta}' - \tilde{s}_v'' = 0,$$

$$\tilde{\beta}'' + \tilde{b}_\alpha \tilde{\beta}' + \tilde{\beta} - \tilde{\omega}\tilde{C}\tilde{\alpha}' + \tilde{s}_u'' = 0,$$

$$\tilde{s}_u'' + 2\tilde{\omega}\tilde{s}_v' - \tilde{\omega}^2 \tilde{s}_u + \tilde{b}(\tilde{s}_u' + \tilde{\omega}\tilde{s}_v) =$$

$$= -\tilde{m}[\tilde{\alpha}'' p \sin 2\tilde{\omega}\tilde{\tau} + \tilde{\beta}''(1 - p\cos 2\tilde{\omega}\tilde{\tau})],$$

$$\tilde{s}_u'' + 2\tilde{\omega}\tilde{s}_v' - \tilde{\omega}^2 \tilde{s}_u + \tilde{b}(\tilde{s}_u' + \tilde{\omega}\tilde{s}_v) =$$

$$= \tilde{m}[\tilde{\alpha}''(1 + p\cos 2\tilde{\omega}\tilde{\tau}) + \tilde{\beta}'' p \sin 2\tilde{\omega}\tilde{\tau}]. \quad (15)$$

Таким образом, динамику системы описывают 5 безразмерных координат (4 зависимые – $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{s}_u$, $\tilde{s}_v$ и одна независимая – $\tilde{\tau}$) и 6 независимых безразмерных параметров $\tilde{\omega}$, $\tilde{m}$, $\tilde{C}$, $\tilde{b}_\alpha$, $\tilde{b}$, p.

Уравнения в комплексном виде. В комплексных переменных (после комплексного псевдосворачивания) уравнения принимают вид двух пар комплексно-сопряженных уравнений, и в каждое из них входит меньшее число переменных.

Умножим четные уравнения системы (15) на мнимую единицу $\boldsymbol{i}$, после чего прибавим и отнимем их от соответствующих нечетных уравнений, получим:

$$L_1 = \alpha_z'' + \tilde{b}_\alpha \alpha_z' + \alpha_z - \boldsymbol{i}\tilde{\omega}\tilde{C}\alpha_z' + s_{zu}''\boldsymbol{i} = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \quad (16)$$

$$L_2 = s_{zu}'' - 2\tilde{\omega}\boldsymbol{i}s_{zu}' - \tilde{\omega}^2 s_{zu} + \tilde{b}(s_{zu}' - \tilde{\omega}\boldsymbol{i}s_{zu}) - \\ -\tilde{m}(\alpha_z'' + \bar{\alpha}_z'' p e^{2i\tilde{\omega}\tilde{\tau}})i, \quad \bar{L}_2 = 0, \quad (17)$$

где $\alpha_z = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\boldsymbol{i}$, $s_{zu} = \tilde{s}_u + \tilde{s}_v \boldsymbol{i}$.

Дифференциальные уравнения движения роторной системы в подвижной системе координат – приведение уравнений к стационарному виду.

Введем в рассмотрение еще одну подвижную систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, полученную при повороте системы $Ouvw$ вокруг оси Ow на угол $\omega\sim\tau\sim=\omega t+\vartheta/2$, и новые угловые переменные δ_1,θ_1: $\alpha=\delta_1\cos\tilde{\omega}\tilde{\tau}-\theta_1\sin\tilde{\omega}\tilde{\tau}$, $\beta=\delta_1\sin\tilde{\omega}\tilde{\tau}+\theta_1\cos\tilde{\omega}\tilde{\tau}$. Выпишем связь между соответствующими переменными в системах координат $Ouvw$, $O\xi\eta\zeta$, $O\xi_1\eta_1\zeta_1$:

$$\alpha_z = \delta_z e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}, \; s_{zu} = s_z e^{i\tilde{\omega}\tilde{\tau}}, \quad (18)$$

где

$$\delta_z = \tilde{\delta}_1 + \tilde{\theta}_1\boldsymbol{i}, \; \tilde{\delta}_1 = \delta_1/l_\alpha, \; \tilde{\theta}_1 = \theta_1/l_\alpha,$$
$$s_z = \tilde{s}_{\xi_1} + \tilde{s}_{\eta_1}\boldsymbol{i}, \; \tilde{s}_{\xi_1} = s_{\xi_1}/l_s, \; \tilde{s}_{\eta 1} = s_{\eta 1}/l_s,$$
$$\tilde{s}_{\xi_1} = \tilde{s}_0\cos(\vartheta/2) + \sum_{i=1}^{n}\cos(\psi_i - \vartheta/2),$$
$$\tilde{s}_{\eta_1} = \tilde{s}_0\sin(\vartheta/2) + \sum_{i=1}^{n}\sin(\psi_i - \vartheta/2), \quad (19)$$

$\tilde{s}_0=m_0r_0d_0/(mrd)$ – безразмерный статичный дисбаланс.

Подставив (18) в уравнения (16), (17) получаем:

$$L_1 = \delta_z'' + [\tilde{b}_\alpha + (2-\tilde{C})\tilde{\omega}\boldsymbol{i}]\delta_z' + (a_{11} + a_{12}\boldsymbol{i})\delta_z + \\ +(s_z'' + 2\tilde{\omega}\boldsymbol{i}s_z' - \tilde{\omega}^2 s_z)\boldsymbol{i} = 0, \quad \bar{L}_1 = 0, \quad (20)$$

$$L_2 = s_z'' + \tilde{b}s_z' - \tilde{m}(a_z - \bar{a}_z p) = 0, \quad \bar{L}_2 = 0, \quad (21)$$

где

$$a_z = (\delta_z'' + 2\tilde{\omega}\boldsymbol{i}\delta_z' - \tilde{\omega}^2\delta_z)\boldsymbol{i},$$
$$a_{11} = 1 + (\tilde{C}-1)\tilde{\omega}^2, \; a_{12} = \tilde{b}_\alpha\tilde{\omega}.$$

С (11), (14), (18), (19) следует, что на основных движениях обобщенные комплексные координаты δ_z, $\bar{\delta}_z$, s_z, $\bar{s}_z$ в подвижной системе координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ равны 0:

$$\delta_z = \bar{\delta}_z = 0, \; s_z = \bar{s}_z = 0.$$

Уравнения (20), (21) стационарны, поэтому устойчивость основных движений роторной системы можно исследовать по обобщенным координатам δ_z, $\bar{\delta}_z$, s_z, $\bar{s}_z$ с применением теории устойчивости стационарных решений линейных автономных дифференциальных уравнений.

Оценка величин безразмерных параметров $\tilde{\omega}, \tilde{m}, \tilde{C}, \tilde{b}_\alpha, \tilde{b}, p$

Параметр $\tilde{\omega}$ соответствует угловой скорости вращения ротора и теоретически может меняться в пределах от 0 до $+\infty$. Нужно определить такие области изменения $\tilde{\omega}$, в пределах которых будут устойчивыми основные движения.

Для реальных роторных машин масса КГ намного меньше массы ротора с корпусом, поэтому $\tilde{m}<<1$. В соответствии с уравнениями (20) корпус и ротор как бы образуют составной ротор с осевыми моментами инерции $A=A_c+A_r$, $C=C_r$, вычисленными относительно осей, проходящих через неподвижную точку. Этот ротор в зависимости от величины параметра $\tilde{C}$: $\tilde{C}<1$ – длинный; $\tilde{C}\approx1$ – сферический; $\tilde{C}>1$ – короткий. Поскольку $\tilde{C}=C_r/(A_c+A_r)$, то при массивном корпусе составной ротор будет длинным, даже если сам ротор короткий. Поэтому будем считать, что $\tilde{C}\sim1$. В реальных роторных машинах силы сопротивления обеспечивают затухание переходных процессов, поэтому будем считать, что $\tilde{b}_\alpha$, $\tilde{b}\sim1$.

Так как

$$1 - p^2 = (2/n^2)\sum_{i,j=1}^{n}\sin^2(\tilde{\psi}_i - \tilde{\psi}_j) \geq 0, \quad (22)$$

то при произвольном изменении дисбаланса и количества КГ параметр p принимает значения в пределах от 0 до 1. Случай $p=1$ является критическим, так как разность уравнений (21) при этом дает уравнение

$$s_z'' + \bar{s}_z'' + \tilde{b}(s_z' + \bar{s}_z') = 0,$$

и, следовательно, характеристическое уравнение имеет один нулевой корень. Из (22) следует, что равенство $p=1$ выполняется только в случае

$$\tilde{\psi}_i = \tilde{\psi} + \sigma_i\pi, \quad \sigma_i = \{0, 1\} \; / \; i = \overline{1, n}/, \quad (23)$$

где $\tilde{\psi}\in[0,\pi)$ – некоторый фиксированный угол. В реальном АБ количество КГ всегда больше двух. Поэтому равенство (23) не выполняется, так как КГ мешают друг другу занимать положение на прямой, проходящей через центр АБ.

Окончательно имеем такие оценки величин безразмерных параметров:

$$\tilde{\omega} \in (0, +\infty), \quad \tilde{m} << 1, \quad \tilde{C}, \tilde{b}_\alpha, \tilde{b} \sim 1, \; p \in [0, 1).$$

Исследование устойчивости основных движений и характера переходных процессов

Запишем характеристическое уравнение системы (20), (21) в виде

$$X\bar{X} - \tilde{m}(X\bar{Y} + \bar{X}Y) + (1-p^2)\tilde{m}^2 Y\bar{Y} = 0, \quad (24)$$

где

$$X = \lambda(\lambda + \tilde{b})\begin{bmatrix} (\lambda + \tilde{\omega}\boldsymbol{i})^2 + \\ +\tilde{b}_\alpha(\lambda + \tilde{\omega}\boldsymbol{i}) + 1 - \\ -\tilde{C}(\tilde{\omega}\boldsymbol{i} + \lambda)\tilde{\omega}\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \quad Y = (\lambda + \tilde{\omega} i)^4.$$

Нулевое приближение. В нулевом приближении ($\tilde{m}$=0) корни уравнения (24) равны

$$\lambda_i = 0, \ /i = 1,2/, \quad \lambda_i = -\tilde{b}, \ /i = 3,4/,$$

$$\lambda_{\overline{5,6}} = -\left(\tilde{b}_\alpha \pm \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - x)/2}\right)/2 -$$

$$-\boldsymbol{i}\left(\tilde{\omega}(2 - \tilde{C}) \mp \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} + x)/2}\right)/2, \ \lambda_{\overline{7,8}} = \overline{\lambda}_{\overline{5,6}},$$

где

$$x = 4 + \tilde{C}^2\tilde{\omega}^2 - \tilde{b}_\alpha^2, \ y = 2\tilde{b}_\alpha\tilde{\omega}\tilde{C}.$$

Корни $\lambda_{\overline{3,8}}$ имеют отрицательную действительную часть, поэтому соответствующие им частные решения асимптотически устойчивы при любых $\tilde{\omega}$. Они определяют быстрые переходные процессы, при которых КГ замедляют движение относительно ротора и устанавливается движение ротора, соответствующее суммарному дисбалансу от массы дисбаланса и КГ. Скорость протекания этих переходных процессов зависит от условий закрепления ротора, его массо-инерционных характеристик, скорости вращения, сил вязкого сопротивления, действующих на КГ, и не зависит от уравновешиваемого дисбаланса, положения плоскости движения КГ, количества КГ и их текущих положений. Поэтому возможна отдельная оптимизация указанных параметров с целью скорейшего наступления автобалансировки.

Первое приближение. Для окончательного определения условий асимптотической устойчивости основных движений необходимо найти в первом приближениях корни $\lambda_{1,2}$. Подставляя $\lambda_{1,2}=\tilde{m}\lambda_{1,2}^{(1)}$ в уравнение (24) с точностью до малых второго порядка малости включительно относительно $\tilde{m}$, получим

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2)\tilde{b}^2(\lambda_{1,2}^{(1)})^2 - 2\tilde{b}\tilde{\omega}^4 a_{11}\lambda_{1,2}^{(1)} + \tilde{\omega}^8\Sigma = 0. \qquad (25)$$

Уравнение (25) будет иметь корни с отрицательными действительными частями тогда и только тогда, когда $a_{11}=1+(\tilde{C}-1)\tilde{\omega}^2<0$ или в размерном виде

$$\omega > z_B\sqrt{k_x / (A_c + A_r - C_r)}, \ A_c + A_r > C_r.$$

Таким образом, ротор можно уравновесить, только если составной ротор, образованный ротором и корпусом, вытянутый ($A_c+A_r>C_r$).

Из уравнения (25) находим нулевые корни в первом приближении

$$\lambda_{1,2} = \tilde{m}[a_{11} \pm \sqrt{a_{11}^2 - (a_{11}^2 + a_{12}^2)\Sigma}]\tilde{\omega}^4 / [\tilde{b}(a_{11}^2 + a_{12}^2)].$$

Корни $\lambda_{1,2}$ соответствуют медленным переходным процессам – реакции КГ на движение ротора, установившееся в нулевом приближении. КГ медленно стремятся к автобалансировочному положению. При чрезмерном количестве КГ существует семья установившихся движений, и КГ стремятся к одному из движений этой семьи. Скорость протекания этих переходных процессов зависит уже и от уравновешиваемого дисбаланса, положения плоскости движения КГ и их текущих положений.

Выводы

1. Принципиально возможно уравновесить ротор, только если $A_c+A_r>C_r$ – составной ротор (образованный ротором и корпусом), вытянутый.
2. При этом ротор имеет одну критическую скорость $\omega_1^*=z_B\sqrt{k_x/(A_c+A_r>C_r)}$ и автобалансировка наступает при ее превышении.
3. Переходные процессы, характеризующие наступление автобалансировки, делятся на: быстрые, при которых прекращаются быстрые движения КГ относительно ротора и устанавливается устойчивое движение ротора, соответствующее текущему суммарному дисбалансу; медленные, при которых КГ приходят в автобалансировочное положение, медленно двигаясь относительно ротора.

Работа выполнена в соответствии с госбюджетной темой Министерства образования и науки Украины № 0105U001506, период выполнения 2012–2014 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
2. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. – 84 с.
3. Нестеренко В.П. Теория и практика устройств автоматической балансировки роторов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук.– Новосибирск, 1990. – 34 с.
4. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plain automatic balancing // Machine Dynamics Problems. – 2001. – V. 25. – № 3/4. – P. 139–152.
5. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanic. – 2004. – V. 24. – № 1. – P. 1–24.
6. Automatic two-plane balancing for rigid rotors / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – V. 43. – Iss. 6. – P. 527–541.
7. Two-plane automatic balancing: A symmetry breaking analysis / D.J. Rodrigues, A.R. Champneys, M.I. Friswell, R.E. Wilson // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – V. 46. – Iss. 9. – P. 1139–1154.
8. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2009. – V. 23. – Iss. 3. – P. 884–896.
9. Філімоніхін Г.Б., Гончаров В.В. Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир // Збірник наукових праць КНТУ. – 2009. – Вип. 22. – С. 357–363.

Поступила 10.07.2013 г.

UDC 62–752+62–755

BALANCING OF ROTOR IN VISCO-ELASTIC FIXED CASING WITH FIXED POINT USING AUTO-BALANCER

Gennadiy B. Filimonikhin,
Dr. Sc., Kirovograd National Technical University, Ukraine, 25006, Kirovograd,
University avenue, 8. E-mail: filimonikhin@narod.ru, fgb@online.ua

Valery V. Goncharov,
Cand. Sc., Kirovograd National Technical University,
Ukraine, 25006, Kirovograd, University avenue, 8. E-mail: matkora@yandex.ru

The authors have studied the process of balancing statically unbalanced rotor placed in visco-elastic fixed casing with fixed point by auto-balancer. The proposed research methodology may be standard in solving similar problems and includes the following stages:

- *derivation of simplified differential equations of motion of rotor's system linearized by the entered small parameter and by the system deviations from steady motion;*
- *obtaining of closed system of differential equations for generalized coordinates defining rotor motion and its unbalance;*
- *transformation of the equations to the dimensionless form, their complex folding and reduction to stationary form;*
- *obtaining of characteristic equation and studying its roots.*

The results of the research are: it's possible to balance rotor only if a conditional composite rotor (formed by rotor and casing) is long; in this case rotor has only one critical speed and auto-balancing occurs on its exceeding; at auto-balancing at first the fast motions of corrective weights stop relative to the rotor and then they move slowly relative to the rotor to auto-balancing positions.

Key words:
Rotor, unbalance, auto-balancer, main motion, stability of motion.

REFERENCES

1. Filimonikhin G.B. *Balancing and vibration protection rotors avtobalansyramy solid corrective weights* [Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами]. Kyrovograd, KNTU Publ., 2004. 352 p.
2. Nesterenko V.P. *Avtomaticheskaya balansirovka rotorov priborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody* [Automatic rotor balancing devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, Tomsk University Publ., 1985. 84 p.
3. Nesterenko V.P. *Teoriya i praktika ustroystv avtomaticheskoy balansirovki rotorov*. Avtoreferat diss. dokt. tekhnicheskikh nauk [Theory and practice of automatic rotor balancing devices. Abstract of Dr. diss.]. Novosibirsk, 1990. 34 p.
4. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Two-plain automatic balancing. *Machine Dynamics Problems*, 2001, vol. 25, no. 3/4, pp. 139–152.
5. Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H. Single-Plain Auto-Balancing of Rigid Rotors. *Technische Mechanic*, 2004, vol. 24, no. 1, pp. 1–24.
6. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Automatic two-plane balancing for rigid rotors. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2008, vol. 43, pp. 527–541.
7. Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E. Two-plane automatic balancing: a symmetry breaking analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 1139–1154.
8. Lu Chung-Jen, Wang Ming-Cheng, Huang Shih-Hsuan. Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, vol. 23, pp. 884–896.
9. Filimonikhin G.B., Goncharov V.V. Method of differential equations of motion of rotor systems avtobalansyramy and its application to rotor systems – a massive building – avtobalansyr [Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор – масивний корпус – автобалансир]. *Zbirnyk naukovykh prac KNTU*, 2009, Iss. 22, pp. 357–363.

УДК 533.6.071.4

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАЗООБРАЗНЫХ ПРИМЕСЕЙ ОТ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

Добросельский Константин Геннадьевич,
канд. техн. наук, доцент, ст. науч. сотр. лаборатории физических основ энергетических технологий Института теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Лаврентьева, д. 1;
ст. науч. сотр. отдела прикладной физики Новосибирского национального исследовательского государственного университета, Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, д. 2. E-mail: dobroselsky@mail.ru

Актуальность работы обусловлена воздействием тепловых источников на окружающую среду посредством главным образом вредных газообразных примесей, которые необходимо контролировать.
Цель работы: *построить достоверную модель распространения примесей в приземном воздухе и получить оценочную методику расчета концентраций примесей.*
Методы исследования: *геометрическое и динамическое подобие физической модели распространения струи в поперечном потоке и реального рассеяния летучих примесей для получения расчетной формулы концентрации вредного газа на разных расстояниях от источника выбросов.*
Результаты: *Разработана физическая модель распространения вредных газообразных примесей от вертикальных тепловых источников в приземном атмосферном слое. Получена эмпирическая формула, которая позволяет оценить концентрации газовых примесей на различных расстояниях от низких и средних источников выбросов. Приведены значения расстояний, на которых будет максимальная концентрация, для различных высот источников выбросов. Проведен сравнительный анализ методики авторов и одной из официальных методик расчета концентрации вредных примесей для одной из высот.*

Ключевые слова:
Модель, газообразные примеси, струя, высота выбросов, концентрация.

Около половины загрязняющих атмосферу веществ приходится на долю газообразных примесей. Источниками загрязнения атмосферы дымовыми газами – продуктами сгорания – являются практически все тепловые двигатели и установки, сжигающие углеводородное топливо.

Исследования дымовых уходящих газов топливосжигающих установок показывают, что в их составе основными загрязнителями атмосферного воздуха являются оксиды углерода (до 50 %), оксиды серы (до 20 %), оксиды азота (до 6...8 %), углеводороды (до 5...20 %).

Газообразные примеси наиболее опасны для окружающей среды, так как трудно улавливаются и легко переносятся на большие расстояния. Распространенными источниками загрязнения атмосферы являются трубы.

Существующие модели и методики рассеяния газообразных примесей содержат большое количество параметров, зависимость которых от метеоусловий сложна и плохо изучена. Расчеты по ним сильно разнятся [1, 2]. Наибольшее число результатов получено для высоких источников вредных выбросов и далеко от них [3–7].

Большое воздействие на окружающую среду оказывают низкие и средние источники, в частности котельные, располагающиеся вблизи жилых и промышленных зон. Действие таких источников исследовано недостаточно. Данная работа частично восполняет этот пробел.

Предпосылки модели распространения газовых примесей.

1. Основными параметрами, влияющими на распространение газообразных примесей в атмосферном воздухе, являются направление и скорость ветрового потока, скорость выбросов [3, 8].
2. Выбросы газообразных примесей, скорость упорядоченного оседания которых практически равна нулю, – турбулентные струи, распространяющиеся в поперечном ветровом потоке.
3. Газовоздушную струю выбросов можно считать практически воздушной уже вблизи источника. Рассеяние примесей в атмосферном приземном слое осуществляется в конечном итоге под действием диффузии переносящей среды (ветрового, воздушного потока).
4. Подъем струи выбросов за счет избыточной температуры (плавучести) не учитывается [8].
5. Профиль концентраций газообразной примеси в факеле выбросов подобен профилю избыточных температур в поперечном сечении струи [9, 10].

Для моделирования рассеяния газообразных примесей в реальной атмосфере необходимо соблюдать механическое (физическое) подобие модели, под которым подразумеваются одновременно геометрическое, кинематическое и динамическое подобия [11, 12]. Выполнение полного подобия практически невозможно, однако и частичность его, тем более в случае развитых турбулентных течений, вполне достаточна в пределах качественной оценки рассеяния газообразных веществ. Более подробно корректность предложенного моделирования рассмотрена ниже.

Физическая модель изучаемого нами течения представляет собой воздушную осесимметричную струю, которая выбрасывается из трубы высотой H=0,22...0,3 м и диаметром d=0,022 м под прямым углом к направлению движения воздушного потока. На рис. 1 представлена полученная автором задымленная струя. Для исследования струи в сносящем потоке применялся аэродинамический канал [13] длиной 5,5 м и поперечным сечением 0,8·0,5 м.

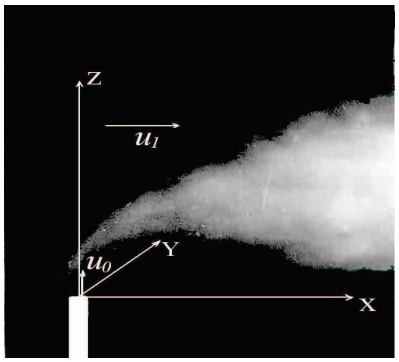


Рис. 1. *Вертикальная струя в поперечном потоке*

Исследования проводились для относительных скоростных напоров q=0,85... 6,12 ($q=u_0^2/u_1^2$, где u_0 – максимальная скорость струи на срезе трубы; u_1 – скорость сносящего потока) с изотермическими и слабонеизотермическими (критерий Архимеда $\mathrm{Ar}=(gd\cdot\Delta T_0)/(2u_0^2\cdot T_1)=2{,}8\cdot10^{-4}...1{,}0\cdot10^{-3}$, где g=9,8 м/с^2 – ускорение свободного падения; ΔT_0 – разность абсолютных температур в струе и сносящем потоке, К; T_1 – абсолютная температура потока, К) струями. Плотность, кинематическая вязкость струй и сносящего потока принимались одинаковыми (относительная погрешность этих величин для рассматриваемых разностей температур струи и потока не превышала 5 %).

Геометрическое подобие легко достижимо. Натурные диаметры источников выбросов (например, котельные, вентиляционные трубы) лежат в пределах 0,5...1,5 м. Для диаметра используемых нами модельных труб коэффициент $M_l=l_n/l_m\approx23...68$ (l_n, l_m – какой-либо размер соответственно натуры и модели), что соответствует высотам реальных труб $H\approx5...20$ м.

Масштаб скорости $M_u=u_n/u_m$=1,6...6 (u_n, u_m – характерные скорости исследуемых течений соответственно в натуре и модели), что соответствует скорости атмосферных течений 3...10 м/с и воздушному потоку в канале u_1=1,7...1,9 м/с. Отсюда скорость выбросов в натуре $u_n\approx4...28$ м/с при скорости модельных струй (в устье источника) u_0=2,4...4,7 м/с.

Значения чисел Рейнольдса для воздушных струй, формирующихся в вертикальных трубах, составляли $\mathrm{Re}_0=2{,}7\cdot10^3...6{,}9\cdot10^3$, где $\mathrm{Re}_0=u_0d/\nu$ (ν – кинематическая вязкость воздуха, м^2/с). В центральной части канала был сформирован равномерный поток с числом $\mathrm{Re}_1\approx8{,}5\cdot10^4$, где $\mathrm{Re}_1=u_1D/\nu$ (D – условный диаметр канала, который определялся из равенства площадей поперечного сечения канала и круглой трубы: $a\cdot b=\pi D^2/4$. Откуда $D=\sqrt{(4ab)/\pi}\approx0{,}71$м).

Реальные атмосферные течения имеют числа $\mathrm{Re}_1>10^5$, а струи газообразных выбросов – $\mathrm{Re}_0>10^4$. Однако это неполное подобие чисел Рейнольдса для натуры и модели не оказывает серьезного влияния на достоверность модельного исследования, так как расширение струи не зависит от плотности, вязкости и числа Рейнольдса, если оно достаточно велико [10].

Реальная струя примесей достаточно быстро приобретает температуру, близкую к окружающей среде [14].

В [15] приведены расчеты, на основании которых сделано заключение, что при расчете возвышения струи над устьем источника нецелесообразно делать поправку на подъем струи за счет плавучести, а следует учитывать лишь подъем под влиянием динамических сил. Это обеспечит некоторый запас и большую надежность расчетов ожидаемых концентраций вредных веществ.

В работе [3] показано, что при увеличении скорости набегающего потока и других постоянных параметрах высота подъема факела резко уменьшается, и при скорости потока более 3 м/с уже не наблюдается значительного эффекта всплытия. В реальности скорости ветрового потока могут быть значительно выше. Там же приводятся данные по влиянию разности температур факела и потока на тепловой подъем, однако даже при разности температур ΔT=182 К относительный тепловой подъем факела составляет всего единицу.

Одной из основных характеристик распространения выбросов от труб является определение эффективной высоты выброса с помощью выражений для подъема шлейфа (определение оси струи).

Измерения скоростного и температурного полей, визуальные наблюдения и фотосъемка задымленных струй показали, что наиболее достоверно ось струи описывается точками максимальной температуры в поперечных сечениях неизотермической струи. Было показано, что ось струи, построенная по максимальным температурам, лежит ниже построенной по максимальным скоростям [16, 17].

Для относительных скоростных напоров q=2,0; 3,10; 5,55 слабонеизотермической струи было получено эмпирическое выражение для точек максимальной температуры [16] (поднятие струи над источником):

$$\bar{z}_0 = q^{0,51}\bar{x}^{0,33}, \qquad (1)$$

где $\bar{x}$, $\bar{z}_0$ – относительные координаты ($\bar{x}=x/d$, $\bar{z}_0=z_0/d$), отсчитываемые относительно устья источника (трубы); x, z_0 – координаты точек максимальной температуры в поперечных сечениях струи.

Считая, что профиль концентраций газообразной примеси подобен профилю избыточных температур в поперечном сечении струи, были определены границы теплового пограничного слоя струи.

На основе опытных данных был получен безразмерный профиль избыточной температуры в вертикальной плоскости XZ [18], который может быть представлен в виде:

$$\frac{t-t_1}{t_m-t_1}=\exp\left\{-\frac{0,7}{\mathrm{tg}^2\,\alpha_{0,5t}}\left(\frac{z-z_0}{x}\right)^2\right\}, \qquad (2)$$

где t – температура в измеряемой точке, °С; t_m – максимальная температура в рассматриваемом поперечном сечении струи, °С; t_1 – температура сносящего потока, °С; z – вертикальная координата измеряемой точки; $\mathrm{tg}\alpha_{0,5t}$ – тангенс угла α, образованного точкой половинной избыточной максимальной температуры и осью X в рассматриваемом поперечном сечении струи (рис. 2).

Вблизи источника были определены значения тангенсов отдельно выше ($\mathrm{tg}\alpha^{+}_{0,5t}$) и ниже ($\mathrm{tg}\alpha^{-}_{0,5t}$) оси в поперечных сечениях струи.

По этим опытным данным были получены эмпирические зависимости

$$\mathrm{tg}\,\alpha^{+}_{0,5t}=\frac{0,39q^{0,43}}{\bar{x}^{0,75}} \text{ и } \mathrm{tg}\,\alpha^{-}_{0,5t}=\frac{0,54q^{0,28}}{\bar{x}^{0,75}}. \qquad (3)$$

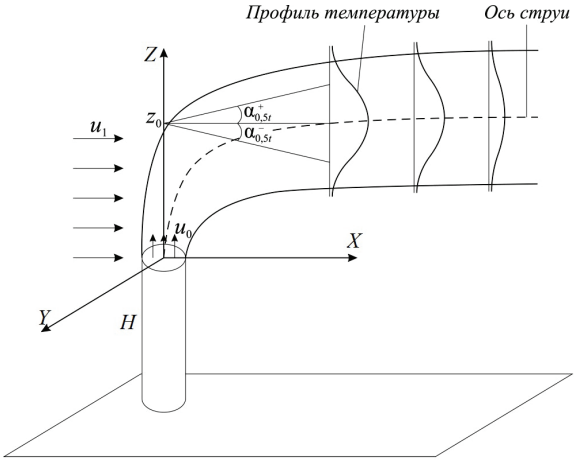


Рис. 2. *Геометрические и кинематические характеристики струи*

Используя приведенные выше рассуждения и зависимости, был построен профиль относительных, избыточных температур слабоизотермических струй в горизонтальной плоскости XY.

$$\frac{t-t_1}{t_m-t_1}=\exp\left\{-\frac{0,7}{\mathrm{tg}^2\beta_{0,5t}}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}, \qquad (4)$$

где $\mathrm{tg}\beta_{0,5t}$ – тангенс угла, образованного точкой половинной избыточной осевой температуры и осью X в рассматриваемом горизонтальном поперечном сечении струи; y – поперечная координата (рис. 1).

Для некоторых поперечных сечений ($\bar{x}$=0,9...17,25) были найдены значения тангенса угла $\beta_{0,5t}$, которые могут быть выражены зависимостью

$$\mathrm{tg}\,\beta_{0,5t}=\frac{0,29q^{0,86}}{\bar{x}^{0,75}}. \qquad (5)$$

Для значений осевой относительной безразмерной температуры была получена зависимость [17], которая может быть представлена в виде ($\bar{x}$=2,73...20,91):

$$\frac{t_m-t_1}{t_0-t_1}=\frac{1}{\bar{x}^{0,75}}, \qquad (6)$$

где t_0 – температура в начальном сечении струи (в устье источника), °С.

Используя (2) и (6), можно получить выражение для профиля относительной температуры.

$$\frac{t-t_1}{t_0-t_1}=\frac{1}{\bar{x}^{0,75}}\cdot\exp\left\{-\frac{0,7}{\mathrm{tg}^2\,\alpha_{0,5t}}\left(\frac{z-z_0}{x}\right)^2\right\}. \qquad (7)$$

На рис. 3 представлены профили температуры, построенные по (7), с использованием (1) и (3).

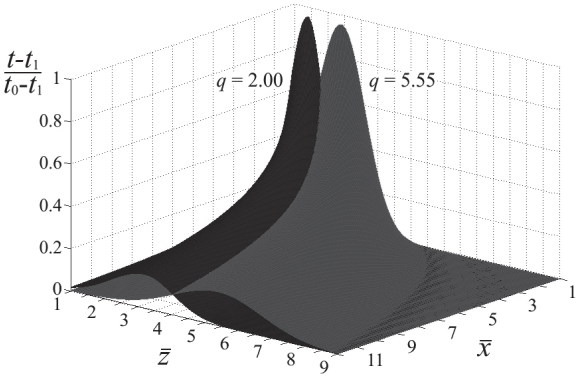


Рис. 3. *Безразмерные профили температуры в плоскости XZ*

Подобный профиль (рис. 3) будет и для относительной концентрации газообразных примесей, если сделать замену t (температура) на c (концентрация).

На основе (1)–(7) была получена формула для расчета концентрации c газообразных примесей, выбрасываемых в атмосферу через одиночные источники (трубы), считая фоновую концентрацию незначительной.

$$c=A(\bar{x})\cdot c_0\cdot\exp\left\{\frac{-0,7}{\mathrm{tg}^2\,\alpha_{0,5}}\left(\frac{\bar{z}-(\bar{z}_0+\bar{H})}{\bar{x}}\right)^2\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{-0,7}{\mathrm{tg}^2\,\beta_{0,5}}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)^2\right\},$$

где $A(\bar{x})$ определяется (6) при $\bar{x}$<20 и $A(\bar{x})2,1q^{0,3}/\bar{x}$ при $\bar{x}$>20; c_0 – концентрация примеси в устье источника; $\bar{z}_0$ – положение осевой линии струи (точки максимальной температуры в поперечных сечениях неизотермических струй) выбросов относительно устья источника; $\bar{H}=H/d$ – относительная высота источника выбросов; $\bar{z}=z/d$ – вертикальная относительная координата, отсчитываемая относительно поверхности Земли; $\bar{y}=y/d$ – поперечная относительная координата; $\mathrm{tg}\alpha_{0,5}$, $\mathrm{tg}\beta_{0,5}$ – тангенсы углов, образованных точкой половинной избыточной максимальной температуры (концентрации) и продольной осью X, в рассматриваемом попереч-

Таблица. *Концентрация газообразных примесей в точках касания струей выбросов поверхности Земли при заданных высотах труб и относительной скорости*

q	$\bar{H}$					
	5	**10**	**12,5**	**15**	**17,5**	**20**
2,0	98/0,016	157/0,01	186/0,0084	216/0,0072	246/0,0064	275/0,0057
3,1	110/0,016	169/0,01	199/0,009	228/0,008	258/0,0069	288/0,006
5,55	133/0,016	192/0,011	221/0,0096	251/0,0085	281/0,0076	310/0,0069

ном сечении струи соответственно в вертикальной XZ и горизонтальной XY плоскостях.

Вблизи источника ($0<\bar{x}<20$) $\mathrm{tg}\alpha_{0,5}$ и $\mathrm{tg}\beta_{0,5}$ определяются (3) и (5) соответственно. Далеко от источника ($\bar{x}>20$) $\mathrm{tg}\alpha_{0,5}\approx0,10$, $\mathrm{tg}\beta_{0,5}\approx0,12$ [18].

Используя математические преобразования можно получить оценочные значения концентраций газообразных примесей и на поверхности Земли ($\bar{z}=0$), определив предварительно место касания струи. Это будет происходить достаточно далеко от источника, где $\mathrm{tg}\alpha_{0,5}\approx0,10$, $\mathrm{tg}\beta_{0,5}\approx0,12$. Для конкретного значения q и относительной высоты трубы $\bar{H}$ можно найти подъем (шлейфа) струи ($\bar{z}_0+\bar{H}$) над поверхностью Земли, определив сначала расстояние $\bar{x}_0$, когда подъем струи над источником будет максимальным, используя (3) для $\mathrm{tg}\bar{\alpha}_{0,5t}$ и приравняв его к 0,1 и далее, подставив в (1).

$$\bar{x}_0=\left(\frac{0,54q^{0,28}}{0,1}\right)^{4/3},\ \bar{z}_{\max}=q^{0,51}\bar{x}_0^{\,0,33}.$$

Продифференцировав выражение для концентрации (при $\bar{y}=0$и $\bar{z}=0$)

$$\frac{c}{c_0}=\frac{2,1q^{0,3}}{\bar{x}}\cdot\exp\left\{\frac{-0,7}{\mathrm{tg}^2\alpha_{0,5}}\left(\frac{\left(\bar{z}_{\max}+\bar{H}\right)}{\bar{x}}\right)^2\right\}$$

и приравняв полученное выражение к нулю, можно определить место касания струи с поверхностью Земли ($\bar{x}_\text{К}$) и относительную концентрацию примеси $\bar{c}_\text{к}=c_\text{к}/c_0$ в этом месте.

В таблице приведены данные для координаты касания струи $\bar{x}_\text{К}$ и относительной концентрации примеси $\bar{c}_\text{к}$ (после косой черты) в зависимости от относительного динамического напора q и высоты источника выбросов $\bar{H}$.

Для сравнения были проведены расчеты по методикам ОНД-86 (пример 1 из приложения 3) [2]. Были взяты следующие условия: высота трубы источника выбросов H=20 м, диаметр трубы D=1 м, скорость выхода газовоздушной смеси u_0=7 м/с, перегрев газовоздушной смеси ΔT=100 К, скорость сносящего воздушного потока u_1=4 м/с. Коэффициент, зависящий от температурной стратификации A=200. Были получены следующие результаты: расстояние x_m=252 м от источника выбросов, на котором относительная приземная концентрация при неблагоприятных метеорологических условиях и опасной скорости ветра достигает максимального значения $c_m/c_0=2,93\cdot10^{-4}$; расстояние x_{mu}=336 м от источника выбросов, на котором при скорости ветра u_1, отличающейся от опасной скорости ветра и неблагоприятных метеорологических условиях относительная приземная концентрация достигает максимального значения $c_{mu}/c_0=2,16\cdot10^{-4}$. Это соответствует нашим расчетам (таблица $\bar{H}$=20, $q\approx3,1$) $\bar{c}_\text{к}$=0,006 и $\bar{x}_\text{К}$=288, что несколько отличается от полученных результатов по ОНД-86. Однако расчеты по нашим формулам достаточно просты и дают оценку верхней границы с некоторым запасом. Для холодных выбросов ($\Delta T\approx0$) по ОНД-86 $c_m/c_0=0,92\cdot10^{-3}$, x_m=114 м, а $c_{mu}/c_0=0,68\cdot10^{-3}$, x_{mu}=152 м. Такое большое отличие в значениях x для холодных и нагретых выбросов маловероятно, принимая во внимание обзор литературы, приведенный выше.

В [7] проведен анализ применимости ряда наиболее известных методик расчета рассеивания вредных примесей в атмосфере в районе КАТЭК. Разброс получился большой как между отдельными методиками, так и с натурными измерениями, в десятки раз.

Выводы

Разработанная модель позволяет быстро оценить рассеяние газообразных примесей, распространяющихся от низких и средних источников высотой 5...20 м в воздухе и на поверхности Земли для скоростей ветровых потоков 3...10 м/с и скорости выбросов 4...20 м/с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Защита атмосферы от промышленных загрязнений. Справ. изд.: в 2-х ч. Ч. 2. / пер. с англ. / под ред. С. Калверта, Г.М. Инглунда. – М.: Металлургия, 1988. – 712 с.
2. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий (ОНД-86). – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 93 с.
3. Рихтер Л.А., Волков Э.П., Кормилицын В.И. Тепловой подъем газов из дымовых труб ТЭС // Теплоэнергетика. – 1973. – № 2. – С. 52–57.
4. Волков Э.П., Фаткуллин Р.М. Расчет поля среднегодовых приземных концентраций выбросов ТЭС // Теплоэнергетика. – 1983. – № 4. – С. 39–43.
5. Исследование подъема дымового факела над устьем газоотводящих труб ТЭС / С.А. Фадеев, Э.П. Волков, Е.И. Гаврилов, В.Б. Прохоров // Теплоэнергетика. – 1984. – № 1. – С. 57–59.
6. Егоров С.С., Гаврилов Е.И. Инженерная методика расчета приземных осредненных долгопериодных концентраций выбросов тепловых электростанций // Теплоэнергетика. – 1991. – № 4. – С. 66–69.

7. Волков Э.П., Гаврилов Е.И., Фаткуллин Р.М. Экспериментальная проверка методик расчета рассеивания в атмосфере вредных примесей от высотных источников в районе КАТЭК // Теплоэнергетика. – 1984. – № 6. – С. 45–48.
8. Лейкин И.Н. Проектирование вентиляционных и промышленных выбросов в атмосферу. – М.: Химия, 1970. – 132 с.
9. Аксенов А.А. Смешение газов при вдуве низконапорной струи в поперечный поток // Изв. РАН. Сер. МЖГ. – 1996. – № 3. – С. 67–74.
10. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях / пер. с англ. – М.: Энергия, 1979. – 408 с.
11. Мхитарян А.М. Аэродинамика. – М.: Машиностроение, 1976. – 448 с.
12. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1965. – 388 с.
13. Добросельский К.Г. Методика оценки распространения вредных выбросов от вентиляционных шахт и дымовых труб в приземном слое атмосферы: автореф. дис.... канд. техн. наук. – Владивосток, 1995. – 26 с.
14. Шагапов В.Ш., Гудкова О.С. Распространение паро-газокапельных струй в атмосфере // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 2001. – Т. 37. – № 3. – С. 313–321.
15. Андреев П.И. Рассеяние в воздухе газов, выбрасываемых промышленными предприятиями. – М.: Госстройиздат, 1952. – 90 с.
16. Добросельский К.Г. Геометрия слабонапорной струи в поперечном воздушном потоке // Теплофизика и аэромеханика. – 2001. – Т. 8. – № 2. – С. 199–203.
17. Добросельский К.Г. Вертикальная слабонапорная струя в поперечном потоке // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78. – № 6. – С. 143–147.
18. Добросельский К.Г. Динамические и тепловые характеристики струи, вдуваемой по нормали к поперечному потоку // Теплофизика и аэромеханика. – 2004. – Т. 11. – № 1. – С. 79–86.

Поступила 10.09.2013 г.

UDC 533.6.071.4

METHOD FOR EVALUATING DISTRIBUTION OF GASEOUS IMPURITIES FROM HEAT SOURCES

Konstantin G. Dobroselsky,
Cand. Sc., Institute of Thermophysics of SB RAS,
Russia, 630090, Novosibirsk, Academician Lavrentyev avenue, 1;
National Research Novosibirsk State University, Russia, 630090, Novosibirsk,
Pirogov street, 2. E-mail: dobroselsky@mail.ru

Relevance of the work is caused by the influence of heat sources on the environment mainly by harmful gaseous impurities which must be monitored.
The main aim of the study *is to build a reliable model of distribution of impurities in ground air and to obtain an evaluation methodology for calculating the concentrations of impurities.*
The methods used in the study: *the geometric and dynamic similarity of physical model of jet propagation in cross flow and real scattering of volatiles to obtain the calculation formula of harmful gas concentrations at different distances from the emission source.*
The results: *The authors have developed the physical model of distribution of harmful gaseous impurity extending from vertical thermal sources in a ground atmospheric layer. The empirical formula for calculating gas impurity concentration at different distances from low and average sources of emission was obtained. The paper introduces the values of the distances with maximum concentration for various heights of emission sources. The authors carried out the comparative analysis of peronal method and one of the official methods for calculating the concentration of harmful impurities for one of the heights.*

Key words:
Model, gaseous impurities, jet, height emissions, concentration.

REFERENCES

1. *Zashchita atmosfery ot promyshlennykh zagryazneniy* [Handbook of air pollution. P. 2] Ed. by S. Kalvert, H.M. Englund. Moscow, Metallurgiya, 1988. 712 p.
2. *Metodika rascheta kontsentratsiy v atmosfernom vozdukhe vrednykh veshchestv, soderzhashchikhsya v vybrosakh predpriyatiy (OND-86)* [The methods of calculating concentrations of harmful substances emitted by industrial enterprises in the atmospheric air (OND-86)]. Leningrad, Gidrometizdat, 1987. 93 p.
3. Richter L.A., Volkov E.P., Kormilitsyn V.I. Teplovoy podem gazov iz dymovykh trub TES [The heat-induced rise of flue gases from the chimney stacks of thermal power plants]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1973, no. 2, pp. 52–57.
4. Volkov E.P., Fatkullin R.M. Raschet polya srednegodovykh prizemnykh kontsentratsiy vybrosov TES [Calculations of the field of average annual ground level concentrations of the emissions from thermal power plants]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1983, no. 4, pp. 39–43.
5. Fadeev S.A., Volkov E.P., Gavrilov E.I., Prokhorov V.B. Issledovanie podema dymovogo fakela nad ustem gazootvodyashchikh trub TES [Investigation of a smoke plume rise above the mouth of gas-discharging chimneystacks of thermal power plants]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1984, no. 1, pp. 57–59.
6. Egorov S.S., Gavrilov E.I. Inzhenernaya metodika rascheta prizemnykh osrednennykh dolgoperiodnykh kontsentratsiy vibrosov teplovykh elektrostantsiy [The engineering methods of calculation of ground level averaged long-term concentrations of emis-

sions from thermal power plants]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1991, no. 4, pp. 66–69.
7. Volkov E.P., Gavrilov E.I., Fatkullin R.M. Eksperimentalnaya proverka metodik rascheta rasseivaniya v atmosphere vrednykh primesey ot vysotnykh istochnikov v rayone KATEK [An experimental verification of the methods for calculating atmospheric dispersion of harmful impurities emitted from tall sources in the area of the Kansk-Achinsk coal basin]. *Teploenergetika – Thermal Engineering*, 1984, no. 6, pp. 45–48.
8. Leykin I.N. *Proektirovanie ventilyatsionnykh i promyshlennykh vybrosov v atmosferu* [Design of ventilation and industrial atmospheric emissions]. Moscow, Khimiya, 1970. 132 p.
9. Aksenov A.A., Gudzovskii A.V., Dyadkin A.A., Tishin A.P. Smeshenie gazov pri vduve nizkonapornoy strui v poperechny potok [Gas mixing on injection of a low head jet into the cross flow]. *Izv. RAN, Ser. MZhG – Mekhanika zhidkostey i gazov*, 1996, no. 3, pp. 67–74.
10. Reynolds A.J. *Turbulentnye techeniya v inzhenernykh prilozheniyakh* [Turbulent flows in engineering]. Moscow, Energiya, 1979. 408 p.
11. Mkhitaryan A.M. *Aerodinamika* [Aerodynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1976. 448 p.
12. Sedov L.I. *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike* [Dimensional and similarity method used in mechanics]. Moscow, Nauka, 1965. 388 p.
13. Dobroselskiy K.G. *Metodika otsenki rasprostraneniya vrednykh vybrosov ot ventilyatsionnykh shakht i dymovykh trub v prizemnom sloe atmosfery. Avtorefeferat kand. nauk* [The procedure of evaluating the propagation of harmful emissions from ventilation shafts and chimney stacks in the ground level layer of the atmosphere. Abstract of Cand. Sc. Diss.]. Vladivostok, 1995. 26 p.
14. Shagapov V.Sh., Gudkova O.S. Rasprostranenie paro-gazokapelnykh struy v atmosphere [The propagation of vapor gas droplet jets in the atmosphere]. *Izv. RAN, Physics of the atmosphere and the oceans*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 313–321.
15. Andreev P.I. *Rasseyanie v vozdukhe gazov, vybrasyvaemykh promyshlennymi predpriyatiyami* [Atmospheric dispersion of gases emitted from industrial enterprises]. Moscow, Gosstroyizdat, 1952. 90 p.
16. Dobroselskiy K.G. Geometriya slabonapornoy strui v poperechnom vozdushnom potoke [Geometry of a low-head jet in the air cross flow]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*, 2001, vol. 8, no. 2, pp. 199–203.
17. Dobroselskiy K.G. Vertikalnaya slabonapornaya struya v poperechnom potoke [A vertical low-head jet in the cross flow]. *IFZh*, 2005, vol. 78, no. 6, pp. 143–147.
18. Dobroselskiy K.G. Dinamicheskie i teplovye kharakteristiki strui, vduvaemoy po normali k poperechnomu potoku [Dynamic and thermal characteristics of a jet injected normal to the cross flow]. *Teplofizika i aeromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*, 2004, vol. 11, no. 1, pp. 79–86.

УДК 669–1:539.21

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТАВА И СВОЙСТВ БЕЛЫХ СЛОЕВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ТРЕНИИ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Потекаев Александр Иванович,
д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Сибирского физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова при Томском Государственном университете, Россия, 634050, г. Томск, пл. Новособорная, д. 1.
E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Хохлов Виктор Александрович,
канд. техн. наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36. E-mail: khokhlov@sibmail.com

Галсанов Солбон Владимирович,
аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела физико-технического факультета Томского государственного университета. Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36. E-mail: S_galsanov@sibmail.com

Табаченко Анатолий Никитович,
канд. физ.-мат. наук, зав. лаб. металлографии Сибирского физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова при Томском государственном университете, Россия, 634050, г. Томск, пл. Новособорная, д. 1. E-mail: tabachenko@spti.tsu.ru

Задачи исследования: *поставлены задачи экспериментально-аналитического изучения условий возникновения белых слоев, их физико-механических свойств и фазового состава на примере никелида титана, как одного из распространенных в технике представителей материалов с памятью формы.*
Материалы и оборудование: *Экспериментально изучались два сплава: $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ –ТН-К и $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$. Исследования проводились на машине СМТ-1, трибометре-склерометре ТС-1 и нанотвердомере «CSEM instruments».*
Результаты: *показано, что белые слои формируются как при простом сжатии, так и в условиях трения скольжения. Структурно-фазовое состояние белых слоев зависит от давлений, скоростей скольжения и температуры в зоне контакта и представляют собой квазиравновесную аустенитно-мартенситную систему в виде конгломерата высоко-дисперсных наноразмерных кристаллов обеих фаз. Белые слои обладают рядом особых свойств, существенно отличных от свойств матрицы металлов. Высокая циклическая прочность белых слоев определяет высокую износостойкость никелида титана.*

Ключевые слова:
Никелид титана, трение, память формы, белые слои, структурно-фазовое состояние.

Введение

Особенностями никелида титана (TiNi) является его способность изменять фазовый состав и, соответственно, свойства при термических воздействиях и в силовых полях [1]. Так, при понижении температуры T исходная аустенитная (А) фаза переходит в более пластичную мартенситную (М) фазу. Возврат температуры к исходной сопровождается обратным превращением мартенсита в аустенит. Подобное превращение может произойти также под действием напряжений s и деформаций ε, при которых фаза А превращается в мартенсит деформации ($М_д$) с теми же его свойствами, что и в термическом мартенсите. Снятие внешней нагрузки приводит к обратному $М_д \rightarrow А$ превращению. Реакция $А \rightarrow М_д$ происходит при температурах до 60...80 °С. Выше этих температур мартенсит деформации не образуется.

Таким образом, TiNi, как и другие материалы с памятью формы (ПФ), относятся к классу сложных материалов, свойства которых, а также количественные соотношения фаз в них переменны и зависят от температуры и напряженно-деформированного состояния. Возникновение твердофазных реакций типа $А \leftrightarrow М$ и $А \leftrightarrow М_д$ превращений является первопричиной ряда аномалий в свойствах этих материалов, в частности механических, таких как снижение сопротивления деформациям, увеличение внутреннего трения, пластичности, а также особого поведения материалов с ПФ в условиях трения и износа. Так, например, в [2] была получена необычно высокая износостойкость TiNi, выявлены механизмы износа и определена их природа. Однако для установления полной физической картины такого поведения никелида титана необходимо изучение предыстории его проявления, вопро-

сов протекания пластических деформаций в поверхностных слоях при трении и структурно-фазового состояния последних.

Здесь мы имеем дело с динамическим процессом трения, суть которого заключается в том, что в результате $A \leftrightarrow M_д$ превращений изменяется сам процесс трения. Его следовало бы рассматривать как простое создание условий, приводящих к изменению структуры поверхностных слоев, их механических свойств и в ряде случаев состава. Однако реальное трение так изменяет поверхностный слой в материалах с ПФ, что в контактное взаимодействие вступает уже новый металл, обладающей отличным от исходных структурно-фазовым состоянием (СФС), параметрами трения (температура, коэффициент трения и износ) и работоспособностью контактных пар. Причем новые условия создаются в поверхностных слоях, в основном в белых слоях (БС), если они образуются, и во вторую очередь – в матрице, также с измененными СФС и свойствами.

В настоящей работе поставлены задачи экспериментально-аналитического изучения условий возникновения белых слоев, их физико-механических свойств и фазового состава на примере никелида титана, как одного из распространенных в технике представителей материалов с памятью формы.

Важность изучения этих вопросов несомненна, поскольку в настоящее время существует множество разновидностей элементов приборов и конструкций на основе TiNi, работающих в условиях трения, эксплуатационные параметры которых определяются СФС и свойствами поверхностей.

Материалы, методы исследования и оборудование

Экспериментально изучались два сплава: $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ – ТН-К и $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$. Эти сплавы наиболее изучены с позиций металлофизики и широко используются в технике. Исследования влияния давления и скорости на триботехнические свойства проводились на машине СМТ-1 по схеме: неподвижная колодка (цилиндрический образец диаметром 9 мм) – жесткий диск (контртело) из стали ШХ-15. Конструкция рабочего узла машины позволяла измерять температуру непосредственно вблизи зоны контакта.

Термообработка образцов выполнялась по режиму гомогенизирующего отжига: нагрев до 850 °С в вакууме с выдержкой 1 час и последующим охлаждением в печи.

Исследование контакта с трением при низких скоростях (до 12 м/мин) скольжения, допускающих несущественное повышение температуры, проводилось на трибометре-склерометре ТС-1 [3]. В качестве инденторов применялись закаленный шар с радиусом закругления ρ=1,0 мм и алмазный конус с ρ=10 мкм.

Структурно-фазовое состояние и прочностные свойства поверхностных слоев исследовались методом разрезных образцов на нанотвердомере «CSEM instruments» под нагрузкой на индентор 5 Н. Указанный метод, рассмотренный в [3], позволяет изучать свойства никелида титана в глубине деформированной зоны и исключает влияние на нее температурных и силовых воздействий от промежуточных технологических операций подготовки поверхностей.

Результаты исследований

Процесс формирования и свойства БС достаточно полно изучены на сталях. В работе [4] на основе методов рентгеноструктурного и электронномикроскопического анализов показано, что белая зона представляет сложную гетерогенную высокодисперсную структуру, содержащую аустенит, мартенсит и карбиды, представляющие из себя кристаллиты с регулярным сопряжением А и М решеток. В силу различия параметров А и М решеток, возникающая М-фаза сильно искажает решетку аустенита, что приводит к значительному повышению твердости белых слоев.

Условиями образования и существования БС являются уровни деформационных процессов и температурных вспышек в зонах физического контакта, которые исчезают после прохождения микронеровности и разрушения пятна контакта. Так, при малых давлениях (q,P), определяющих фактическую температуру в зоне контакта, белые слои могут не образоваться. Появление и рост их по всей площади и толщине происходит на средних скоростях (v=0,24 м/с при P=50 Н). На более высоких скоростях v БС образуются частично, а при самых малых v слои отсутствуют [4].

Структурное состояние в поверхностных слоях и повышенная прочность их наблюдались и на других материалах. Так, на рис. 1 показано изменение микротвердости вглубь от поверхности контакта (h) в алюминии [4]. Из рисунка видно, что твердость достигает максимума на глубине 10–15 мкм и в дальнейшем понижается до твердости исходного недеформированного материала. При этом, как указывалось в работе, слои с повышенной твердостью состоят из хаотически ориентированных высокодисперсных кристаллов.

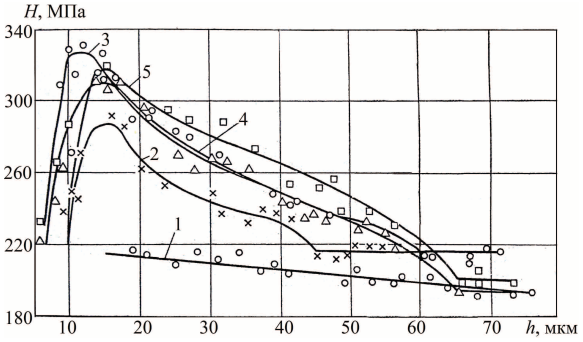


Рис. 1. *Изменение микротвердости по глубине образца из алюминия при трении с различными давлениями q (МПа): 1) 0; 2) 64; 3) 74; 4) 94; 5) 112 [5]*

Таким образом, из рассмотренных литературных источников можно сделать следующие выводы:

- На обычных материалах при трении создается тонкий поверхностный слой с высокодисперсной гетерогенной структурой, обладающий повышенными прочностными свойствами.
- Образование слоя и его размерные параметры зависят от многих факторов, основными из которых являются давление и скорость, определяющие уровень температур в зонах фактического контакта и время его жизни.
- Температурные вспышки приводят к размягчению поверхностного слоя и его закалке (в сталях).
- Давление в местах контакта и деформация приводят к деформационному упрочнению поверхностного слоя менее прочного материала взаимодействующей пары.

Рассмотрим трение скольжения жесткого сферического индентора по упруго-пластическому полупространству из никелида титана. При начальном внедрении контртела прижимающая нагрузка q, P вызывает сложное напряженное состояние в TiNi, которое, в свою очередь, приводит к образованию нескольких зон, различающихся по СФС и прочности [6]. Это зона со смешанным А–$М_д$ состоянием, зона мартенсита деформации и зона, прилегающая ко дну отпечатка в виде вторичной структуры – белого слоя. Существуют также переходные области от исходного А к А–$М_д$ состоянию, от нее к $М_д$ и область между зоной $М_д$ и белым слоем.

Прочностные свойства этих зон существенно отличаются друг от друга. Так, на рис. 2 показано изменение нанотвердости по глубине деформированной зоны при предварительной нагрузке сжатия P=100 кН. Как видно, профиль кривых аналогичен кривым, показанным на рис. 1: существует слой белого цвета с повышенной твердостью, слои с понижающейся и исходной твердостями. Те же самые свойства (белый однородный цвет, плохая травимость, высокая твердость) наблюдались и в условиях трения скольжения под нагрузкой q, P. Как указывалось в работе [4], в условиях пластического контакта с трением средние нормальные напряжения на контакте равны напряжениям при внедрении без скольжения. Это положение свидетельствует о том, что основной вклад в образование БС вносят нормальные нагрузки и во вторую очередь – сдвигающие напряжения. Однако возникновение температурных скачков в зонах физического контакта может нарушить это условие.

На рис. 3 показано изменение нанотвердости в функции расстояния h от поверхности вглубь материала. При этом использовались два вида инденторов – сферический сегмент и алмазный конус с углом при вершине 90°. Скорость движения инденторов v выбиралась из условия отсутствия температурных скачков с целью выявления влияния на твердость только давлений. Как видно из рисунков, наблюдается повышение твердости с максимальным ее значением на глубине h~20 мкм с дальнейшим ее спадом. Графики на рис. 3 качественно аналогичны зависимостям, показанным на рис. 1, 2. Здесь следует заметить, что графики на рис. 2 показывают H_{max} на глубине на два порядка больше, чем на других рисунках. Это связанно с весьма высокими предварительными сжимающими силами (100 кН).

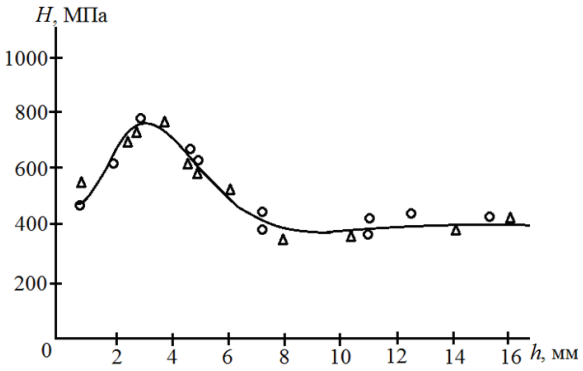


Рис. 2. *Распределение нанотвердости в ТН-1К в глубину материала. Значками обозначена твердость разных структурных составляющих*

На рис. 4 показано строение поверхностей трения при различных скоростях v и давлениях q.

Из анализа рисунков следует:

- С увеличением v и q площадь белых слоев возрастает при дальнейшей ее стабилизации.
- Более интенсивное образование белых слоев наблюдается на сплаве $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$.
- На больших скоростях и некоторых нагрузках видны следы разрушения БС.

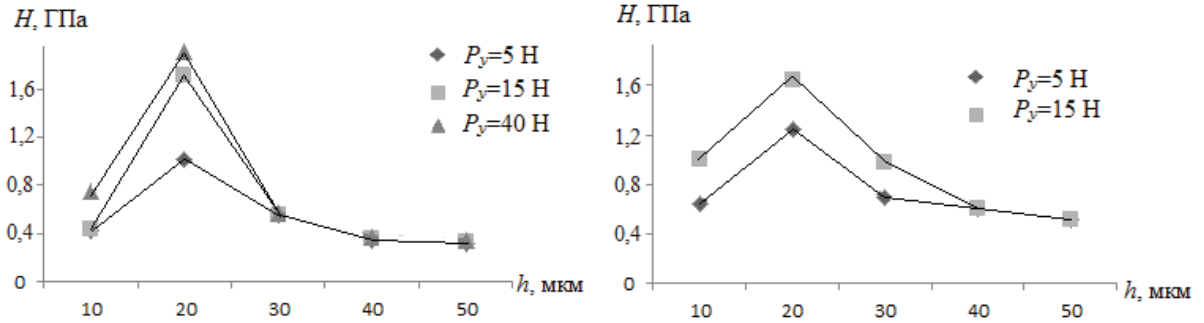


Рис. 3. *Изменение нанотвердости H по глубине материала: а) сферический индентор, ρ=1000 мкм; б) алмазный конус, ρ=10 мкм*

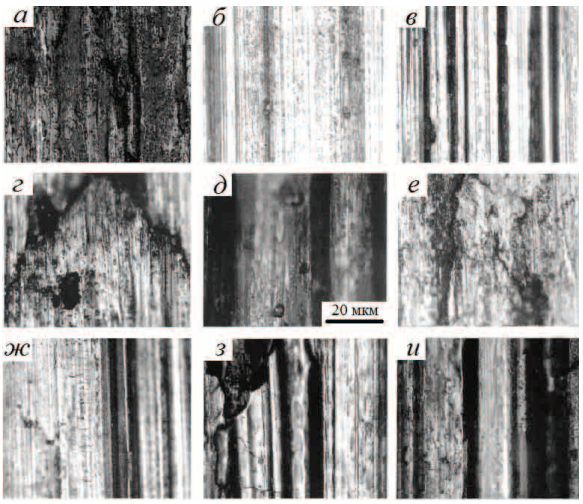


Рис. 4. *Строение поверхностей сплавов ТН-1К (а–д) и $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$ (е–и). а) v=31,4 м/мин, q=4,72 МПа; б) v=94,2 м/мин, q=4,72 МПа; в) v=126 м/мин, q=4,72 МПа; г) v=31,4 м/мин, q=6,3 МПа; д) v=62,8 м/мин, q=6,3 МПа; е) v=31,4 м/мин, q=4,72 МПа; ж) v=62,8 м/мин, q=4,72 МПа; з) v=94,2 м/мин, q=4,72 МПа; и) v=31,4 м/мин, q=9,45 МПа*

- При увеличении v и q структура белых слоев меняется от сплошного их распределения до полосчатого вида.
- Наибольшее влияние на БС оказывает скорость скольжения, что связанно с более интенсивным увеличением температуры T по сравнению с влиянием давления.

Проведем анализ СФС, используя теорию А↔М и А↔$М_д$ превращений, результаты наших исследований структуры, прочностных свойств и влияния температуры, а также сведения из литературных источников. Прежде всего, выделим из множества факторов, определяющих СФС, четыре главных – это элементный состав, давление, скорость и температура в зоне трения, определяемая двумя путями. Первый из них – это повышение T в зонах физического контакта при относительном движении микровыступов. Причем в этом случае температура повышается в виде импульсов с последующим снижением до исходной после исчезновения пятна контакта. Второй путь – это увеличение T всей трущейся пары за счет внешних источников с целью выявления степени $М_д$→А возврата за счет реализации памяти формы. Применительно к образованию белых слоев будем делать акцент на первый путь.

Пластическая деформация под действием сжимающих нагрузок вызывает образование мартенсита деформации. Но поскольку локальное повышение температур может в ряде случаев превышать температурный порог образования $М_д$ (60...80 °С), то возможно частичное отсутствие А→$М_д$ переходов или частичная реализация $М_д$→А превращений при охлаждении пятна. Поскольку исследуется уже охлажденный материал, то белые слои по фазовому составу представляют собой смесь кристаллов аустенита и мартенсита деформации с регулярным сопряжением решеток, т. е. с когерентными межзеренными границами, а также в малых долях вторичных фаз Ti_2Ni и $TiNi_3$. Тогда можно сказать, что БС представляет гетерогенную квазиравновесную А–$М_д$ систему, состоящую из недовозвращенного мартенсита после снятия нагрузки и, соответственно, исчезновения пятна контакта мартенсита, а также исходного или образовавшегося по реакции $М_д$→А аустенита и, в меньшей степени, вторичных фаз. Одновременно сосуществование А и $М_д$ фаз было получено в работе [7] на основе результатов рентгеноструктурного анализа.

Действие давления совместно со сдвигающими нагрузками приводит к дроблению, измельчению всех фаз, и структура белых слоев представляет собой конгломерат высокодисперсных кристаллов. Поэтому по внешнему виду БС отличаются от остальных деформированных зон морфологией (отдельно кристаллы А и $М_д$ фаз неразличимы в отличие от морфологии других зон), склонностью к травимости химическими реактивами и повышенной твердостью (рис. 3). Поскольку поверхностная энергия на межфазных А–$М_д$ границах близка к нулю, то при травлении электрохимические пары не возникают и границы зерен не выделяются. Нагрев от внешних источников, например, до температур формирующего отжига (500 °С) особого влияния на параметры (свойства, геометрию) БС не оказывает. Различия в параметрах решеток А и $М_д$ фаз приводят к появлению высоких внутренних напряжений, а давления – к их наклепу, что повышает прочностные свойства особенно в области белого слоя.

Важной особенностью белого слоя является его высокие пластические свойства и прочность. Они проявляются и при внедрении сферического индентора в условиях гидростатического давления и при скольжении его с трением с образованием фронтальных пластических волн, а также в условиях многократных проходов сферического индентора, когда поверхностные слои испытывают циклические сжатие и разгрузку с элементами растягивающих напряжений. Эти факты были установлены авторами на основе изучения микроструктуры слоя и физико-механического его состояния с точки зрения трещинообразования и поведения в условиях сложных НДС [3, 6].

Вообще, любые твердофазные химические реакции сопровождаются повышением пластичности и снижением сопротивления деформированию [1]. Аномалии механических свойств проявляются не только в ходе самих превращений под нагрузкой, но и в связи с прошедшим ранее превращением. Существует несколько каналов воздействия фазовых превращений на пластичность, реализуемых в материалах с памятью формы, в том числе и в никелиде титана. Это ориентирование зародышей новой фазы вдоль линий напряжений, появление микропластических деформаций в направлении силы, из-за изменения объема фаз, активации

направленного массопереноса за счет диффузионных процессов, инициированных полями напряжений, за счет перестройки блочной и дислокационной структуры с движением дефектов в сторону приложенных напряжений.

Таким образом, можно отметить, что под влиянием давлений, сдвигающих нагрузок, температурно-скоростных параметров меняются физико-механические свойства и сам процесс трения. Поэтому можно сказать, что ответственным за результат работы контакта с трением является не столько материал с исходной структурой, сколько материал, структура и свойства которого формируются в процессе трения. При этом, учитывая высокую статическую прочность, пластичность в поверхностных слоях и циклическую прочность, характерную для материалов с памятью формы, получаем благоприятные условия для процесса скольжения и повышения износостойкости.

Заключение

Установлено, что белые слои обладают рядом особых свойств, отличных от свойств матрицы металлов. Это белый цвет, плохая протравливаемость, высокие прочностные свойства и пластичность. Показано, что процесс трения проходит не по материалу с исходной структурой, а со структурой и свойствами, образованными за счет прямых и обратных мартенситных превращений.

Белые слои формируются как при простом сжатии, так и в условиях трения скольжения. Структурно-фазовое состояние их зависит от давлений, скоростей скольжения и температуры в зоне контакта и представляют собой квазиравновесную аустенитно-мартенситную систему в виде конгломерата высоко-дисперсных наноразмерных кристаллов обеих фаз.

Показано, что наибольшее влияние на свойства белых слоев оказывает скорость, определяющая температурный уровень в зонах контакта, который регулирует количественный состав фаз, а давление со сдвигающими нагрузками определяет степень дисперсности кристаллов. Высокая циклическая прочность и рассмотренные выше свойства белых слоев определяют высокую износостойкость никелида титана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гюнтер В.Э., Дамбаев Г.Ц., Сысолятин П.Г. Медицинские материалы и имплантаты с памятью формы. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. – 486 с.
2. Исследование триботехнических свойств никелида титана / В.А. Хохлов, А.И. Потекаев, А.Н. Табаченко, С.В. Галсанов // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 112–116.
3. Хохлов В.А., Закусов А.С., Исаков И.В. Структурно-фазовое состояние и свойства материалов с памятью формы на основе никелида титана в полях остаточных деформаций // Актуальные проблемы современного материаловедения: Труды Всеросс. конф. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – С. 80–84.
4. Любарский И.М., Палатник С.Л. Металлофизика трения. – М.: Металлургия, 1976. – 176 с.
5. Михин Н.М. Внешнее трение твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
6. Хохлов В.А., Потекаев А.И., Галсанов С.В. Исследование свойств никелида титана, инициированных высоким гидростатическим давлением // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 130–134.
7. Тарасов С.Ю. Исследование триботехнических свойств никелида титана // Перспективные материалы. – 1998. – № 5. – С. 24–30.

Поступила 09.10.2013 г.

UDC 669–1:539.21

RESEARCH OF STRUCTURE AND PROPERTIES OF THE WHITE LAYERS FORMED AT FRICTION OF MATERIALS WITH SHAPE MEMORY

Aleksandr I. Potekaev,
Dr. Sc., Siberian Physical Technical Institute named after academician V.D. Kuznetsov, Russia, 634050, Tomsk, Novosobornaya square, 1.
E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Viktor A. Khokhlov,
Cand. Sc., Tomsk State University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 36. E-mail: khokhlov@sibmail.com

Solbon V. Galsanov,
Tomsk State University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 36. E-mail: S_galsanov@sibmail.com

Anatoly N. Tabachenko,
Cand. Sc., Siberian Physical Technical Institute named after academician V.D. Kuznetsov, Russia, 634050, Tomsk, Novosobornaya square, 1.
E-mail: tabachenko@spti.tsu.ru

Research Objectives: *the authors have set the tasks to study experimentally and analytically the conditions for occurrence of white layers, their physical and mechanical properties and phase composition by the example of NiTi as one of the most common technique representatives of shape memory materials.*
Materials and equipment: *Two alloys $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ – TH-1K and $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$ were studied experimentally on the machine SMT-1, tribometer-sclerometry TC-1 and nanohardness gage «CSEM instruments».*
The results: *It was shown that the white layers are formed both by simple compression, and at sliding friction. Structural-phase states of white layers depends on pressure, sliding velocity and temperature in a contact zone and represent a quasi-equilibrium austenitic-martensitic system as a conglomerate of highly dispersed nanosized crystals of both phases. White layers have a number of special properties, significantly different from the properties of metal matrix. A high fatigue strength of white layer defines high durability of NiTi.*

Key words:
Titanium nickelide, friction, shape memory, white layers, structural and phase condition.

REFERENCES

1. Gyunter V.E., Dambaev G.Ts., Sysolyatin P.G. *Meditsinskie materialy i implantaty s pamyatyu formy* [Medical materials and shape memory implants]. Tomsk, TSU Publ., 1998. 486 p.
2. Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Tabachenko A.N., Galsanov S.V. Issledovanie tribotekhnicheskikh svoystv nikelida titana [Investigation of tribological properties of NiTi]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 2, pp. 112–116.
3. Khokhlov V.A., Zakusov A.S., Isakov I.V. Strukturno-fazovoe sostoyanie i svoystva materialov s pamyatyu formy na osnove nikelida titana v polyakh ostatochnykh deformatsiy [Structural-phase state and properties of shape memory materials based on nickel titanium in the fields of residual deformations]. *Aktualnye problemy sovremennogo materialovedeniya: Trudy Vseross. konf.* [Proceedings of the All-Russian conf. Actual problems of modern materials]. Tomsk, TPU Publ., 2009, pp. 80–84.
4. Lyubarskiy I.M., Palatnik S.L. *Metallofizika treniya* [Metal Physics of friction]. Moscow, Metallurgiya, 1976. 176 p.
5. Mikhin N.M. *Vneshnee trenie tverdykh tel* [External friction of solids]. Moscow, Nauka, 1977. 224 p.
6. Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Galsanov S.V. Issledovanie svoystv nikelida titana, initsiirovannykh vysokim gidrostaticheskim davleniem [Investigation of NiTi properties initiated by high hydrostatic pressure]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 130–134.
7. Tarasov S.Yu. Issledovanie tribotekhnicheskikh svoystv nikelida titana [Investigation of tribological properties of NiTi]. *Perspektivnye materialy*, 1998, no. 5, pp. 24–30.

УДК 669–1:539.621

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАЛОСТНОГО ИЗНОСА МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Потекаев Александр Иванович,
д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Сибирского
физико-технического института им. акад. В.Д. Кузнецова
при Томском Государственном университете, Россия, 634050,
г. Томск, пл. Новособорная, д. 1. E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Хохлов Виктор Александрович,
канд. техн. наук, доцент кафедры механики деформируемого твердого тела
физико-технического факультета Томского государственного университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36. E-mail: khokhlov@sibmail.com

Галсанов Солбон Владимирович,
аспирант кафедры механики деформируемого твердого тела
физико-технического факультета Томского государственного университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36. E-mail: S_galsanov@sibmail.com

Шулепов Иван Анисимович,
канд. физ. мат. наук, ст. науч. сотр. лаборатории 22
Физико-технического института ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: shulepov@tpu.ru

Цель работы: *рассмотреть поверхностное разрушение по усталостному механизму износа обычных металлов и никелида титана, привести сравнительные экспериментальные результаты, показывающие, что износостойкость никелида титана намного выше традиционных антифрикционных металлов. Раскрыть природу повышенной износостойкости никелида титана.*
Методика и материалы: *исследовались сплавы TiNi трех составов: $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ (ТН-1К), $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$, $Ti_{49,9}Ni_{50,1}$. Работа выполнялась на машине трения СМТ-1. Исследование поверхностных слоев проводилось на микроскопе нанотвердомера «GSEM instruments» и на 3D профилографе-профилометре «Still».*
Результаты: *путем введения ряда условий, не нарушающих работоспособность реальных узлов трения, выделен усталостный износ, как основной вид изнашивания. Рассмотрены процессы образования частиц износа за счет образования подповерхностных трещин. Повышенная по сравнению с обычными материалами долговечность никелида титана доказана экспериментально.*

Ключевые слова:
Никелид титана, память формы, трение, износ, износостойкость.

Введение

Никелид титана (TiNi) относится к классу материалов с эффектом памяти формы (ЭПФ), особенностью которых является изменение фазового состава в условиях термического или силового воздействий. Эти изменения характеризуются прямыми и обратными мартенситными превращениями, в результате которых исходная аустенитная фаза (А) превращается частично или полностью в новую мартенситную фазу с образованием температурного мартенсита М или мартенсита деформации $М_д$. При снятии внешнего воздействия происходит частичное или полное обратное М→А или $М_д$→А превращения.

Опыт эксплуатации конструкций и технологической обработки изделий из никелида титана показал, что его износостойкость существенно выше, чем у обычных антифрикционных материалов и приближается или превышает по этому показателю высокоизносостойкие специальные сплавы и покрытия.

Ранее авторами в работе [1] затрагивалось это явление. В настоящей статье излагается более глубокое его рассмотрение и анализ с позиций мартенситных превращений, контактной механики, механики разрушения, теории трения и износа, а также на базе имеющихся экспериментальных результатов.

Введем ряд условий трения никелида титана с целью выделить усталостный износ как основной, не переходя при этом границы наиболее распространенных эксплуатационных характеристик соединений.

- Никелид титана – материал коррозионностойкий, на нем образуются только адсорбированные слои, не вступающие в химическое взаимодействие с материалом. Наличие незначительного количества вторичных фаз ($TiNi_3$, Ti_3Ni) существенного влияния на хемосорбцию материала в целом не оказывает.
- Режимы работы таковы, что $h/R \leq 0,5$ (h – глубина внедрения единичной микронеровности в контртело, R – радиус при вершине этой неровности) исключают микрорезание и абразивное изнашивание.

- Выбираются наиболее предпочтительные с точки зрения эксплуатационных характеристик скоростные и силовые режимы малого и среднего уровней (q=3...6 МПа, v=0,5...2,5 м/с).
- Рассматривается сухое трение и учитывается только трение скольжения. Трение покоя и предварительное смещение не рассматриваются.
- Сдвигающие нагрузки τ прикладываются циклически, одного направления и амплитуды.

При этих условиях отсутствуют многие виды износа: микрорезание, коррозионно-механический, электро-механический, эрозионный, кавитационный, фреттинг-износ и др.

В результате остаются два вида разрушения – усталостный и адгезионный. Адгезионное изнашивание (схватывание) присутствует на любых площадках физического контакта, но доля его в общем износе относительно мала по сравнению с усталостным износом [1].

Материалы, методика и приборы

Исследовались сплавы TiNi трех составов: $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ (ТН-1К), $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$, $Ti_{49,9}Ni_{50,1}$.

Работа выполнялась на машине трения СМТ-1. Использовалась схема – неподвижная колодка (образец) – жесткий вращающийся диск (контртело). Образцы выполнялись в виде цилиндров диаметром 9 мм и высотой 10 мм. Термообработка сплавов TiNi проводилась в вакууме по режиму T=850 °С с выдержкой 1 час. Исследование поверхностных слоев проводилось на микроскопе нанотвердомера «GSEM instruments» и на 3D профилографе-профилометре «Still».

Усталостное разрушение классических материалов

Рассмотрим физическую картину усталостного разрушения материалов.

Усталостное поверхностное разрушение происходит путем отделения (отслаивания) материала с поверхности трущихся тел в виде тонких пластинок – чешуек. Для этого необходимо распространение подповерхностной магистральной горизонтальной трещины до ее пересечения с поверхностью или растущей от поверхности вглубь материала вертикальной трещины (рис. 1). Вопрос возникновения микротрещин (зародышевых) является наиболее трудным и малоизученным. Изнашивание в значительной степени определяется напряженно-деформированным состоянием (НДС) поверхностных слоев, возникающим при взаимодействии микронеровностей трущихся тел. Последние создаются или в результате предшествующей технологической обработки, или путем приработки при трении.

В пластичных материалах, таких как металлы, отслаивание происходит за счет слияния микротрещин (микропор), которые образуются на включениях за счет растягивающих напряжений в поверхностном слое, при многократном циклическом деформировании микронеровностями контртела, а также на дефектах кристаллического строения, исходных микропорах, во впадинах микровыступов дискретного контакта. Возникновение вертикальных трещин возможно за счет концентрации напряжений во впадинах микронеровностей и адгезионными вырывами. На рис. 1 схематично изображены расположения трещин.

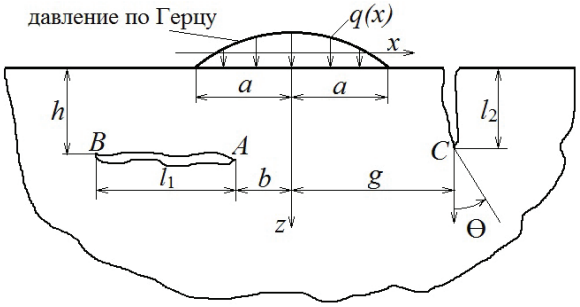


Рис. 1. *Схема расположений горизонтальной и вертикальной трещин в полупространстве с перемещающейся на его поверхности герцевской площадкой*

Если оба вида трещин сформированы, то возможно отследить их распространение до локальных разрушений, т. е. отделения частиц – фрагментов износа. Такой анализ был сделан в работе [2], где были введены коэффициенты интенсивности напряжений K_1 и K_2, соответственно, по нормальным и касательным напряжениям, возникающим на площадке герцевского контакта от нагрузок q и fq (f=0,25 коэффициент трения). На рис. 2 показано изменение этих коэффициентов в функции координат (h, a, l_1, l_2, q, b, g – рис. 1) расположения трещин относительно осей z и x. Знак «+» соответствует положительному перемещению микровыступа относительно z и x.

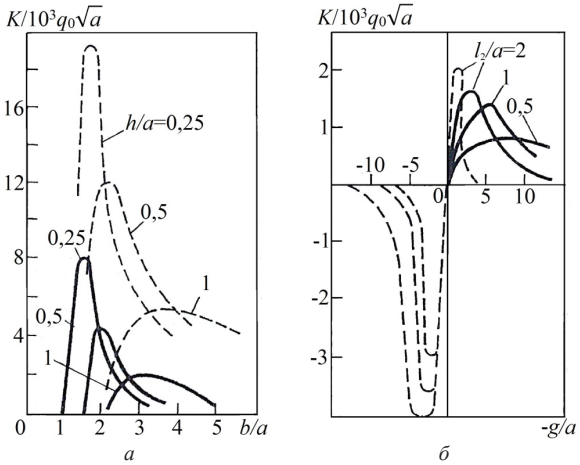


Рис. 2. *Зависимость нормированных коэффициентов K_1 (сплошные кривые) и K_2 (штриховые кривые) от безразмерного расстояния между концом трещины и осью герцевской площадки: а) горизонтальная, б) вертикальная трещина*

Из графиков (рис. 2, *а*) видно, что если микровыступ находится над трещиной ($в/a$=1), то она сжимается. При удалении герцевской площадки вправо (рис. 1) K_1 и K_2 возрастают, достигая максимума. Более длинным трещинам соответствует большие

K. Если $K>K_c$ (K_c – критическая длина трещины), то трещина будет расти до критической длины. Это неравенство показывает, что при неоднократных проходах длина трещины увеличивается.

Более сложный характер роста наблюдается у вертикальных трещин (рис. 2, *б*). Видно, что максимумы могут создаваться при нахождении микровыступа как справа, так и слева от трещины. Мало того, вертикальная трещина может сомкнуться на поверхности и остаться острой на глубине. Кроме того, эта трещина может отклоняться от вертикали с наибольшим углом отклонения $\Theta=-69^{\circ}$. Знак «–» показывает, что трещина разворачивается в сторону, противоположную движению микровыступа, и при возможном ветвлении такой трещины его микроразрушение может произойти при циклических однонаправленных проходах с образованием фрагмента.

В целом следует отметить, что рост трещин при циклических проходах приводит при определенной ее длине к отслаиванию материала и образованию частиц износа.

Если контактируют, например, микронеровность с упруго-пластическим полупространством, то впереди каждой микронеровности, находящейся в контакте движется пластическая волна [3]. На фронте ее напряжения сжимающие, за фронтом – растягивающие. Циклическое приложение сдвигающей нагрузки одного направления вызывает цикличность изменения этих напряжений. С увеличением сжимающих и сдвиговых нагрузок величина растягивающих напряжений растет. Разгружение пластичных материалов начинается по поверхности на глубине в зоне действия максимальных касательных напряжений, а для хрупких материалов – на поверхности.

Из сказанного выше можно сделать следующий вывод. Усталостное разрушение инициируется пластическими деформациями поверхностных слоев при многократных циклических проходах за счет смены знака напряжений и образования подповерхностных или вертикальных магистральных трещин, которые при некотором числе циклов и критической нагрузке приводят к отслаиванию материала с образованием пластинок – чешуек износа. Для хрупких материалов отслаивание идет с поверхности, вид разрушения хрупкий, а частицы износа аналогичны частицам износа пластичных материалов, которые образуются из магистральной трещины, близко расположенной к поверхности.

Усталостное разрушение никелида титана при трении

Общее в усталостных разрушениях материалов с памятью формы и классических материалах состоит в процессах образования подповерхностных горизонтальных и вертикальных трещин в результате слияния микротрещин и микропор в магистральную, а также в пластических деформациях и в усталостном разрушении с образованием частиц износа в виде мелкодисперсных частиц.

Различие в износе обоих типов материалов заключается в структурно-фазовом состоянии (СФС) поверхностного слоя и в связи с этим – в особенностях пластического деформирования и образования зародышевых и магистральных трещин. Как было сказано выше, при силовом воздействии на TiNi (в нашем случае – это воздействия сжимающих и сдвигающих сил) проходят $A \leftrightarrow M_д$ превращения, связанные с нагружением, последующей разгрузкой и сменой знака напряжений, т. е. происходят последовательные прямые и обратные мартенситные превращения. Причем обе фазы, имеющие разные прочностные свойства, обладают повышенной пластичностью. Так, при трении в местах физического контакта возникают температурные вспышки. Если значения местных температур превышают температуру начала образования $M_д$, то значение фазовых переходов не будет, но по окончании прохода контртела температура падает, деформации и напряжения остаются, и переход будет реализован. Таким образом, фазовое состояние и механические свойства поверхностей сложные, а структурное состояние определяется направлением сдвигающих сил, т. е. зерна фаз ориентированы вдоль линий действия τ.

Пластическая деформация сопровождается деформационным упрочнением – наклепом. Кроме того, на поверхностях трения образуются белые слои повышенной по сравнению с матрицей прочностью, но обладающие высокой пластичностью. На рис. 3 приведены фотографии изношенных поверхностей со следами белых слоев. На рис. 4 показано их распространение вглубь материала от дна канавки, образованной сферическим (рис. 4, *а*) и алмазным (коническим, рис. 4, *б*) инденторами. Толщина их и площадь зависят от давления q, скорости скольжения и состава сплава. При некоторых режимах трения слой может занимать всю поверхность трения. И следует предположить, что слой вносит немалый вклад в усталостный износ, поскольку он периодически удаляется в виде частиц износа и образуется вновь. С точки зрения СФС этот слой формируется в гидростатической зоне давлений и состоит из ультрамелкодисперсных (наноразмерных) мартенсита и остаточного аустенита.

Природа повышенной износостойкости никелида титана

Прежде всего, констатируем факт, что адгезионное изнашивание в никелиде титана обусловлено фазовыми превращениями с мартенситно-двойниковыми реакциями. Это обстоятельство указано для TiNi в работе [4] и подтверждено нами экспериментально [1]. В классических же материалах деформация и формирование поверхностного слоя пластических материалов идет дислокационным путем, и дальнейшее разрушение этого слоя происходит за счет диффузионно-вакансионного механизма.

Как указывалось выше, основной вклад в износ вносит усталость деформированных поверхност-

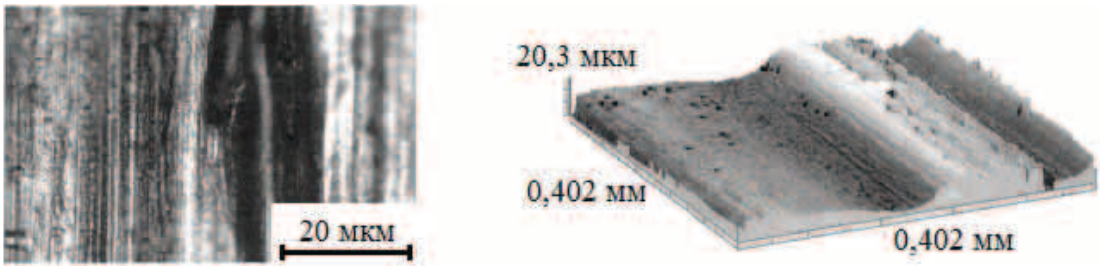
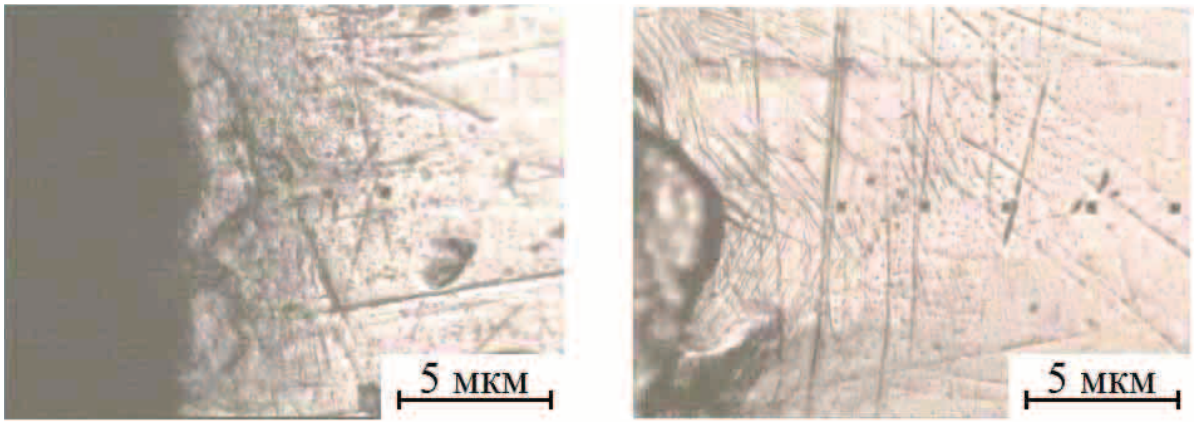


Рис. 3. *Вид изношенных поверхностей со следами белых слоев*



а *б*

Рис. 4. *Распространение белых слоев вглубь материала от дна канавки, образованных сферическим (а) и алмазным (б) инденторами*

ных слоев. Износ за счет адгезионного схватывания второплановый, и пример его возникновения приведен на рис. 3, где черные точки – результат адгезионного вырывания.

В усталостном износе следует выделить два его вида: за счет циклической знакопеременной деформации слоя на фронте пластической волны, а также в области физического контакта с контртелом [3] и усталостное разрушение поверхностного слоя за счет периодического образования и разрыва адгезионных связей.

В обоих случаях механизм разрушения одинаков и схож с механизмом разрушения классических материалов.

Во втором виде усталостного износа образование адгезионных связей сопровождается сцеплением поверхностей. При действии сдвигающих нагрузок сцепленные поверхности деформируются, и если силы сцепления выше по величине сил когезионной связи менее прочного материала, то произойдет вырывание материала (рис. 3). Однако если силы адгезии по каким-либо причинам ослаблены (например, из-за наличия адсорбированных слоев, малости давления q на отдельных микровыступах и т. п.) и меньше когезионных сил, то произойдет простой разрыв адгезионных связей. Но при этом поверхности подвергаются растягивающе-сжимающим напряжениям. Циклическое приложение τ в этом случае вызывает циклические деформации одной из контактирующих поверхностей, возникновению микротрещин, магистральной трещины. Такой вид разрушения можно назвать адгезионно-усталостным, и реализуется он без существенной пластической деформации.

Теперь обратимся к вопросу условий зарождения микротрещин в пластически деформированном поверхностном слое TiNi. Так как мартенситно-двойниковая структура не меняется от цикла к циклу [5], то в процессе механо- и термоциклирования материалов с $A \leftrightarrow M_д$ и $A \leftrightarrow M$ превращениями накопления микроповреждений различного рода, приводящих к образованию трещины и последующему разрушению, поэтому для материалов с ПФ характерна высокая долговечность и большой предел усталости даже при интенсивном циклическом воздействии по отношению к обычным материалам. Так, например, из работы [6] следует, что сплав CuAlNi (материал с ПФ) выдерживает $N=5\cdot10^4$ циклов при амплитуде деформации 2 %. Это на три порядка превышает долговечность меди при сопоставимых условиях. Следующий пример: никелид титана выдерживают $N=10^3$ циклов при амплитуде деформации 10 % [5], в то время как для металлов с дислокационной пластичностью те же циклы достигаются при амплитудах деформации всего 1 %.

Поскольку существует связь объемного и поверхностного разрушений, те же цифры можно отнести и к усталостному разрушению на поверхностях.

Анализ экспериментальных данных по малоцикловой усталости показывает, что долговечность материалов хорошо согласуется с законом Коффина–Мэнсона [7]: $N_f^{\beta}=c/\Delta E_p$, где N_f – число циклов

до разрушения; ΔE_p – пластическая деформация за цикл; β и c – постоянные. У сплавов с мартенситными превращениями постоянная β намного меньше, чем у других материалов. Так, например, у обычных металлов при комнатной температуре β=0,5, а у никелида титана β=0,15–0,2 [7].

Подобная повышенная усталостная прочность материалов с ПФ, в том числе и никелида титана, связана с тем, что при нагружении их доминирующими каналами деформации, как указывалось, являются геометрически обратимые мартенситные и двойниковые реакции [5]. Деформирование материала за счет движения обратимых носителей затормаживает образование концентраторов напряжений и, следовательно, – зарождение трещин.

Другим фактором, повышающим долговечность рассматриваемых сплавов, является их способность к пластической аккомодации, которая приводит к ослаблению трещинообразования при мартенситно-двойниковых реакциях.

Следующим фактором, влияющим на повышенную долговечность, является упругая анизотропия кристаллов, определяемая коэффициентом a. Так, например, у никелида титана a=2 и разрушение носит внутризеренный характер, а у бронзы CuZnAl a=15 и разрушение идет путем межзеренного растрескивания, и долговечность ее намного ниже, чем у TiNi.

Заключение

Путем введения ряда условий, не нарушающих работоспособность реальных узлов трения, выделен усталостный износ, как основной вид изнашивания. Рассмотрены процессы образования частиц износа за счет образования подповерхностных трещин. Повышенная по сравнению с обычными материалами долговечность никелида титана доказана экспериментально и связывается с тремя факторами: в силу мартенситно-двойниковых реакций происходит торможение образования концентраторов напряжений и зарождения микротрещин и магистральной трещины, приводящих к поверхностному разрушению металла. Другими факторами, определяющими высокую усталостную прочность, является пластическая аккомодация, предотвращающая трещинообразования, а также низкая анизотропия кристаллов никелида титана, приводящая только к внутризеренному растрескиванию, в то время как у обычных материалов разрушение идет в худшем варианте – по границам зерен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исследование триботехнических свойств никелида титана / В.А. Хохлов, А.И. Потекаев, А.Н. Табаченко, С.В. Галсанов // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 112–116.
2. Keer L.M., Brayant M.D., Haritos G.K. Subsurface and surface cracking due to Hertzian contact. Trans ASME Journal of Lubrication Technology. – 1982. – V. 104. – P. 347–351.
3. Пластические волны в никелиде титана при скольжении сферического индентора / А.И. Потекаев, В.А. Хохлов, С.В. Галсанов, А.Н. Табаченко, И.А. Шулепов // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 125–130.
4. Тарасов С.Ю. Исследование триботехнических свойств никелида титана // Перспективные материалы. – 1998. – № 5. – С. 24–30.
5. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Л.: ЛГУ, 1987. – 216 с.
6. Rachinger W.A. A «super-elastic» single crystal calibration bar // British Journal of Applied Physics. – 1958. – V. 9. – № 6. – P. 250–251.
7. Melton K.N., Mercier O. The effect of martensitic phase transformation on the low cycle fatigue behavior of polucrustalline Ni-Ti and Cu-Zn-Al alloys // Materials Science and Engineering. – 1979. – V. 40. – № 1. – P. 81–87.

Поступила 09.10.2013 г.

UDC 669–1:539.621

RESEARCH OF FATIGUE WEAR OF SHAPE MEMORY MATERIALS

Aleksandr I. Potekaev,
Dr. Sc., Siberian Physical Technical Institute named after academician
V.D. Kuznetsov, Russia, 634050, Tomsk, Novosobornaya square, 1.
E-mail: potekaev@spti.tsu.ru

Viktor A. Khokhlov,
Cand. Sc., Tomsk State University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 36. E-mail: khokhlov@sibmail.com

Solbon V. Galsanov,
Tomsk State University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 36. E-mail: S_galsanov@sibmail.com

Ivan A. Shulepov,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: shulepov@tpu.ru

The main aim of the study *is to consider the surface fracture on fatigue wear mechanism of conventional metals and NiTi, to introduce comparative experimental results which show that NiTi wear resistance is much higher than traditional anti-friction metal; to disclose the nature of increased wear resistance of NiTi.*
Methods and materials: *The authors have studied TiNi alloys of three compositions: $Ti_{50}Ni_{47,5}Fe_{2,5}$ (TH-1K), $Ti_{49,4}Ni_{50,6}$, $Ti_{49,9}Ni_{50,1}$ on the friction machine SMT-1. The study was carried out on the surface layers on a microscope of the «GSEM instruments» nanohardness gage and on the 3D profilograph-profilometer «Still».*
The results: *The authors determined the fatigue wear as the main form of wear by introducing a number of conditions not disturbing the performance of real friction units. The paper considers wear particle formation due to formation of subsurface cracks. The increased durability of NiTi in comparison with conventional materials was proved experimentally.*

Key words:
Titanium nickelide, shape memory, friction, wear, wear resistance.

REFERENCES

1. Khokhlov V.A., Potekaev A.I., Tabachenko A.N., Galsanov S.V. Issledovanie tribotekhnicheskikh svoyjstv nikelida titana [Investigation of tribological properties of NiTi]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 2, pp. 112–116.
2. Keer L.M., Brayant M.D., Haritos G.K. Subsurface and surface cracking due to Hertzian contact. *Trans ASME Journal of Lubrication Technology*, 1982, vol. 104, pp. 347–351.
3. Potekaev A.I., Khokhlov V.A., Galsanov S.V., Tabachenko A.N., Shulepov I.A. Plasticheskie volny v nikelide titana pri skolzhenii sfericheskogo indentora [Plastic waves in NiTi during sliding spherical indenter]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 2, pp. 125–130.
4. Tarasov S.Yu. Issledovanie tribotekhnicheskikh svoystv nikelida titana [Investigation of tribological properties of NiTi]. *Advanced materials*, 1998, no. 5, pp. 24–30.
5. Likhachev V.A., Kuzmin S.L., Kamentseva Z.P. *Effekt pamyati formy* [The shape memory effect]. Leningrad, LGU, 1987. 216 p.
6. Rachinger W.A. A «super-elastic» single crystal calibration bar. *British Journal of Applied Physics*, 1958, vol. 9, no. 6, pp. 250–251.
7. Melton K.N., Mercier O. The effect of martensitic phase transformation on the low cycle fatigue behavior of polucrustalline Ni-Ti and Cu-Zn-Al alloys. *Materials Science and Engineering*, 1979, vol. 40, no. 1, pp. 81–87.

УДК 621.793.794.357.7

САМООРГАНИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ CuCr КОНТАКТНОГО МАТЕРИАЛА ВАКУУМНЫХ ВЫКЛЮЧАТЕЛЕЙ ПРИ ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Дураков Василий Григорьевич,
канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Института физики прочности
и материаловедения СО РАН, Россия, 634021, г. Томск,
пр. Академический, 2/4. E-mail: electron@ispms.tsc.ru

Гнюсов Сергей Федорович,
д-р техн. наук, профессор кафедры «Оборудование и технология
сварочного производства» Института неразрушающего контроля ТПУ,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: gnusov@rambler.ru

Дампилон Баир Вячеславович,
канд. техн. наук, науч. сотр. Института физики прочности
и материаловедения СО РАН, Россия, 634021, г. Томск,
пр. Академический, 2/4. E-mail: dampilon@ispms.tsc.ru

Дехонова Светлана Зиновьевна,
рук. отдела Института оптики атмосферы СО РАН, Россия, 634021,
г. Томск, пл. Академика Зуева, 1. E-mail: dana0863@mail.ru

Электронно-лучевую наплавку в вакууме проводили по спирали Архимеда на медные заготовки диаметром 80 мм и толщиной 10 мм. Для электронно-лучевой наплавки использовали смесь порошков меди и хрома с содержанием хрома от 20 до 50 вес. %. Дисперсность порошков меди и хрома находилась в диапазоне от 90 до 125 мкм. Проведен сравнительный анализ микроструктур, образующихся при дуговом оплавлении контактного материала и в процессе электронно-лучевой наплавки контактного сплава вакуумных дугогасительных камер. Анализ микроструктур проводили с помощью растрового электронного микроскопа Leo Evo 50, снабженного микроанализатором, в отраженных и обратно рассеянных электронах. Выявлены преимущественные участки горения катодных пятен на поверхности спеченного контактного материала. Показано, что в процессе оплавления контактного материала вакуумной дугой происходит преимущественное испарение медной составляющей и обогащение поверхностного слоя хромовой фазой. Зона оплавления имеет неравномерную глубину на поверхности контакта. Переплавленные участки контактного материала чередуются с участками, имеющими исходную структуру. В переплавленных зонах формируется бимодальная структура, состоящая из первичных и вторичных выделений хрома, микронного и субмикронного размеров, соответственно. Наплавленные CuCr покрытия имеют бимодальную структуру аналогичную структуре поверхностного слоя контактов вакуумных выключателей, оплавленных в режиме токов короткого замыкания. Таким образом, при электронно-лучевой наплавке происходит самоорганизация структуры контактного материала аналогично структуре поверхностного слоя контактов вакуумных выключателей, образующейся в процессе их эксплуатации.

Ключевые слова:
CuCr покрытие, электронно-лучевая наплавка, микроструктура, контактный сплав, бимодальная структура.

Введение

Меднохромовые сплавы являются общепризнанным контактным материалом, который используется в вакуумных выключателях, благодаря отличному сочетанию высокой механической прочности с высокой проводимостью, как тепловой, так и электрической. В промышленности используются два принципиально отличных по состоянию хромовой фазы способа изготовления контактного материала. Способ порошковой металлургии сохраняет хромовую составляющую в исходном состоянии, а методы дугового плавления или индукционного литья позволяют переплавлять как медную, так и хромовую составляющую.

Медно-хромовые контакты, изготовленные методом дуговой плавки, позволяют достичь более высоких технических характеристик вакуумных выключателей, чем контакты, изготовленные методами порошковой металлургии [1, 2]. Тем не менее, методы изготовления контактов путем плавления не получили широкого распространения в силу сложности технологического процесса, а методы дугового переплава – в силу патентной защиты, ограничивающей их применение. Поэтому большая часть рынка вакуумных выключателей использует спеченные контакты, а для повышения их эксплуатационных характеристик применяют разные способы, создающие литую структуру поверхностного слоя меднохромовых контактов.

Оплавление поверхностного слоя приводит к возрастанию электрической прочности вакуумного промежутка [3, 4]. Одним из способов создания литой структуры поверхностного слоя контактного материала является метод плакирования спеченной заготовки путем одновременной прокатки в вакууме при температуре 900 °С спеченного кон-

тактного материала с фольгой того же сплава имеющего литую структуру [5]. В других методах для оплавления поверхностного слоя используют лазерное излучение или импульсный широкоаппертурный электронный пучок [6].

Кроме того, для повышения эксплуатационных характеристик широко используется предварительная тренировка электродов вакуумных дугогасительных камер. Однако использование оплавления поверхности контактов особенно в режиме токов короткого замыкания, составляющих более 10 кА, изменяет геометрию контактов и не позволяет добиться равномерного оплавления контактного материала. К тому же нормы технической эксплуатации вакуумных выключателей допускают в лучшем случае не более пяти десятков таких отключений. Это накладывает ограничение на использование метода тренировки для создания литой структуры контактного сплава. При дальнейшей работе такого вакуумного выключателя в режиме номинальных токов плавления поверхности контактного слоя не происходит.

Учитывая то обстоятельство, что при оплавлении контактного материала дугой или каким-либо другим способом улучшаются его электрические свойства и вакуумные выключатели повышают свои технические характеристики, можно сказать, что под действием электрической дуги происходит самоорганизация микроструктуры контактного материала для наиболее благоприятной работы в условиях вакуумной дуги.

Наиболее близкие условия плавления контактного материала, происходящие при отключении токов в режиме короткого замыкания, реализуются в методе вакуумной электронно-лучевой наплавки (ЭЛН). Метод ЭЛН формирует покрытие, близкое к условиям работы вакуумного выключателя в режиме токов короткого замыкания. В результате вакуумного переплава хромовой и медной фаз происходит рафинирование контактного материала, что положительным образом влияет на отключающую способность вакуумных выключателей. В отличие от импульсного воздействия катодного пятна плавление электронным лучом происходит непрерывно в течение всего цикла электронно-лучевой наплавки.

Целью работы является изучение особенностей формирования самоорганизованных микроструктур, образующихся при электронно-лучевой наплавке образцов меднохромового сплава и дуговом оплавлении поверхности CuCr контактов в условиях работы вакуумных дугогасительных камер.

Материал, оборудование и методы исследования

Для электронно-лучевой наплавки использовали смесь порошков меди и хрома с содержанием хрома от 20 до 50 вес. %. Дисперсность порошков меди и хрома находилась в диапазоне от 90 до 125 мкм. Электронно-лучевую наплавку проводили по спирали Архимеда на медные заготовки диаметром 80 мм и толщиной 10 мм по методике, описанной в [7].

Для сравнения проводили оплавление электронным лучом спеченного CuCr60 контактного сплава. Оплавление проводили лучом, сфокусированным в точку, и лучом, развернутым в линию длиной 5 мм поперек движения оплавляемой детали при скорости ее перемещения 5 мм/с, токе луча 150 мА и напряжении 27 кВ. Толщина контактного слоя составляла 5 мм.

Дуговое воздействие проводили на спеченных контактах производства Тулачермет после испытаний на отключающую способность вакуумной дугогасительной камеры (ВДК) при токе 40 кА. Серийная ВДК была установлена в вакуумный выключатель ВВТЭ-М-10–31,5/1600 с электромагнитным приводом. Выключатель обеспечивает при отключении следующие параметры ВДК: раствор контактов 8мм; средняя скорость подвижного контакта при отключении 1,6 м/с [8].

Анализ образующихся микроструктур в меднохромовом сплаве после ЭЛН и дугового воздействия проводили с помощью растрового электронного микроскопа Leo Evo 50, снабженного микроанализатором в отраженных и обратно рассеянных электронах.

Результаты и обсуждение

Микроструктура поверхностного слоя после дугового оплавления. Поверхности контактов вакуумных выключателей подвергаются воздействию дуги, сила тока которой соответствует режиму работы вакуумного выключателя. В режиме номинальных токов, как правило, не превышающих одного килоампера, оплавления поверхности не происходит и, анализируя поверхность контактного материала, можно определить наиболее предпочитаемые участки горения катодного пятна. На рис. 1, *а* показана поверхность спеченного контактного материала со следами эрозии, сформированными катодными пятнами. Наибольшее количество следов катодных пятен (белые полосы) наблюдается около границ темных хромовых частиц. Межфазные границы хромовых частиц и медной матрицы являются наиболее предпочтительными для существования катодных пятен.

Анализ межфазных границ в спеченном контактном материале позволяет выявить мелкодисперсные выделения хрома в этих областях. В процессе спекания меднохромового композита около одного процента хрома растворяется в медной матрице и при охлаждении спеченного контакта этот растворенный хром выпадает в виде мелкодисперсных выделений вблизи хромовых частиц. Таким образом, в спеченном материале образуются участки микроструктуры с мелкодисперсными выделениями хрома, которые и являются благоприятными участками для существования катодных пятен.

При воздействии сильноточной вакуумной дуги происходит оплавление поверхности меднохромового контакта. Геометрические характеристики зоны оплавления зависят от режимов токового воздействия. Оплавление происходит в процессе

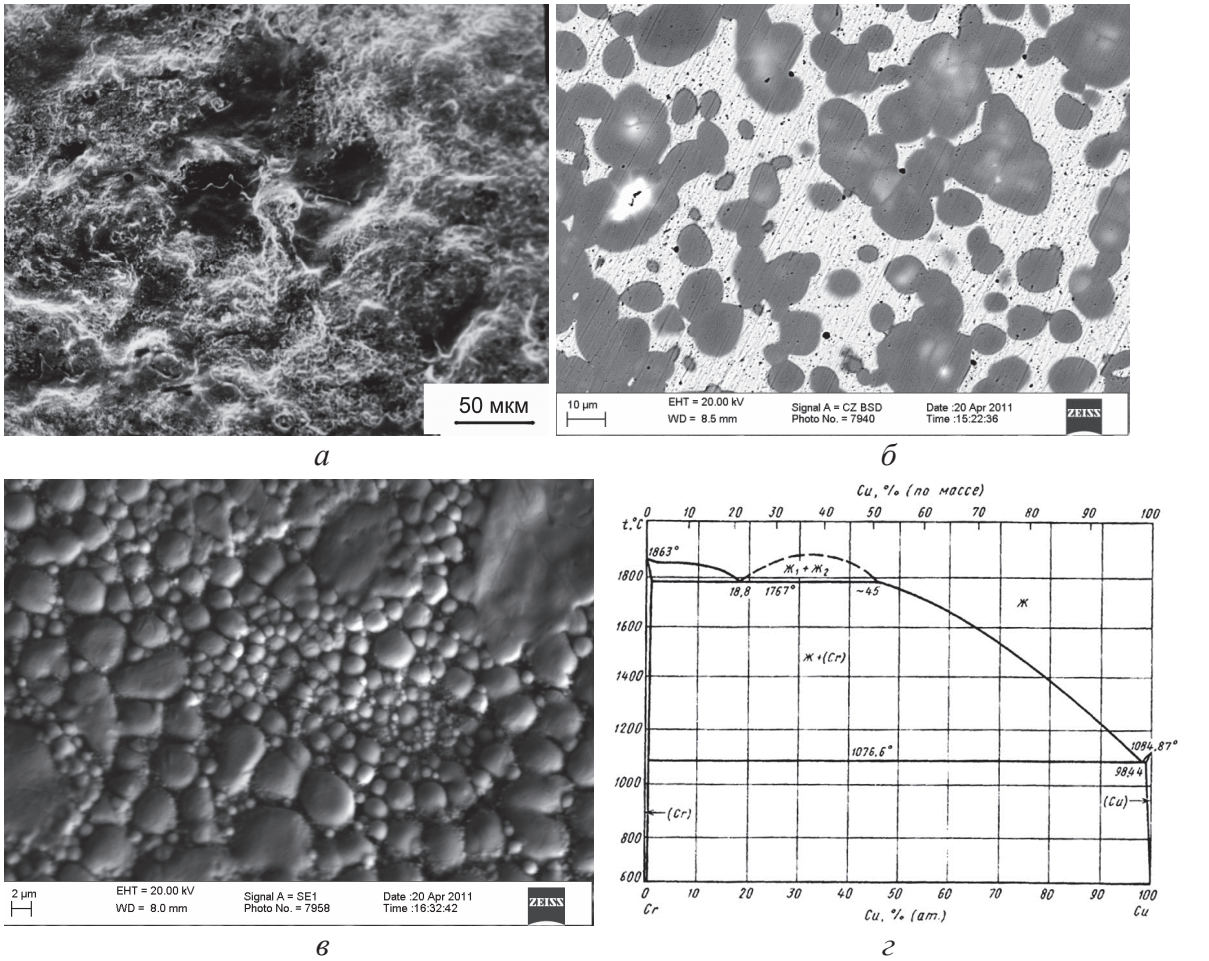


Рис. 1. *Микроструктура спеченного CuCr25 сплава после оплавления электрической дугой; а, в) в отраженных электронах с поверхности электрода, б) в обратно рассеянных электронах с поперечного шлифа, г) фазовая диаграмма CuCr*

разъединения контактов при токах короткого замыкания, составляющих десятки килоампер, в течение 10...30 мс, и соответствующих нескольким полупериодам тока частотой 50 Гц. Причем оплавление поверхности происходит неравномерно. На поперечном шлифе (рис. 1, *б*) наблюдаются переплавленные участки глубиной до 1 мм, а на поверхности обнаруживаются как исходные, так и переплавленные частицы хрома (рис. 1, *а*, *в*).

Медь имеет более высокое давление насыщенных паров по сравнению с хромом, и поэтому при плавлении сильноточной электрической дугой меднохромового сплава в вакууме происходит селективное испарение медной фазы, а переплавленный слой обогащается хромовой фазой с присущими ему эффектами жидкофазного разделения и кумулятивной сегрегации хрома. Кроме переплавленных зерен хрома в медной матрице наблюдаются вторичные выделения хрома, имеющие размеры менее 0,5 мкм, которые образуются при распаде пересыщенного медного раствора. При содержании хрома выше 50 % в соответствие с фазовой диаграммой (рис. 1, *г*) может происходить кумулятивная сегрегация выделений хрома. Поверхность контакта, обработанного электрической дугой, практически полностью состоит из зерен хрома сферической формы, а медная фаза находится на некоторой глубине под слоем хромовых выделений. Таким образом, под воздействием сильноточной вакуумной электрической дуги происходит самоорганизация структуры меднохромового композита с образованием мелкодисперсных выделений хрома (рис. 1, *б*, *в*).

Микроструктура после воздействия электронного луча. Тип структуры наплавленного CuCr контактного сплава зависит от содержания фазы хрома в медной матрице псевдосплава и температурных условий ЭЛН. При содержании хрома около 20 вес. % в структуре наблюдаются дендритообразные хромовые выделения (рис. 2, *а*). С увеличением содержания хрома примерно до 50 вес. % в структуре начинают преобладать сферические хромовые выделения (рис. 2, *б*). В области 50...70 вес. % хрома, что является предельным содержанием хрома в контактах вакуумных выключателей, наблюдаются эффекты жидкофазного разделения и кумулятивной сегрегации хрома в соответствии с фазовой диаграммой системы медь–хром (рис. 2, *в*). Исключить жидкофазное разделение хрома, приводящее к кумулятивной сегрегации, можно, если обеспечить быстрое ох-

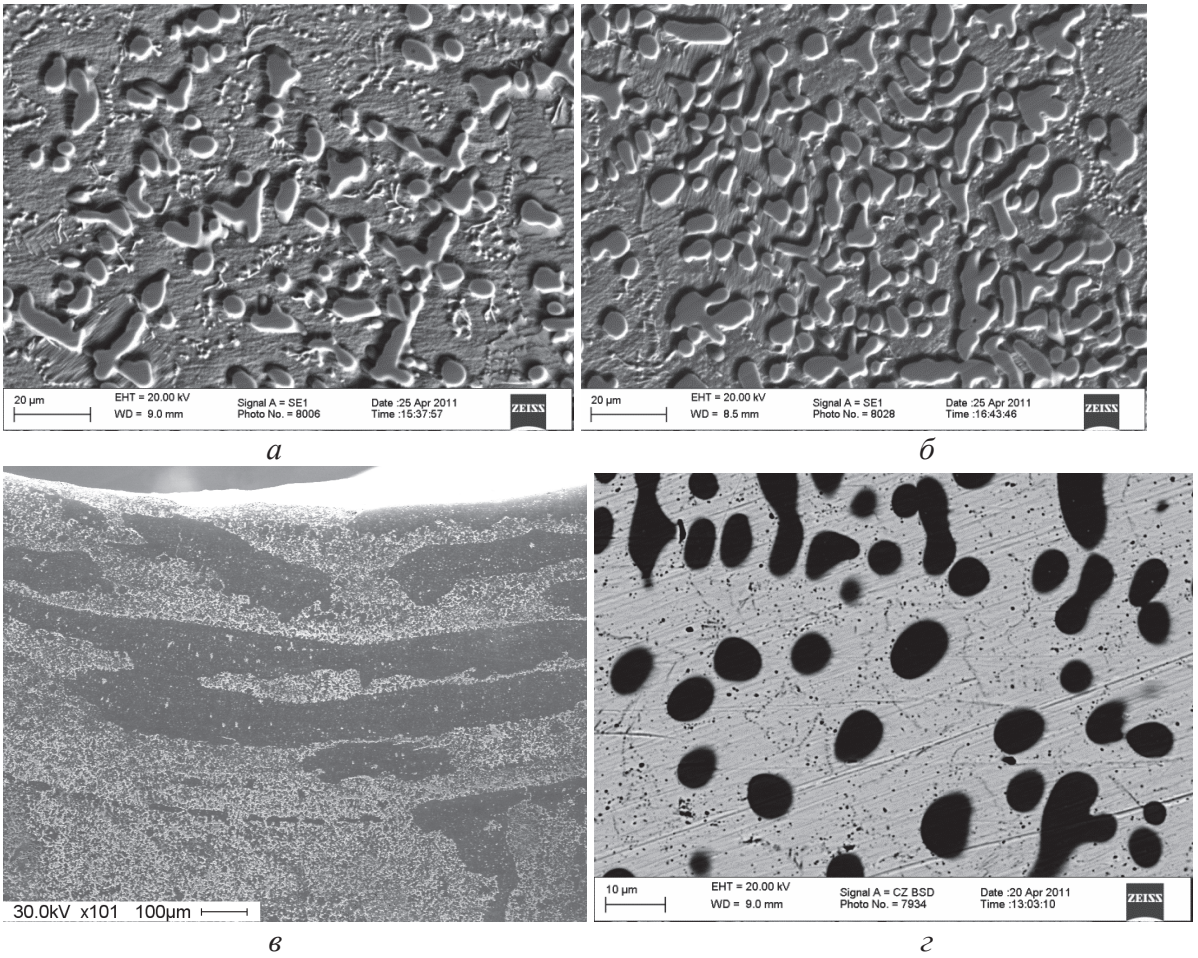


Рис. 2. *Микроструктура наплавленного электронным лучом CuCr сплава: а) CuCr20, б) CuCr50, в) CuCr70, г) выделения мелкодисперсных вторичных частиц хрома в наплавленном сплаве CuCr20; а, б, в) в отраженных электронах, г) в обратно рассеянных электронах*

лаждение из области значительного перегрева ванны расплава, находящейся выше области несмешиваемости на фазовой диаграмме. В ряде случаев это удается сделать при электронно-лучевой наплавке меднохромового композита в условиях интенсивного теплоотвода от медной подложки.

Электронно-лучевая наплавка смеси порошков меди и хрома на медную подложку технически осуществима в диапазоне температур подложки от 500 до 900 °С. Данный диапазон температур обусловлен тем, что при меньшей температуре подложки для создания ванны расплава требуется плотность мощности электронного луча не менее 10^6 Вт/см^2 и поток пара, образующийся в результате действия луча такой мощности, препятствует наплавочному материалу достигать зоны действия электронного луча. При температуре выше 900 °С сложно обеспечить сохранность медной подложки.

Микроструктура наплавленного электронным лучом CuCr контактного сплава исследовалась авторами неоднократно. В общем случае микроструктура наплавленного покрытия представляет собой двухфазный сплав и состоит из твердого раствора на основе меди и частиц хрома, которые представлены первичными выделениями хрома, являющимися твердым раствором на основе хрома, и вторичными выделениями хрома, выпавшими из пересыщенного твердого раствора на основе меди (рис. 2). Средний размер первичных выделений хрома от 3 до 5 мкм, а вторичные выделения не превышают 0,5 мкм (рис. 2, *а*, *б*, *г*). Температура подложки влияет на величину среднего размера выделений хрома. Меньшая температура соответствует меньшему размеру хромовых выделений. Объёмная доля хрома определяет морфологию выделений хрома. При минимально используемом содержании хрома 20 % кристаллизация расплава происходит с образованием протяженных дендритов хрома (рис. 2, *а*). Увеличение содержания хрома до 50 % приводит к большей коагуляции хромовых выделений за счет роста дендритов в «стесненных» условиях (рис. 2, *б*). В области содержания хрома от 50 до 70 % начинается жидкофазное разделение, приводящее к кумулятивной сегрегации хрома с образованием крупнодисперсных выделений фазы на основе хрома (рис. 2, *в*).

Структура поверхности спеченного контактного материала изменяется под действием катодных пятен сильноточной дуги короткого замыкания. Это можно считать самоорганизацией структуры при внешнем воздействии на контактный материал. Образующаяся новая литая структура более благоприятная для условий горения дуги переменного тока, особенно в области минимальных значений тока в точке его перехода через ноль.

Процессы плавления и кристаллизации контактного материала под воздействием катодного пятна вакуумной дуги или в результате действия электронного луча аналогичны в физическом плане. В обоих случаях происходит плавление хромовой фазы, растворение хрома в медной матрице и выделение мелкодисперсной фазы хрома при кристаллизации сильно пересыщенного раствора (рис. 1, *б*, *в*; рис. 2, *а*, *г*). Кумулятивная сегрегация хрома имеет место в обоих случаях и происходит при содержании хрома, превышающем 50 вес. %.

Мелкодисперсные выделения хрома в медной матрице наиболее предпочтительны для структуры контактного сплава в плане улучшения условий горения вакуумной дуги. Это является необходимым моментом для уменьшения тока среза, являющегося важной характеристикой вакуумного выключателя.

Отличие наплавленного покрытия от слоя, переплавленного катодным пятном, прежде всего, заключается в их разной толщине. Наплавленное покрытие имеет литую структуру с мелкодисперсными выделениями хрома по всей своей толщине. Этот момент оказывается благоприятным для существования катодного пятна в любом месте на поверхности электрода. При работе вакуумного выключателя в режиме номинальных токов происходит эрозия контактного сплава, но структура наплавленного CuCr-сплава на поверхности электрода при этом не изменяется, в отличие от контактов, поверхность которых модифицирована с помощью сильноточной дуги.

Выводы

В работе показано, что при электронно-лучевом воздействии происходит самоорганизация структуры контактного материала системы CuCr аналогично структуре поверхностного слоя контактов вакуумных выключателей, образующейся в процессе их эксплуатации в режиме токов короткого замыкания.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ на проведение научно-исследовательских работ ТПУ № 862.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Muller R. Arc-melted CuCr alloys as contact materials for vacuum interrupters // Siemens Forsch.-u. Entwickl.-Ber. – 1988. – V. 17. – № 3. – P. 105–111.
2. Baihe Miao Yan Zhang et al. Two New Cu-Cr Alloy Contact Materials // High Voltage Apparatus. – 2000. – V. 36. – № 3. – P. 60–62.
3. А.С. 915114 СССР, МКИ Н 01 Н 33/68. Способ подготовки контактов и электродов вакуумных дугогасительных устройств / Г.С. Белкин, С.Н. Воскресенский, В.Н. Киселев и др. (СССР). – Опубл. 23.03.82. Бюл. № 11 // Открытия. Изобретения. – 1982. – № 11. – С. 204.
4. Effect of the microstructure of electrode materials on arc cathode spot dynamics / Yaping Wang, Chengyu Zhang, Hui Zhang, Bingjun Ding, Ke Lu // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2003. – V. 36. – P. 2649–2654.
5. Коржов В.П. Спеченные порошковые заготовки электроконтактного сплава Cu–30 % Cr, плакированные литым сплавом того же состава // Физика и техника высоких давлений. – 2009. – Т. 19. – № 1. – С. 97–101.
6. Способ обработки электродов изолирующих промежутков высоковольтных электровакуумных приборов: пат. Рос. Федерация № 2384911; заявл. 15.12.2008; опубл. 20.03.10, Бюл. № 8.
7. Влияние технологических параметров электронно-лучевой наплавки на структуру медно-хромовых композитов / В.Г. Дураков, С.Ф. Гнюсов, Б.В. Дампилон, С.З. Дехонова // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 80–86.
8. Microstructure and properties of vacuum electron beam facing CuCr25 contact material / V.G. Durakov, S.F. Gnyusov, B.V. Dampilon, S.Z. Dekhonova, B.I. Ubiennykh // Proceedings of the XXVth Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum. – Tomsk, Russia, Institute of high current electronics SB RAS, 2012, September 2–7. – V. 2. – P. 525–528.

Поступила 03.09.2013 г.

UDC 621.793.794.357.7

SELF-ORGANIZATION OF CONTACT MATERIAL CuCr STRUCTURE IN VACUUM SWITCH AT ELECTRON BEAM ACTION

Vasily G. Durakov,
Cand. Sc., Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS,
Russia, 634021, Tomsk, pr. Akademicheskii, 2/4. E-mail: electron@ispms.tsc.ru

Sergey F. Gnyusov,
Dr. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634021, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: gnusov@rambler.ru

Bair V. Dampilon,
Cand. Sc., Institute of Strength Physics and Materials Science, SB RAS, Russia,
634021, Tomsk, pr. Akademicheskii, 2/4. E-mail: dampilon@ispms.tsc.ru

Svetlana Z. Dekhonova,
V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics, SB RAS, Russia, 634021,
Tomsk, Academician Zuev square, 1. E-mail: dana0863@mail.ru

Electron beam cladding in vacuum was carried out according to the Archimedes spiral on copper billet of 80 mm diameter and 10 mm thickness. The authors have used a mixture of copper and chromium powders with chromium content fromf 20 to 50 wt. % for electron-beam cladding. Copper and chromium powder particle size was in the range from 90 to 125 microns. The comparison study of microstructures generated on the contact materials by vacuum arc surface melting and the microstructure of contact materials after electron beam cladding was carried out. The analysis of the microstructures was carried out using a scanning electron microscope Leo Evo 50 equipped with microanalysis by secondary and backscattered electrons. The authors identified the areas of preferential combustion of cathode spots on the surface of the sintered contact material. It is shown that copper evaporates preferentially during the surface melting of the contact material by vacuum arc and the surface layer is enriched in chromium. Surface melting zone has a non-uniform depth on the contact material. Surface melting areas of contact material alternate with areas having the original structure. In the surface melting areas a bimodal structure is formed. It consists of primary and secondary chromium precipitates of either micron or submicron size, respectively. CuCr clad coatings demonstrate a bimodal structure similar to the structure of the surface layer contacts of vacuum switches fused by short circuit currents. Thus, it is shown that the electron-beam cladding is self-organizing structure of the contact material similar to the surface layer structure of vacuum circuit breakers contacts formed at their operation.

Key words:
CuCr coating, electron beam cladding, microstructure, contact alloy, bimodal structure.

REFERENCES

1. Muller R. Arc-melted CuCr alloys as contact materials for vacuum interrupters. *Siemens Forsch.- u. Entwickl.-Ber.*, 1988, vol. 17, no. 3, pp. 105–111.
2. Baihe Miao Yan Zhang. Two New Cu-Cr Alloy Contact Materials. *High Voltage Apparatus*, 2000, vol. 36, no. 3, pp. 60–62.
3. Belkin G.S., Voskresenskiy S.N., Kiselev V.N. A.S. 915114 SSSR, MKI N 01 N 33/68. *Sposob podgotovki kontaktov i elektrodov vakuumnykh dugogasitelnykh ustroystv* [Method for preparing contacts and electrodes of vacuum arc quenching device]. *Discoveries. Inventions*, 1982, no. 11, p. 204.
4. Korzhov V.P. Spechennye poroshkovye zagotovki elektrokontaktnogo splava Cu–30 % Cr, plakirovannye litym splavom togo zhe sostava [Sintered powder billets of electrocontact Cu–30 % Cr alloy clad by cast alloy of the same composition]. *High pressure physics and technics*, 2009, vol. 19, no. 1, pp. 97–101.
5. Yaping Wang, Chengyu Zhang, Hui Zhang, Bingjun Ding, Ke Lu. Effect of the microstructure of electrode materials on arc cathode spot dynamics. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2003, vol. 36, pp. 2649–2654.
6. Batrakov A.V., Ozur G.E., Proskurovskiy D.I., Rotshteyn V.P. *Sposob obrabotki elektrodov izoliruyushchikh promezhutkov vysokovoltnykh elektrovakuumnykh priborov* [Method for treatment of electrodes in insulating gaps of high-voltage electric vacuum instruments]. Patent RF, no. 2384911, 2010.
7. Durakov V.G., Gnyusov S.F., Dampilon B.V., Dekhonova S.Z. Vliyanie tekhnologicheskikh parametrov elektronno-luchevoy naplavki na strukturu medno-khromovykh kompozitov [Influence of technological parameters of electron beam cladding on the structure of copper-chromium composites]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 320, no. 2, pp. 80–86.
8. Durakov V.G., Gnyusov S.F., Dampilon B.V., Dekhonova S.Z., Ubiennykh B.I. Microstructure and properties of vacuum electron beam facing CuCr25 contact material. *Proceedings of the XXVth Int. Symp. on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum*, Tomsk, Russia, Institute of high current electronics SB RAS, 2012, September 2–7. Vol. 2, pp. 525–528.

УДК 535.36

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ СЛОИСТОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Горячев Борис Валентинович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики
Физико-технического института ТПУ, Россия, 634050,
г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: bvg@tpu.ru

Могильницкий Сергей Борисович,
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики
Физико-технического института ТПУ, Россия, 634050,
г. Томск, пр. Ленина, д. 30. E-mail: msb@tpu.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью разработки модели взаимодействия солнечного излучения с атмосферой для точного и долговременного предсказания погодных и климатических явлений в атмосфере.
Цель работы: *решение задачи переноса излучения в слоистой дисперсной среде в аналитическом виде и определение некоторых общих закономерностей переноса излучения в зависимости от параметров излучения и среды, в частности атмосферы.*
Методы исследования: *решение уравнения переноса излучения для пространственно ограниченной слоистой дисперсной среды, основанное на точном решении уравнения переноса излучения в одномерной среде.*
Результаты: *Получены аналитические выражения для расчета коэффициента пропускания, отражательной и поглощательной способности трехслойной дисперсной среды. Показано, что величина поглощения сильно зависит от положения поглощающего слоя внутри дисперсной среды. Наибольшее поглощение наблюдается при верхнем положении поглощающего слоя, наименьшее – при расположении слоя у поверхности (при освещении среды сверху), причем в этом случае поглощение слабо зависит от положения поглощающего слоя. Подобные зависимости выполняются при различной величине оптической плотности дисперсной среды.*

Ключевые слова:
Радиация, атмосфера, дисперсная среда, поглощение, слой.

Введение

Исследование поглощательной способности дисперсных сред проводится на основе методов теории переноса излучения и численных методов [1]. При проведении исследований используются различные модели атмосферы [2–5]. Точность получаемых результатов зависит от точности используемых приближений и учета всех эффектов, существенно влияющих на результат, например эффекта пространственной ограниченности дисперсной среды [6–9].

Теория

Целью данной работы является решение задачи переноса излучения в аналитическом виде и определение некоторых закономерностей переноса в слоистой дисперсной среде. Аналитическое решение задачи получено с использованием метода многократных отражений [6]. Дисперсная среда представляется в виде прямоугольного параллелепипеда, разделенного на три плоских слоя при нормальном падении потока излучения на поверхность дисперсной среды. Получены аналитические выражения для определения коэффициента пропускания $A_{123}(\tau,a,\Lambda)$, отражательной способности $B_{123}(\tau,a,\Lambda)$ и поглощательной способности $C_{123}(\tau,a,\Lambda)$ слоистой дисперсной среды.

Введем обозначения: оптические размеры $\tau=\alpha l$ (α – коэффициент ослабления; l – геометрические размеры дисперсной среды) первого слоя параллелепипеда $\tau_{1x_0}\times\tau_{1y_0}\times\tau_{1z_0}$ (излучение распространяется по оси x, поперечные оптические размеры одинаковы для всех слоев и равны $\tau_{1y_0}\times\tau_{1z_0}$), второго слоя $\tau_{2x_0}\times\tau_{1y_0}\times\tau_{1z_0}$; третьего слоя $\tau_{3x_0}\times\tau_{1y_0}\times\tau_{1z_0}$; индикатриса рассеяния излучения, характеризуемая степенью вытянутости $a=(\eta+2\mu)/(\beta+2\mu)$, η, β, μ – интегральные параметры индикатрисы рассеяния [6, 7]; вероятность выживания кванта в первом слое Λ_1, во втором – Λ_2, в третьем – Λ_3. В данной модели дисперсной среды, используемой для расчета радиационных характеристик атмосферы, параметры каждого слоя определяются в результате атмосферных исследований [10–15]. На основе метода многократных отражений получены формулы:

$$B_{123} = B_1 + \frac{F_1^2 B_3^2 + F_4 F_5}{B_3 F_5 F_2};$$

$$C_{123} = C_1 + \frac{A_1}{F_2}\left[F_6 + \frac{A_2(F_2F_7 + B_3F_6)}{F_5}\right].$$

Обозначения:

$$F_1 = A_1(\tau,a,\Lambda)A_2(\tau,a,\Lambda);$$
$$F_2 = 1 - B_1(\tau,a,\Lambda)B_2(\tau,a,\Lambda);$$
$$F_3 = 1 - B_1(\tau,a,\Lambda)B_3(\tau,a,\Lambda);$$
$$F_4 = A_1^2(\tau,a,\Lambda)B_2(\tau,a,\Lambda)B_3(\tau,a,\Lambda);$$
$$F_5 = F_2F_3 - F_4;$$
$$F_6 = C_2(\tau,a,\Lambda) + C_1(\tau,a,\Lambda)B_2(\tau,a,\Lambda);$$
$$F_7 = C_3(\tau,a,\Lambda) + C_1(\tau,a,\Lambda)B_3(\tau,a,\Lambda).$$

Радиационные характеристики каждого из слоев $A_i(\tau,a,\Lambda)$, $B_i(\tau,a,\Lambda)$, $C_i(\tau,a,\Lambda)$, где $i = 1,2,3$, определяются следующим образом [6]:

$$A_i(\tau,a,\Lambda)=$$
$$=\frac{[1-R_i^2(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)]\exp[-k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\tau_{ix_0}]}{1-R_i^2(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\exp[-2k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\tau_{ix_0}]};$$
$$B_i(\tau,a,\Lambda)=$$
$$=\frac{R_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\{1-\exp[-2k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\tau_{ix_0}]\}}{1-R_i^2(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\exp[-2k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\tau_{ix_0}]};$$
$$C_i(\tau,a,\Lambda)=$$
$$=\frac{[1-R_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)]\{1-\exp[-k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\tau_{ix_0}]\}}{1+R_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\exp[-k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)\tau_{ix_0}]}.$$

Переменные коэффициенты $k(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)$ и $R(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)$, зависящие от поперечных оптических размеров дисперсной среды, индикатрисы рассеяния излучения и вероятности выживания кванта, разные для каждого слоя и имеют вид:

$$k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)=\sqrt{P_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)[1-\Lambda_i(\eta-\beta_i)]};$$
$$R_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)=\frac{k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)-P_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)}{k_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)+P_i(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)}.$$

Функция $P(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)$ определяет рассеяние и поглощение излучения по оси x и в частном случае изотропной индикатрисы рассеяния и полубесконечной среды [6]:

$$P(\tau_y,\tau_z,a,\Lambda)=\frac{(1-\Lambda)(27-11\Lambda+\Lambda^2)}{3(9-7\Lambda+\Lambda^2)}.$$

Результаты

Рассмотрим некоторые результаты расчетов по данным формулам потоков монохроматического излучения в слоистой дисперсной среде.

В качестве модели слоистой дисперсной среды возьмем трехслойную среду со сферической индикатрисой рассеяния излучения и разной вероятностью выживания кванта по слоям. В частном случае дисперсной среды, состоящей из поглощающего и двух рассеивающих слоев, формулы упрощаются и зависят от положения поглощающего слоя внутри среды. При помещении поглощающего слоя первым (по отношению к направлению распространения излучения) формула для поглощательной способности имеет вид:

$$C_{123}=C_1\left\{1+\frac{A_1}{F_2}\left[B_2+\frac{A_2B_3(F_2+A_1B_2)}{F_5}\right]\right\}.$$

При расположении поглощающего слоя внутри дисперсной среды (C_1=C_3=0):

$$C_{123}=\frac{C_2A_1}{F_2}\left(1+\frac{F_1B_3}{F_5}\right).$$

При помещении слоя с поглощением в конце дисперсной среды (C_1=C_2=0):

$$C_{123}=\frac{C_3F_1}{F_5}.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 1, 2. Поперечные оптические размеры дисперсной среды равны $\tau_{1y_0}\times\tau_{1z_0}=10^5$. На рис. 1 представлены зависимости поглощающей способности C_{123} трехслойной дисперсной среды от оптической высоты поглощающего слоя, при различных положениях слоя оптической плотности τ_{1x_0}=1 и при разных значениях вероятности выживания кванта.

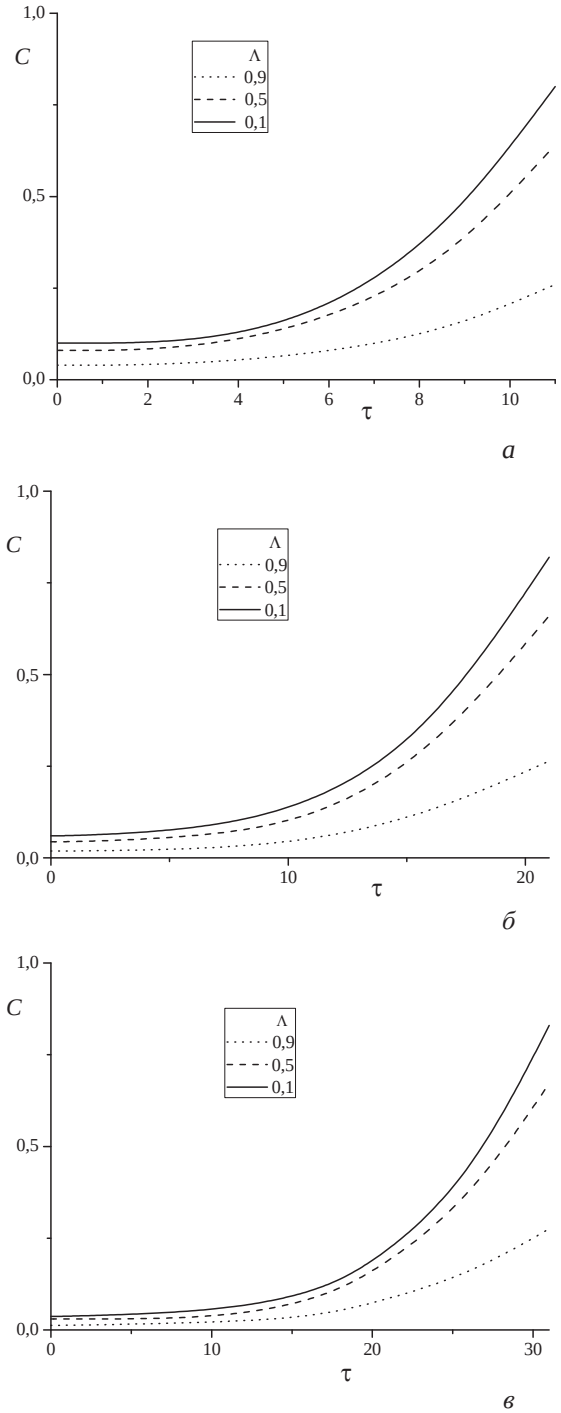


Рис. 1. *Зависимость поглощательной способности C_{123} трехслойной дисперсной среды от высоты поглощающего слоя, степень вытянутости индикатрисы рассеяния излучения a_1=a_2=a_3=1: а) оптическая плотность слоев дисперсной среды τ_{x_0}= τ_{1x_0}+τ_{2x_0}+τ_{3x_0}=11; б) τ_{x_0}=21; в) τ_{x_0}=31*

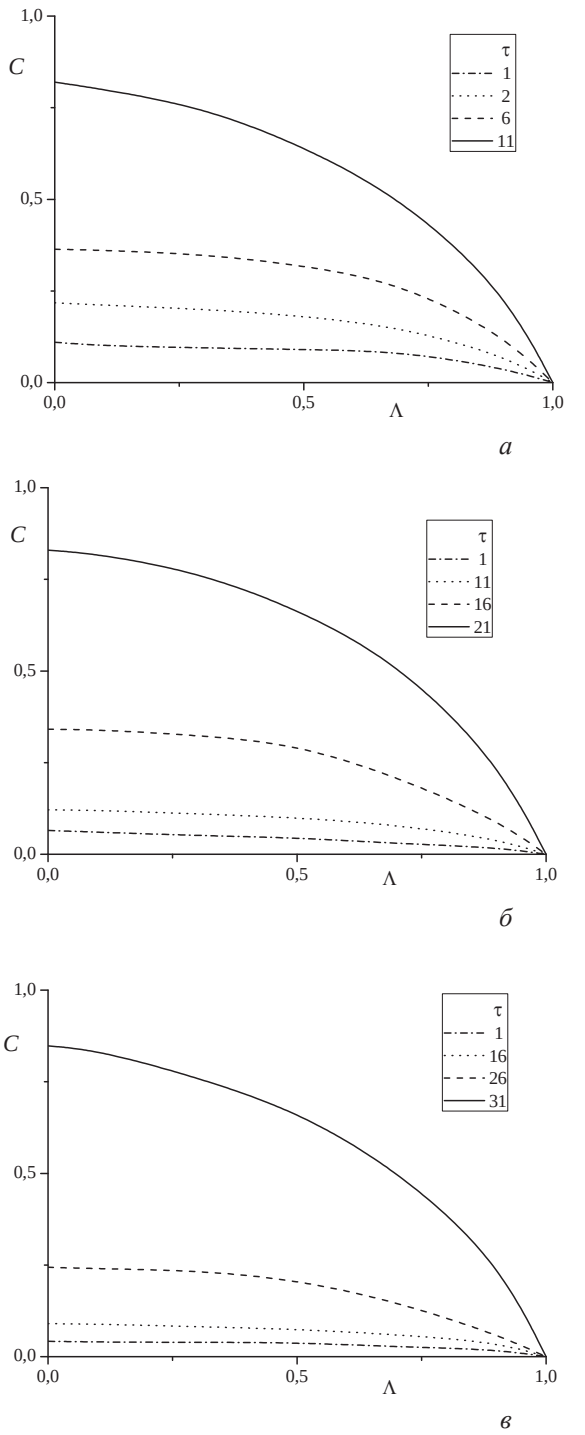


Рис. 2. *Зависимость поглощательной способности C_{123} трехслойной дисперсной среды от вероятности выживания кванта поглощающего слоя, степень вытянутости индикатрисы рассеяния излучения $a_1=a_2=a_3=1$: а) оптическая плотность слоев дисперсной среды $\tau_{x0}=\tau_{1x0}+\tau_{2x0}+\tau_{3x}=11$; б) $\tau_{x0}=21$; в) $\tau_{x0}=31$*

Представленные на рис. 1 данные показывают, что величина поглощения сильно зависит от положения поглощающего слоя внутри дисперсной среды. Наибольшее поглощение наблюдается при верхнем положении поглощающего слоя, наименьшее – при расположении слоя у поверхности, причем в этом случае поглощение слабо зависит от положения поглощающего слоя. Подобные зависимости наблюдаются при различной величине оптической плотности атмосферы τ_{x_0}, и влияние τ_{x_0} на поглощательную способность невелико.

Рис. 2 иллюстрирует влияние вероятности выживания кванта на поглощательную способность атмосферы. Из полученных данных следует, что зависимость поглощательной способности атмосферы от величины вероятности выживания кванта при различных положениях поглощающего слоя наибольшая при верхнем положении слоя и практически не зависит от Λ при нижнем положении слоя (при наличии рассеивающего слоя дисперсного среды над приземным слоем, например, облачности). Подобные зависимости выполняются при разных оптических плотностях атмосферы.

Выводы

1. Получены аналитические выражения для расчета коэффициента пропускания, отражательной и поглощательной способности трехслойной дисперсной среды.
2. Показано, что величина поглощения сильно зависит от положения поглощающего слоя внутри дисперсной среды. Наибольшее поглощение наблюдается при верхнем положении поглощающего слоя, наименьшее – при расположении слоя у поверхности, причем в этом случае поглощение слабо зависит от положения поглощающего слоя. Подобные зависимости наблюдаются при различной величине оптической плотности атмосферы τ_{x_0}, и влияние τ_{x_0} на поглощательную способность невелико.
3. Зависимость поглощательной способности атмосферы от величины вероятности выживания кванта при различных положениях поглощающего слоя наибольшая при верхнем положении слоя и практически не зависит от Λ при нижнем положении слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленобль Ж. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1990. – 264 с.
2. Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., et al. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer // J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer. – 2010. – V. 111. – P. 1931–1946.
3. Восстановление коэффициентов аэрозольного ослабления оптического излучения на протяженной приземной трассе по данным измерений параметров аэрозоля в локальном объеме / Ю.А. Пхалагов, В.Н. Ужегов, В.С. Козлов, М.В. Панченко, С.А. Терпугова, Е.П. Яушева // Оптика атмосферы и океана. – 2013. – Т. 26. – № 06. – С. 478–483.
4. Потоки солнечной радиации в безоблачной атмосфере Западной Сибири: сравнение результатов моделирования и натурных измерений / Т.Б. Журавлева, С.М. Сакерин, Т.В. Бедарева, Д.М. Кабанов, И.М. Насртдинов, Т.Ю. Чеснокова // Оптика атмосферы и океана. – 2013. – Т. 26. – № 11. – С. 985–994.
5. Матвиенко Г.Г., Погодаев В.А. Оптика атмосферы и океана – неоконченный урок взаимодействия оптического излучения со средой распространения // Оптика атмосферы и океана. – 2012. – Т. 25. – № 01. – С. 5–10.
6. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Некоторые особенности переноса излучения в пространственно ограниченных дисперсных средах // Известия Томского политехнического университета. – 2000. – Т. 303. – № 3. – С. 91–104.
7. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Влияние отражающей поверхности на радиационный баланс дисперсной среды // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 39–42.
8. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Перенос оптического излучения в слоистой дисперсной среде с отражающей поверхностью // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 2. – С. 78–81.
9. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Исследование отражательной способности слоистой дисперсной среды // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 63–66.
10. Griesheimer D.P., Millman D.L., Willis C.R. Analysis of distances between inclusions in finite binary stochastic materials // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. – 2011. – V. 112. – P. 577–598.
11. Kassianov E., Veron D. Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. – 2011. – V. 112. – P. 566–576.
12. Coupled ocean-atmosphere radiative transfer model in the framework of software package SCIATRAN: Selected comparisons to model and satellite data / M. Blum, V.V. Rozanov, J.P. Burrows, A. Bracher // Advances in Space Research. – 2012. – V. 49. – P. 1728–1742.
13. Synergetic cloud fraction determination for SCIAMACHY using MERIS / C. Schlundt, A.A. Kokhanovsky, von Hoyningen-Huene W., T. Dinter, L. Istomina, J.P. Burrows // Atmos. Meas. Tech. – 2011. – V. 4. – P. 319–337.
14. Multiple scattering in a dense aerosol atmosphere / S. Mukai, T. Yokomae, I. Sano, M. Nakata, A. Kokhanovsky // Atmos. Meas. Tech. Discuss. – 2012. – V. 5. – P. 881–907.
15. Otto S. Analytical properties of the radiance in atmospheric radiative transfer theory // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. – 2014. – V. 133. – P. 329–350.

Поступила 21.11.2013 г.

UDC 535.36

THE RESEARCH OF LAYERED DISPERSION MEDIA ABSORPTION

Boris V. Goryachev,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634021, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: bvg@tpu.ru

Sergey B. Mogilnitsky,
Cand. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634021, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: msb@tpu.ru

The urgency of the discussed issue is caused by the need to develop the model for interaction between the sun radiation and atmosphere for the exact and long-term forecast of weather and climate phenomena in the atmosphere.
The main aim of the study *is to solve the problem on radiation transfer in the layered dispersed media analytically and to identify the general laws on radiation transfer depending on the radiation parameters and media.*
The methods used in the study: *solution of the radiation transfer equation for space-limited layered dispersed media; the equation solution is based on the exact solution of the radiation transfer equation in one-dimensional media.*
The results: *the authors have studied the radiation transfer in multilayer dispersed media. The analytical formulae for calculating the transmission coefficient, reflectance and absorption of dispersion media consisting of three plane layers were obtained. It was shown that absorption of dispersed media depends strongly on absorption layer position in dispersed media. The highest absorption value is registered at upper position of the absorbing layer; the lowest value is marked at the layer lower position when the light falls from above. In this case the absorption slightly depends on the absorbing layer position. Similar characteristics were obtained for different values of optical thickness of dispersion media.*

Key words:
Radiation, atmosphere, dispersion media, absorption, layer.

REFERENCES

1. Lenoble J. *Perenos radiatsii v rasseivayushchikh i pogloshchayushchikh atmoasferakh* [Radiative transfer in scattering and absorbing atmospheres: standard computational procedures]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1990. 264 p.
2. Kokhanovsky A.A., Budak V.P., Cornet C., et al. Benchmark results in vector atmospheric radiative transfer. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 2010, vol. 111, pp. 1931–1946.
3. Pkhalagov Yu.A., Uzhegov V.N., Kozlov V.S., Panchenko M.V., Terpugova S.A., Yausheva E.P. Vosstanovlenie koeffitsientov aerozolnogo oslableniya opticheskogo izlucheniya na protyazhennoy prizemnoy trasse po dannym izmereniy parametrov aerozolya v lokalnom obeme [Retrieval of the aerosol extinction coefficients on a long near-ground path by the data on the aerosol parameters in a local volume]. *Atmospheric and oceanic optics*, 2013, vol. 26, no. 6, pp. 478–483.
4. Zhuravleva T.B., Sakerin S.M., Bedareva T.V., Kabanov D.M., Nasrtdinov I.M., Chesnokova T.Yu. Potoki solnechnoy radiatsii v bezoblachnoy atmosfere Zapadnoy Sibiri: sravnenie rezultatov modelirovaniya i naturnykh izmereniy [Solar radiation fluxes in the clear atmosphere of Western Siberia: a comparison of calculations with measurements]. *Atmospheric and oceanic optics*, 2013, vol. 26, no. 11, pp. 985–994.
5. Matvienko G.G., Pogodaev V.A. Optika atmosfery i okeana – neokonchennyy urok vzaimodeystviya opticheskogo izlucheniya so sredoy rasprostraneniya [Atmospheric and ocean optics as uncompleted task of interaction of optical radiation with a propagation medium]. *Atmospheric and oceanic optics*, 2012, vol. 25, no. 1, pp. 5–10.
6. Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B. Nekotorye osobennosti perenosa izluchenia v prostranstvenno ogranichennykh dispersnykh sredakh [Some special of radiation transfer in space-limited dispersion media]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2000, vol. 303, no. 3, pp. 91–104.
7. Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B. Vliyanie otrazhayushchey poverkhnosti na radiatsionny balans dispersnoy sredy [The influence of reflective surface on radiation balance of dispersion media]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 2, pp. 39–42.
8. Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B. Perenos opticheskogo izlucheniya v sloistoy dispersnoy srede s otrazhayushchey poverkhnostyu [Optical radiation transfer in layered dispersion media with reflective surface]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 322, no. 2, pp. 78–81.
9. Goryachev B.V., Mogilnitsky S.B. Issledovanie otrazhatelnoy sposobnosti sloistoy dispersnoy sredy [The research of layered dispersion media reflectance]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 63–66.
10. Griesheimer D.P., Millman D.L., Willis C.R. Analysis of distances between inclusions in finite binary stochastic materials. *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*, 2011, vol. 112, pp. 577–598.
11. Kassianov E., Veron D. Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future. *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*, 2011, vol. 112, pp. 566–576.
12. Blum M., Rozanov V.V., Burrows J.P., Bracher A. Coupled ocean-atmosphere radiative transfer model in the framework of software package SCIATRAN: Selected comparisons to model and satellite data. *Advances in Space Research*, 2012, vol. 49, pp. 1728–1742.
13. Schlundt C., Kokhanovsky A.A., von Hoyningen-Huene W., Dinter T., Istomina L., Burrows J.P. Synergetic cloud fraction determination for SCIAMACHY using MERIS. *Atmos. Meas. Tech.*, 2011, vol. 4, pp. 319–337.
14. Mukai S., Yokomae T., Sano I., Nakata M., Kokhanovsky A. Multiple scattering in a dense aerosol atmosphere. *Atmos. Meas. Tech. Discuss.*, 2012, vol. 5, pp. 881–907.
15. Otto S. Analytical properties of the radiance in atmospheric radiative transfer theory. *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer*, 2014, vol. 133, pp. 329–350.

УДК 669.14:539.4

ВЛИЯНИЕ ИСХОДНОГО СОСТОЯНИЯ НИЗКОУГЛЕРОДИСТЫХ СТАЛЕЙ НА СТРУКТУРУ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА, ФОРМИРУЕМЫЕ ПРИ РАВНОКАНАЛЬНОМ УГЛОВОМ ПРЕССОВАНИИ

Астафурова Елена Геннадьевна,
д-р физ.-мат. наук, доцент, ст. науч. сотр. Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 634021, г. Томск, пр. Академический, 2/4. E-mail: elena.g.astafurova@gmail.com

Майер Галина Геннадьевна,
канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 634021, г. Томск, пр. Академический, 2/4. E-mail: galinazg@yandex.ru

Найденкин Евгений Владимирович,
канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией физического материаловедения Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук, Россия, 634021, г. Томск, пр. Академический, 2/4. E-mail: nev@ispms.tsc.ru

Рааб Георгий Иосифович,
д-р техн. наук, доцент, заместитель директора по новым технологиям Научно-исследовательского института физики перспективных материалов государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уфимский государственный авиационный технический университет», Россия, Республика Башкортостан, 450025, г. Уфа, ул. Карла Маркса, д. 12. E-mail: giraab@mail.ru

Одесский Павел Дмитриевич,
д-р техн. наук, профессор, заведующий сектором лаборатории филиала Федерального государственного унитарного предприятия «Научно-исследовательский центр "Строительство" – "Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций имени В.А. Кучеренко"», Россия, 109428, г. Москва, ул. 2-я Индустриальная, д. 6. E-mail: odesskiy@tsniisk.ru

Добаткин Сергей Владимирович,
д-р техн. наук, профессор, заведующий лабораторией металловедения цветных и легких металлов Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова Российской академии наук, Россия, 119991, г. Москва, Ленинский проспект, 49. E-mail: dobatkin@imet.ac.ru

Методами оптической металлографии, просвечивающей электронной микроскопии и рентгеноструктурного анализа проведены исследования микроструктуры и фазового состава низкоуглеродистых сталей 10Г2ФТ и 06МБФ, подвергнутых интенсивной пластической деформации методом равноканального углового прессования из различных исходных состояний (после нормализации, закалки, закалки и последующего высокого отпуска). Независимо от исходного структурно-фазового состояния при равноканальном угловом прессовании в исследуемых сталях формируется субмикрокристаллическая зеренно-субзенная структура с размером элементов ≈300 нм (феррит), стабилизированная дисперсными частицами. При близком размере элементов субструктуры после равноканального углового прессования исследуемые состояния характеризуются различным уровнем прочностных свойств: наибольшими значениями предела текучести и микротвердости обладает сталь 10Г2ФТ, сформированная из исходно закаленного состояния ($\sigma_{0,2}$=1125 МПа, H_μ=3,7 ГПа), в сравнении со сталями 10Г2ФТ и 06МБФ, полученными из двух других состояний ($\sigma_{0,2}$=960–990 МПа, H_μ=3,1–3,3 ГПа). Проанализированы основные физические факторы, определяющие характер субмикрокристаллической структуры низкоуглеродистых сталей после интенсивной пластической деформации, и проведена оценка вклада основных механизмов упрочнения в предел текучести стали.

Ключевые слова:
Низкоуглеродистая сталь, равноканальное угловое прессование, феррит, перлит, мартенсит, дисперсионное твердение, ультрамелкозернистая структура, кривые течения, микротвердость.

Введение

Низкоуглеродистые стали являются важным классом промышленных конструкционных материалов, поэтому улучшение комплекса их эксплуатационных свойств носит важное фундаментальное и прикладное значение и является актуальным

направлением физического металловедения. Одним из перспективных способов повышения прочностных и пластических характеристик таких материалов является модификация их структуры методами интенсивной пластической деформации (ИПД) [1]. Значительное измельчение исходной зеренной структуры и получение субмикрокристаллических (СМК) и нанокристаллических (НК) структурных состояний при подобного рода воздействиях позволяет сформировать высокопрочные состояния без изменения химического состава заготовки [1, 2]. К настоящему времени в работах отечественных и зарубежных авторов показана возможность повышения механических свойств пластичных металлов (Cu, Ni, Al, Ti и др.) за счет формирования в них НК и СМК структурных состояний, и достигнут существенный прогресс в понимании физических процессов, протекающих при ИПД металлов и сплавов на их основе, в том числе и сталей различных классов [1–13]. Тем не менее, механизмы, обуславливающие изменения структуры и свойств в таком технологически важном классе материалов, как стали, изучены недостаточно подробно, это связано со сложностями сохранения оснастки при деформировании сталей методами ИПД, с многообразием композиций и структурно-фазовых состояний в них [7–12].

Одной из важных фундаментальных проблем, возникающих при создании СМК и НК сталей, является поиск путей управления структурно-фазовым состоянием, формирующимся при ИПД. Выбор исходной структуры стали или её оптимизация является одним из способов управления параметрами и прочностными характеристиками таких состояний. В работах, посвященных ИПД низкоуглеродистых сталей, авторы ограничивались чаще всего исследованиями материалов с исходно феррито-перлитной структурой из-за удобства деформирования [9, 11, 12]. Систематических сравнительных исследований и анализа структурно-фазовых состояний при ИПД сталей с различной исходной структурой проведено мало [8]. При этом оптимизация исходного состояния может способствовать получению однородного распределения карбидов в структуре сталей после ИПД, повышая тем самым, эффективность дисперсионного твердения, увеличивая прочность и устойчивость СМК и НК структур к высокотемпературным отжигам.

Цель данной работы – выявить влияние исходной структуры (феррито-перлитной после нормализации, мартенситной после закалки, ферритной после закалки и последующего высокого отпуска) на особенности структурно-фазового состояния и механические свойства низкоуглеродистых сталей 10Г2ФТ и 06МБФ, формируемые при равноканальном угловом прессовании.

Материалы и методика исследования

В качестве объекта исследования были выбраны низкоуглеродистые стали 10Г2ФТ (Fe-1,1Mn-0,1Cr-0,1Ni-0,1Al-0,2Si-0,1P-0,1Ti-0,1V-0,1C, мас. %) и 06МБФ (Fe-0,1Mo-0,6Mn-0,8Cr-0,2Ni-0,3Si-0,2Cu-0,03Nb-0,1V-0,09C). Для получения феррито-перлитной структуры сталь 10Г2ФТ после горячей ковки (температура конца ковки ~1000 °С, охлаждение на воздухе) подвергали нормализации 30 мин при 950 °С. После закалки от 1180 °С (выдержка 30 мин) в воду в стали 10Г2ФТ получали структуру мартенсита самоотпуска. Сталь 06МБФ закаливали от 920 °С (30 мин), затем проводили высокий отпуск (улучшение) при температуре 670 °С (1 ч). В результате такой обработки в стали 06МБФ получали ферритную с карбидами (сорбитную) структуру. Для указания различий в исходной обработке сталей по тексту статьи будем называть эти структурные состояния феррито-перлитным, мартенситным и ферритным соответственно.

Субмикрокристаллическую структуру в сталях формировали методом теплого равноканального углового прессования (РКУП): режим B_C, угол сопряжения между каналами (Ф) составлял 120°, N=4 прохода при T=200 °С (0,3 $T_{пл}$) для стали 10Г2ФТ с феррито-перлитной структурой; N=4 при T=400 °С (0,4 $T_{пл}$) для стали 10Г2ФТ с мартенситной структурой; N=6 при T=300 °С (0,3$T_{пл}$) для стали 06МБФ со структурой феррита. Эквивалентную деформацию, реализуемую при РКУП, рассчитывали по соотношению [1]:

$$\varepsilon_N = N\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{ctg}(\text{Ц}/2),$$

для стали 10Г2ФТ она составила 2,7, для 06МБФ – 4,0.

Анализ структуры выполняли с использованием оптического микроскопа Olympus GX-71, просвечивающих электронных микроскопов (ПЭМ) Philips CM200, Philips CM30 при ускоряющем напряжении 200 и 300 кВ. Средний размер элементов структуры (размер зерен, фрагментов, дисперсных фаз) определяли методом секущих по оптическим и электронно-микроскопическим изображениям [14, 15]. Микродифракционные картины получали с площади 0,5 или 1,4 мкм^2. Индицирование микроэлектронограмм осуществляли стандартным способом [14].

Для рентгеновских исследований использовали дифрактометр Shimadzu XRD-6000 (с монохроматором, Cu K_α излучение). Оценку плотности дислокаций проводили на основе анализа профилей Брегговских максимумов по формуле:

$$\rho=2\sqrt{3}\langle\varepsilon_{khl}^2\rangle^{1/2}/(D_{hkl}b),$$

где D_{hkl} и $\langle\varepsilon_{khl}^2\rangle^{1/2}$ – усредненные по объему величины размеров областей когерентного рассеяния и микронапряжений в направлении, перпендикулярном к плоскости (hkl); b – вектор Бюргерса дислокации (для α-железа b=0,248 нм) [16].

Образцы для механических испытаний растяжением вырезали в форме двойных лопаток с размером рабочей части 2,6×0,5×10 мм^3 в продольном сечении заготовок, подвергнутых РКУП. Поверхность образцов механически шлифовали и электролитически полировали в растворе: 25 г

CrO_3+250 мл H_3PO_4. Растяжение образцов проводили на электромеханической установке Instron 3369 при комнатной температуре со скоростью $3{,}5\cdot10^{-3}$ с$^{-1}$. Микротвердость сталей определяли на приборах ПМТ-3 и Duramin 5 с нагрузкой на индентор 200 г.

Результаты и обсуждение

Исходная структура нормализованной стали 10Г2ФТ до РКУП состояла из смеси феррита и пластинчатого перлита (средний размер зерна феррита 4,2 мкм, расстояние между пластинами цементита 45 нм). После закалки сталь 10Г2ФТ имела структуру мартенсита самоотпуска со средним размером бывшего аустенитного зерна 20 мкм и средней шириной мартенситных пластин 0,15 мкм. Закалка стали 06МБФ и последующий высокотемпературный отпуск (улучшение) привели к формированию полиэдрического феррита с размером зерна 2,4 мкм и пластинчатого феррита с толщиной пластин 0,4 мкм. Во всех исходных состояниях наблюдали систему мелких (<20 нм) и крупных карбидов различного состава, расположенных на границах и в теле зерен (табл. 1). Подробное описание исходной структуры сталей приведено в работах [17, 18].

Независимо от исходного состояния сталей, РКУП привело к формированию СМК (суб) структуры с размером элементов ≈300 нм (рис. 1, табл. 1). После РКУП структура во всех исследуемых сталях представляет собой ферритно-карбидную смесь. Характер распределения рефлексов на микроэлектронограммах говорит о присутствии высокоугловых разориентировок между структурными элементами, а их азимутальные размытия свидетельствуют о малоугловых разориентировках и высоком уровне внутренних напряжений в зернах (рис. 1 *а*, *б*, *в*, вклейки).

При РКУП стали с феррито-перлитной структурой происходит фрагментация и частичная сфероидизация цементита в перлите, но не наблюдается его полного растворения (табл. 1). После деформации на электронно-микроскопических изображениях различима исходно пластинчатая морфология перлита, хотя пластины деформированы (рис. 1, *а*, вклейка). Независимо от исходной структуры стали, в результате РКУП уменьшаются размеры дисперсных частиц, обнаруженных методами просвечивающей электронной микроскопии (табл. 1).

РКУП вызывает снижение интенсивности и значительное уширение рентгеновских линий. Данные о размере областей когерентного рассеяния (ОКР) и величинах микродеформации кристаллической решетки ($\Delta d/d$), микронапряжениях до и после РКУП представлены в табл. 2. Значения $\Delta d/d$ в процессе РКУП исследуемых сталей увеличиваются на порядок от ~10^{-4} до ~10^{-3}, размеры ОКР уменьшаются до 25–50 нм, что свидетельствует о сильной фрагментации микроструктуры и наличии больших внутренних напряжений (170–420 МПа) после РКУП. Значения плотности дислокаций ρ после РКУП, рассчитанные по уширению рентгеновских линий, составляют ~10^{10} см$^{-2}$, эти значения на порядок выше плотности дислокаций в исходных состояниях ~10^{9} см$^{-2}$ (табл. 2). Метод рентгеноструктурного анализа (РСА) дает интегральные характеристики материалов, а метод ПЭМ – локальные, позволяя учитывать различия в значениях ρ между отдельными зернами и фрагментами разной морфологии. Величины плотности дислокаций, рассчитанные по ПЭМ изображениям, также приведены в табл. 2, они в большинстве случаев совпадают с данными, полученными при анализе ширины рентгеновских линий.

Данные микроструктурных исследований находятся в полном соответствии с результатами измерения механических свойств исследуемых сталей. На рис. 2 представлены кривые «напряжение–деформация» для сталей 10Г2ФТ и 06МБФ в исходном состоянии и после РКУП. До РКУП стали с феррито-перлитной и ферритной структурами характеризовались низкими значениями предела текучести $\sigma_{0,2}$=460–480 МПа и значительным удлинением до разрушения 13–18 % (рис. 2 *а*, *в*, кривые 1). Деформация развивалась в три стадии. Первая стадия – пластическая деформация на плато, следующим за зубом текучести и отвечающим нижнему пределу текучести 1 %<ε<3 % – происходила путем зарождения и распространения полос Людерса–Чернова.

Таблица 1. *Влияние равноканального углового прессования на размер (суб) зерна, состав и размер карбидов в исследуемых сталях*

Исходная структура (до РКУП)	Феррито-перлитная	Мартенситная	Ферритная
Размер (суб) зерна, нм			
Исходное состояние	4200±1600 (феррит)	20000 (бывш. аустенит), 150 (пластины)	2400±1200 (глобулы), 390±200 (пластины)
После РКУП	260±90 (феррит)	310±110 (феррит)	325±200 (феррит)
Состав карбидов (их размер, нм)			
Исходное состояние	*M*C* (15–20) M_3C** (45)	*M*C* (5–10) M_3C*** (5), M_3C* (60)	M_3C* (15–20) M_6C, $M_{23}C_6$, M_3C* (90)
После РКУП	*M*C, M_8C_7, M_3C* (<10) M_3C** (20)	$M_{23}C_6$, M_6C* (<5) M_3C* (35)	M_8C_7, M_3C* (<5) M_6C, $M_{23}C_6$, M_3C* (70)

*Примечание: * – сферические частицы; ** – пластины; *** – прослойки.*

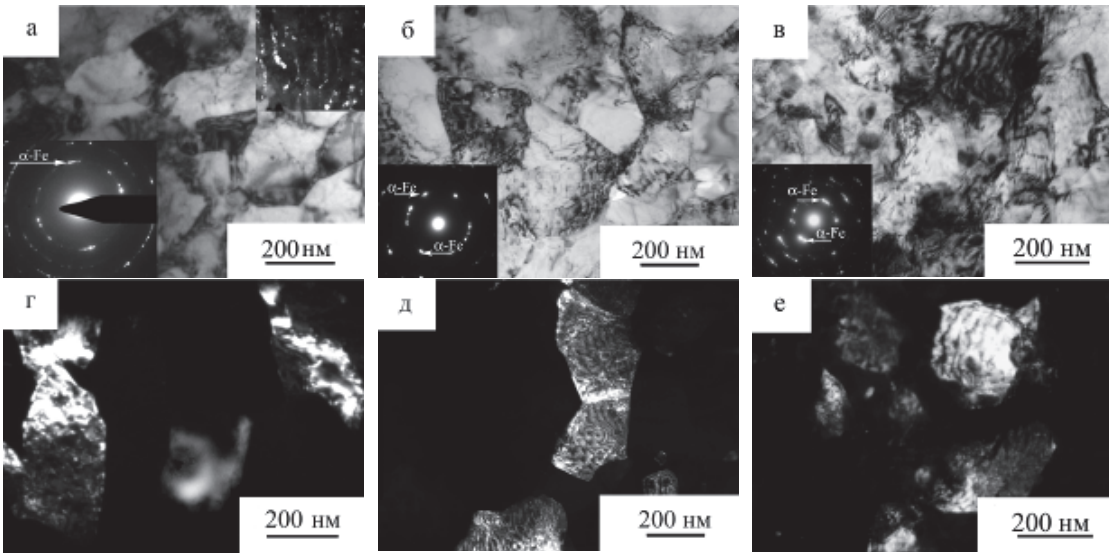


Рис. 1. *Светлопольные (а–в) и темнопольные (г–е) ПЭМ-изображения состояний, сформированных при РКУП сталей с исходно феррито-перлитной (а, г), мартенситной (б, д) и ферритной (в, е) структурами. Темнопольные изображения получены в рефлексах Fe_{α}. Микродифракционные картины сняты с площади 1,4 мкм² (а) и 0,5 мкм² (б, в)*

Появление зуба текучести в исходных образцах стали 10Г2ФТ и 06МБФ связано с тем, что дислокации могут быть заблокированы атомами примесных элементов или карбидами, что и приводит к локализации деформации на первой стадии. Затем следуют стадия с коэффициентом деформационного упрочнения $\theta=\delta/\delta$=1200–1600 МПа и стадия образования шейки.

РКУП приводит к существенному изменению вида кривых «напряжение–деформация» для сталей с исходно феррито-перлитной и ферритной структурами. На кривых исчезает площадка текучести, предел текучести и прочности возрастает ($\sigma_{0,2}$=960–990 МПа, $\sigma_{В}$=1000–1040 МПа), общее удлинение до разрушения значительно уменьшается (рис. 2 а, *в*, кривые 2). В исходном феррито-перлитном состоянии микротвердость стали 10Г2ФТ составляла 1,6 ГПа, после РКУП она возросла до 3,1 ГПа. Для стали 06МБФ РКУП приводит к росту микротвердости от 2,1 до 3,3 ГПа. Высокие прочностные свойства после РКУП могут быть обусловлены упрочнением, связанным с уменьшением среднего размера структурных элементов, дисперсионным твердением, высоким уровнем внутренних напряжений и дислокациями, накопленными в результате РКУП.

Таблица 2. *Влияние РКУП на микродеформацию кристаллической решетки $\langle\varepsilon^2_{khl}\rangle^{1/2}$, значения ОКР и плотность дислокаций ρ в исследуемых сталях*

Исходная структура (до РКУП)	феррито-перлитная	мартенситная	ферритная
$\langle\varepsilon^2_{khl}\rangle^{1/2}$ (микронапряжения II рода, МПа)			
Исходное состояние	$3\cdot10^{-4}$ (65)	$4\cdot10^{-4}$ (85)	$2\cdot10^{-4}$ (45)
После РКУП	$2\cdot10^{-3}$ (420)	$1\cdot10^{-3}$ (210)	$0{,}8\cdot10^{-3}$ (170)
ОКР, нм			
Исходное состояние	100	80	>200
После РКУП	50	25	35
ρ, см$^{-2}$ (РСА/ПЭМ)			
Исходное состояние	$4\cdot10^{9}/6\cdot10^{9}$	$7\cdot10^{9}/1\cdot10^{10}$	$1\cdot10^{9}/<10^{10}$*, $4\cdot10^{10}$**
После РКУП	$5\cdot10^{10}/3\cdot10^{10}$	$8\cdot10^{10}/6\cdot10^{10}$	$3\cdot10^{10}/1\cdot10^{11}$

** в полиэдрическом феррите, ** в пластинчатом феррите.*

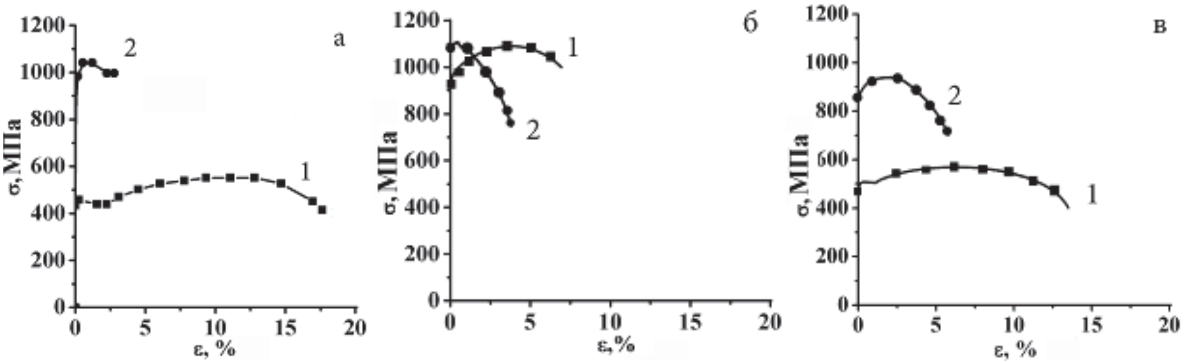


Рис. 2. *Влияние РКУП на кривые течения при одноосном растяжении стали 10Г2ФТ с феррито-перлитной структурой (а), стали 10Г2ФТ с мартенситной структурой (б) и стали 06МБФ с ферритной структурой (в): 1 – исходное состояния; 2 – после РКУП*

Кривая течения стали 10Г2ФТ со структурой мартенсита имеет высокий предел текучести $\sigma_{0,2}$=950 МПа (рис. 2, *б*, кривая 1). Закалка стали привела к формированию более однородного состава по сравнению с феррито-перлитным состоянием, поэтому в стали 10Г2ФТ с исходно мартенситной структурой не наблюдается зуба текучести. РКУП стали в мартенситном состоянии вызывает слабые эффекты упрочнения по сравнению с феррито-перлитным и ферритным состояниями: как до, так и после РКУП микротвердость имеет значения H_μ=3,4–3,7 ГПа, $\sigma_{0,2}$ изменяется от 950 до 1125 МПа (рис. 2, *б*). Несмотря на то, что РКУП не приводит к значительному росту прочностных характеристик стали, закаленной на мартенсит, ее пределы текучести и прочности выше, чем в сталях с феррито-перлитной и ферритной структурами как в исходном, так в деформированном состояниях.

Тот факт, что при близком размере элементов зеренно-субзеренной структуры исследуемые стали характеризуются различным уровнем прочностных характеристик, удается описать на основе анализа основных физических факторов, определяющих характер СМК структуры, формируемый при РКУП. На рис. 3 представлена схема структурных состояний в исследуемых сталях до и после РКУП, основанная на экспериментальных данных о размере элементов структуры и анализе оптических и ПЭМ-изображений.

Сталь 06МБФ в исходном состоянии характеризуется меньшим размером зерна феррита, а также наличием феррита пластинчатой морфологии (унаследовавшей морфологию пакетного мартенсита) в сравнении с феррито-перлитным состоянием в стали 10Г2ФТ, поэтому исходно в ней доля высокоугловых границ зерен больше (рис. 3). Сталь в мартенситном состоянии до РКУП обладает наименьшим размером структурных элементов за счет сформированных после закалки ламелей малой толщины, разделенных между собой малоугловыми и высокоугловыми границами. Равноканальное угловое прессование сталей сопровождается образованием малоугловых и высокоугловых границ зерен в феррите, фрагментацией пластинчатого феррита и ламелей мартенсита (рис. 3). В результате наследования исходной зеренной структуры сталей доля высокоугловых границ зерен после РКУП стали со структурой мартенсита больше в сравнении со сталями, подвергнутыми РКУП после нормализации (феррито-перлитная структура) и после закалки и высокого отпуска (ферритная с карбидами структура).

Анализ состава, размеров и расположения карбидов в структуре исследуемых сталей до и после РКУП показал, что за счет исходной термообработки наиболее однородное распределение как крупных, так и мелких карбидов наблюдается в сталях, которые были подвергнуты закалке и закалке с последующим отпуском. В процессе РКУП за счет больших приложенных давлений происходит измельчение карбидов (табл. 1) и их перераспределение по структуре за счет переноса углерода на дефектах кристаллического строения и выделения новых частиц в процессе деформации. Несмотря на это, объемное распределение дисперсных частиц карбидов более однородное в СМК структурах, полученных из мартенситного и ферритного состояний, в сравнении с СМК структурой, полученной из феррито-перлитного состояния. Это происходит вследствие того, что в стали с исходно феррито-перлитной структурой основная часть углерода находится в перлите.

Экспериментально установленные различия в величинах микродеформации кристаллической

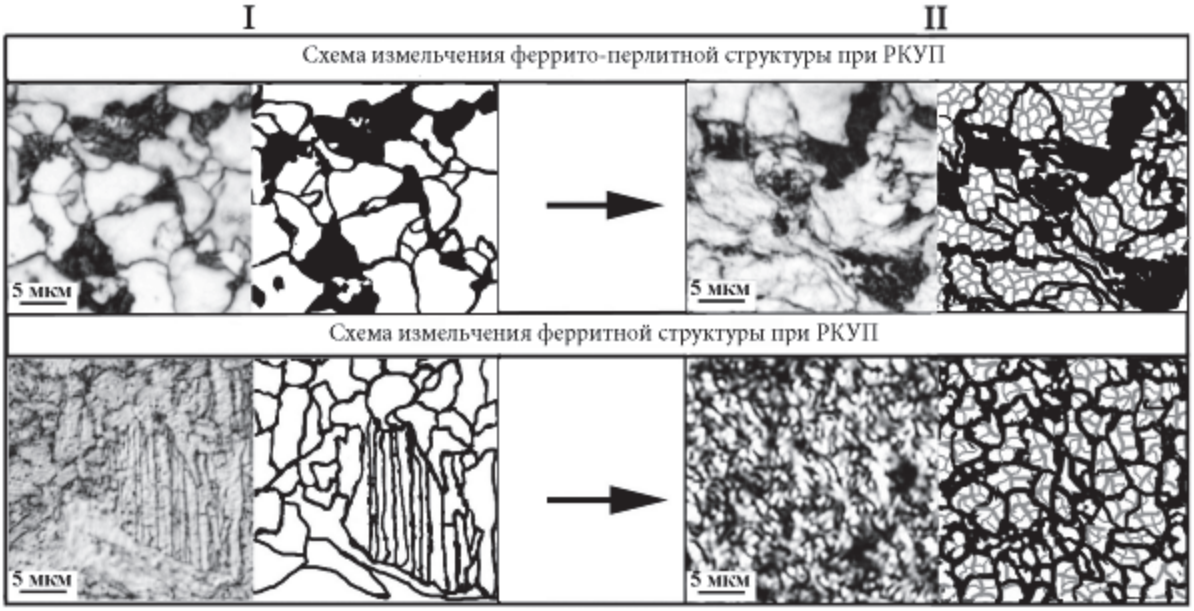


Рис. 3. *Оптические изображения и схемы структурных состояний в исследуемых сталях до и после РКУП: I – исходное состояние; II – после РКУП (высокоугловые границы обозначены черным цветом, малоугловые – серым)*

решетки, плотности дислокаций, микронапряжений II рода (табл. 2) исследуемых сталей после РКУП также свидетельствуют об отличиях в степени неравновесности сформированных СМК состояний. Вышеупомянутые различия в доле высокоугловых границ зерен, объемном распределении и размерах дисперсных частиц, степени неравновесности структуры исследуемых сталей в совокупности определяют отличия в уровне их прочностных свойств после РКУП.

На основе экспериментальных данных о размере структурных элементов, карбидов (и их объемной доли), плотности дислокаций проведена оценка вкладов механизмов упрочнения (зернограничного, субзеренного, дисперсионного и дислокационного) в предел текучести исследуемых сталей в исходном состоянии и после РКУП.

Основным механизмом упрочнения в СМК и НК материалах является субструктурное упрочнение, и оно по данным работы [4] составляет около ~60...70 %. Зернограничное упрочнение описывает взаимосвязь между размером зерна и прочностными характеристиками в соответствии с соотношением Холла–Петча [1, 4, 5, 19, 20]:

$$\sigma_y = \sigma_0 + k_y d^{-1/2}, \quad (1)$$

где σ_y – предел текучести материала; σ_0 – сопротивление деформации в монокристалле или крупнозернистом поликристалле; d – размер зерна; k – коэффициент Холла–Петча. Значения коэффициента Холла–Петча для низкоуглеродистых сталей варьируется в интервале значений $13<k<23$ ГПа·нм$^{1/2}$ [19, 20]. Для расчета зернограничного упрочнения за коэффициент k выбирали среднее значение в указанном выше интервале k=18 ГПа·нм$^{1/2}$.

Использование выражения (1) корректно только для случая истинно зеренной структуры. В нашем случае зеренная структура с высокоугловыми разориентировками формируется в исходном состоянии. В состоянии после РКУП структура стали зеренно-субзеренная, то есть фрагментация исходной структуры после РКУП происходила путем образования высоко- и малоугловых границ. В этом случае необходимо учитывать помимо вклада от границ зерен субструктурное упрочнение от блоков или ячеек [4, 21]:

$$\sigma_б = k_1 D^{-1}, \quad (2)$$

где k_1 – параметр междислокационного взаимодействия (для феррито-перлитной и мартенситной структуры составляет (0,13–0,15)·10^6 МПа·нм [4], D – размеры ячеек, блоков, фрагментов.

В случае исходного ферритного состояния для оценки предела текучести использовали размер зерен полиэдрического феррита, так как на пределе текучести деформация развивается, прежде всего, в них. Для стали 10Г2ФТ с феррито-перлитной структурой корректно использовать размер зерна феррита, так как объемная доля перлита в структуре невелика (20 %). Оценку вклада перлитной составляющей в предел текучести оценивали как $\sigma_П = Q П$, где Q=2,4 [МПа / %]; П – содержание перлитной составляющей в % [21]. В нашем случае этот вклад составляет $\sigma_П$=48 МПа, что согласуется с данными, приведенными в работе [21]. Исследования низкоуглеродистых сталей [22], в которых объемная доля перлита изменяется в интервале 15...23 % для стали 17Г1С-У и 3...5 % для сталей 10Г2ФБ и 12Г2СБ, показали, что перлит в низкоуглеродистых сталях не относится к сильным факторам упрочнения, и в первом приближении его не принимают в расчет. Однако пренебрегать им нерационально, так как он одного порядка с упрочнением от кристаллической решетки (σ_0~30 МПа), а ее вклад обычно учитывают.

При оценке зернограничного вклада в исходно мартенситном состоянии за величину зерна можно принять как ширину реек мартенсита и мартенситного пакета [23], так и размер бывшего зерна аустенита. Установлена зависимость прочностных характеристик, подобная соотношению Холла–Петча, не от размера аустенитного зерна, а от величины мартенситного пакета и ширины реек, которые многими исследователями считаются основными структурными единицами закаленной стали. В работе [21] было показано, что на предел текучести мартенситной стали влияет длина реек, а не величина пакета, поскольку длина плоскости скольжения M дислокаций зависит от отношения ширины рейки $\Delta_р$ к ее длине или к эффективному диаметру пакета $d_п$. Тогда размер зерна стали со структурой мартенсита определяется как величина среднего размера плоскостей скольжения в рейке $\bar{M}$ (в предположении изотропного распределения ориентировок плоскостей скольжения относительно ориентировок реек) [21]. В исходно мартенситном состоянии (сталь 10Г2ФТ) величина $\bar{M}$ составляет 558 нм.

Следует также учитывать вклад от внесенных дислокаций в структуре, который определяется известным соотношением [21]:

$$\sigma_\rho = \alpha M G b \rho^{1/2}, \quad (3)$$

где b – вектор Бюргерса; G – модуль упругости; ρ – плотность дислокаций; M=2,75 [2]; α=0,1–0,3 – константа, зависящая от характера распределения дислокаций. Экспериментальные значения плотности дислокаций, полученные в настоящей работе (табл. 2), соответствуют вкладу σ_ρ=200–300 МПа.

Вклад от твердорастворного упрочнения $\sigma_{тв}$ в предел текучести определяется в предположении аддитивности вкладов в упрочнение от отдельных легирующих элементов. Согласно данным рентгеноструктурного анализа, параметр решетки во всех исследуемых сталях близок к значению для α-Fe. Атомы легирующих элементов находятся, в основном, в карбидах, следовательно, вклад от твердорастворного упрочнения пренебрежимо мал.

Экспериментально методами ПЭМ в структуре сталей как до, так и после РКУП обнаружены частицы различной дисперсности (табл. 1). Прини-

мая, что все частицы некогерентные, вклад от дисперсионного упрочнения в исследуемых сталях можно оценить с помощью уравнения Орована [4, 21] или модифицированного для α-Fe уравнения Орована [21]:

$$\sigma_{\text{дт}} = 13 \cdot 10^3 \frac{f^{1/2}}{D_{\text{ср}}} \ln\left(1,5 \frac{D_{\text{ср}}}{f^{1/2}}\right), \qquad (4)$$

где f – объемная доля частиц; $D_{\text{ср}}$ – средний диаметр частиц.

Электронно-микроскопические исследования показали, что в структуре присутствуют карбиды, которые условно можно разделить на мелкодисперсные (менее 20 нм) и крупные (60–90 нм) (табл. 1). В феррито-перлитной структуре после РКУП частицы измельчаются до размера <10–20 нм и обусловливают упрочнение около 150 МПа, в мартенситной и ферритной – карбиды с размером <5 нм дают вклад в упрочнение ≈200 МПа. Более крупные карбиды 50–70 нм обуславливают слабое упрочнение 20–30 МПа.

Проанализировав механизмы упрочнения, можно оценить их общий вклад в предел текучести исследуемых сталей, в общем случае используя принцип аддитивности напряжений:

$$\sigma_{\text{т}} = \sigma_{\text{у}}(\sigma_{\text{б}}) + \sigma_{\text{тв}} + \sigma_{\text{П}} + \sigma_{\rho} + \sigma_{\text{дт}} \qquad (5)$$

или аддитивности квадратов напряжений [21]:

$$\sigma_{\text{т}} = (\sigma_0^2 + \sigma_{\text{тв}}^2 + \sigma_{\text{П}}^2)^{1/2} + (\sigma_{\text{дт}}^2 + \sigma_{\rho}^2)^{1/2} + k_{\text{у}} d^{-1/2} \qquad (6)$$

(для зернограничного упрочнения),

$$\sigma_{\text{т}} = (\sigma_0^2 + \sigma_{\text{тв}}^2 + \sigma_{\text{П}}^2)^{1/2} + (\sigma_{\text{дт}}^2 + \sigma_{\rho}^2)^{1/2} + k_1 d^{-1} \qquad (7)$$

(для субзеренного упрочнения). Применительно к данной работе компоненты σ_0, $\sigma_{\text{П}}$, $\sigma_{\text{тв}}$ и $\sigma_{\text{дт}}$ и σ_{ρ} отнесены к компонентам «разной силы». Согласно теории Кокса [21] препятствия в материалах расположены неравномерно и различаются по величине воздействия на движущиеся дислокации. В соответствии с этим все препятствия можно разделить на «сильные» и «слабые». Уравнение (5) будет описывать случай, когда в структуре большое число слабых и небольшое число сильных препятствий, и критическое напряжение определяется преодолением дислокациями сильных и слабых препятствий одновременно. В предположении, что сильные и слабые препятствия преодолеваются постепенно, эффект от совместного действия нескольких независимых механизмов определяется с учетом соотношений (6) и (7).

В табл. 3 приведены оценки вкладов от разных механизмов упрочнения и их суммарный вклад в прочностные свойства (предел текучести) исследуемых сталей при РКУП с учетом соотношений (1)–(7). Сопоставление рассчитанных и экспериментально полученных данных (табл. 3) показывает, что во всех исследуемых сталях после РКУП упрочнение описывается лучше с учетом соотношения (2). Это подтверждает экспериментальные данные о том, что РКУП приводит к формированию развитой зеренно-субзеренной структуры в исследуемых сталях.

На основе проведенного анализа механизмов упрочнения можно сделать вывод, что упрочнение низкоуглеродистых сталей с исходно феррито-перлитной, мартенситной и ферритной структурами при РКУП определяется в основном зернограничным упрочнением, упрочнением от дислокаций и дисперсионным твердением. Вклад зернограничного упрочнения является основным и составляет около 50...60 % для исследуемых сталей (табл. 3). Упрочнение от внесенных дислокаций составляет 25...30 %, и оно максимально после РКУП стали 10Г2ФТ с исходно мартенситной структурой. Эти данные согласуются с микроструктурными исследованиями и изучением прочностных характеристик исследуемых сталей. Упрочнение от карбидов (дисперсионное твердение) играет важную роль в повышении прочностных свойств сталей и составляет 15...20 % от суммарного упрочнения.

Полученные данные подтверждают, что ИПД легированных сталей сочетает в себе несколько типов упрочнения: от малого размера (суб) зерна и большой доли границ зерен, от дислокаций и дисперсионного твердения. В работах [24–26] исследовали влияние РКУП на структуру и механические свойства армко-железа и чистого α-Fe. Сформированные структуры обладали высокими прочностными свойствами после РКУП, однако меньшими в сравнении со сталями 10Г2ФТ и 06МБФ: в работе [25] (РКУП по режиму B_C, 8 проходов при T=20 °С, Ф=90°) получена СМК структура в α-Fe со средним размером зерна 200–400 нм и микротвердостью H_{μ}=2,3 ГПа, пределом текучести 700 МПа; в армко-железе была сформирована структура с пределом текучести ≈900 МПа [24]. Прочностные свойства после РКУП армко-железа и α-Fe обусловлены преимущественно зернограничным упрочнением, так как содержание легирующих элементов в них мало. Стали 10Г2ФТ и 06МБФ при близком размере структурных элементов после РКУП обладают более высокими прочностными свойствами (H_{μ}=2,9–3,7 ГПа, предел текучести 960–1125 МПа), в сравнении с армко-железом и α-Fe, так как содержат легирующие элементы и карбиды.

Сравнение расчетных и экспериментальных значений предела текучести сталей (табл. 3) показало, что они хорошо согласуются друг с другом. Однако приведенные в табл. 3 расчетные данные являются только оценочными по нескольким причинам. *Во-первых*, вклад от субструктурного упрочнения может быть завышен или занижен вследствие того, что соотношения (1) и (2) корректны в предположении, что в структуре все границы являются либо высокоугловыми, либо малоугловыми. После РКУП структура в сталях 10Г2ФТ и 06МБФ является зеренно-субзеренной и вклад от высокоугловых и малоугловых границ зерен должен учитываться комплексно. Вторая причина обусловлена погрешностями при определении размеров и объемной доли карбидов методами ПЭМ. Ошибка при определении объемной доли частиц составляет 20 % при условии, что внесены поправ-

ки на перекрытие и усечение частиц, разрешающую способность прибора (для нанометрических карбидов) [14]. При определении размера частиц по электронно-микроскопическим изображениям ошибка меньше (~5 %) [14], но, объективно, расчет вклада от частиц в упрочнение оказывается также оценочным. Кроме того, существует неоднозначность в определении плотности дислокаций, которая варьируется в зависимости от метода исследования (РСА или ПЭМ), что вносит погрешность в измеряемую величину плотности дислокаций и, как следствие, в расчет предела текучести.

Таблица 3. *Оценка вкладов от механизмов упрочнения в предел текучести для исследуемых сталей до и после РКУП (исходное состояние/после РКУП, МПа)*

Компоненты упрочнения	Феррито-перлитное состояние	Мартенситное состояние	Ферритное состояние
Напряжение трения решетки σ_0	30/30	30/30	30/30
Зернограничное упрочнение $k_y d^{-1/2}$	280/1120	760/1020	320/1000
Упрочнение от блоков $\sigma_б$, соотношение (2)	–/600	–/480	–/430
Упрочнение от дислокаций σ_ρ, соотношение (3)	70/240	100/310	40/200
Дисперсионное упрочнение $\sigma_{дт}$*, соотношение (4)	100/150	180/200	70/190
Расчетные значения $\sigma_т$: • с учетом σ_γ, соотношение (5) • с учетом σ_γ, соотношение (6) • с учетом $\sigma_б$, соотношение (5) • с учетом $\sigma_б$, соотношение (7)	 **480**/1540 400/1430 –/**1020** –/890	 1070/1560 **1000**/1420 –/**1020** –/880	 **460**/1420 430/1300 –/**850** –/740
Экспериментальные значения $\sigma_{0,2}$	**460/990**	**950/1125**	**480/960**

** с учетом вклада от перлита для случая нормализованной стали 10Г2ФТ.*

Следует отметить, что приведенные расчеты необходимы не столько для количественной оценки предела текучести, сколько для выявления вклада каждого механизма упрочнения в общее упрочнение стали. Обобщение полученных результатов показывает, что наиболее весомый вклад в повышение предела текучести при РКУП исследуемых сталей имеет измельчение зерна, вклад от дислокаций и мелкоразмерной карбидной фазы.

Выводы

1. В низкоуглеродистых сталях 10Г2ФТ и 06МБФ, имеющих различную исходную структуру (феррито-перлитную, мартенситную, ферритную), методом равноканального углового прессования сформированы субмикрокристаллические состояния со средним размером элементов зеренно-субзеренной структуры ≈300 нм (феррит) и карбидами. Наряду с измельчением исходной зеренной структуры РКУП вызывает уменьшение размеров дисперсных частиц в структуре исследуемых сталей.
2. При близком размере элементов структуры после РКУП сталь, полученная из закаленного (мартенситного) состояния, обладает большими значениями предела текучести ($\sigma_{0,2}$=1125 МПа) в сравнении со сталями, полученными из феррито-перлитного ($\sigma_{0,2}$=990 МПа) и ферритного ($\sigma_{0,2}$=960 МПа) состояний.
3. Влияние исходной микроструктуры (феррит, мартенсит, феррито-перлит) на структурно-фазовое состояние и механические свойства субмикрокристаллических сталей заключается в наследовании исходной зеренной структуры и объемного распределения дисперсных частиц карбидов в процессе равноканального углового прессования.
4. Основной вклад в повышение прочностных свойств сталей 10Г2ФТ и 06МБФ при равноканальном угловом прессовании вносит измельчение зерна (50...60 % от общего упрочнения) и внесенные дислокации (25...30 % от общего упрочнения). Дисперсионное твердение также играет важную роль в повышении прочностных свойств при равноканальном угловом прессовании (15...20 % от общего упрочнения).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН на 2013–2016 гг. (III.23.2.2.). Исследования выполнены с использованием оборудования Томского материаловедческого центра коллективного пользования Томского государственного университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валиев Р.З., Александров И.В. Объемные наноструктурные металлические материалы. – М.: ИКЦ Академкнига, 2007. – 397 с.
2. Носкова Н.И., Мулюков Р.Р. Субмикрокристаллические и нанокристаллические металлы и сплавы. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 279 с.
3. Nanomaterials by severe plastic deformation, NanoSPD5 / ed. by J.T. Wang, R.B. Figueiredo, T. Langdon. – Switzerland: Trans Tech Publications Ltd, 2011. – 1224 p.
4. Weng Y. Ultra-fine grained steels. – Berlin: Metallurgical Industry Press, Beijing and Springer-Verlag GmbH, 2009. – 588 p.
5. Козлов Э.В., Конева Н.А., Попова Н.А. Зеренная структура, геометрически необходимые дислокации и частицы фаз в поликристаллах микро- и мезоуровня // Физическая мезомеханика. – 2009. – Т. 12. – № 4. – С. 93–106.
6. Dobatkin S.V., Odessky P.D., Shagalina S.V. Ultrafine grained low carbon steels processed by severe plastic deformation // Materials Science Forum. – 2008. – V. 584–586. – P. 623–630.
7. Структурные превращения высокомарганцовистых аустенитных сталей при деформировании сдвигом под давлением / В.А. Теплов, Л.Г. Коршунов, В.А. Шабашов, Р.И. Кузнецов, В.П. Пилюгин, Д.И. Тупица // Физика металлов и металловедение. – 1988. – Т. 66. – № 3. – С. 563–571.
8. Влияние исходного состояния низкоуглеродистых сталей на формирование наноразмерной структуры при пластической деформации кручением с большими степенями и давлением / С.В. Добаткин, С.В. Шагалина, О.И. Слепцов, Н.А. Красильников // Металлы. – 2006. – № 5. – С. 95–104.
9. Shin D.H., Park K.-T. Ultrafine grained steels processed by equal channel angular pressing // Materials Science and Engineering A. – 2005. – V. 410–411. – P. 299–302.
10. О природе низкотемпературной хрупкости сталей с ОЦК-структурой / В.Е. Панин, Л.С. Деревягина, Н.М. Лемешев, А.В. Корзников, А.В. Панин, М.С. Казаченок // Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16. – № 6. – С. 5–12.
11. Microstructure and properties of a low carbon steel after equal channel angular pressing / J. Wang, C. Xu, Y. Wang, Z. Du, Z. Zhang, L. Wang, X. Zhao, T.G. Langdon // Nanomaterials by severe plastic deformation / Eds. M.J. Zehetbauer, R.Z. Valiev. – Vienna, Austria: Wiley-VCH, 2002. – P. 829–834.
12. Processing of a low carbon steel by equal channel angular pressing / Y. Fukuda, K. Ohishi, Z. Horita, T. Langdon // Acta Materialia. – 2002. – V. 50. – P. 1359–1368.
13. Установление соответствия между степенью деформации, твердостью и размерами элементов структуры железа и конструкционных сталей при большой пластической деформации различными способами / М.В. Дегтярев, Т.И. Чащухина, Л.М. Воронова, В.И. Копылов // Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16. – № 6. – С. 71–80.
14. Утевский Л.М. Дифракционная электронная микроскопия в металловедении. – М: Металлургия, 1973. – 584 с.
15. Салтыков С.А. Стереометрическая металлография. – М.: Металлургия, 1970. – 376 с.
16. Williamson G.K., Smallman R.E. Dislocation densities in some annealed and cold-worked metals from measurements on the X-ray Debye-Scherrer spectrum // Philosophical Magazine. – 1956. – № 1. – P. 34–46.
17. Особенности микроструктуры и механическое поведение стали 06МБФ после равноканального углового прессования / Е.Г. Астафурова, Г.Г. Захарова, Е.В. Найденкин, Г.И. Рааб, П.Д. Одесский, С.В. Добаткин // Письма о материалах. – 2011. – Т. 1. – С. 198–202.
18. Влияние равноканального углового прессования на структуру и механические свойства низкоуглеродистой стали 10Г2ФТ / Е.Г. Астафурова, Г.Г. Захарова, Е.В. Найденкин, С.В. Добаткин, Г.И. Рааб // Физика металлов и металловедение. – 2010. – Т. 110. – № 3. – С. 275–284.
19. Ramesh K.T. Nanomaterials. Mechanics and Mechanisms. – Berlin: Springer, 2009. – 353 p.
20. Мильман Ю.В., Гончарова И.В. Перспективные материалы. Наноматериалы технического и медицинского назначения. Т. III // под ред. Д.Л. Мерсона. – М.: МИСиС, 2009. – 495 с.
21. Гольдштейн М.И., Фарбер В.М. Дисперсионное упрочнение стали. – М.: Металлургия, 1979. – 208 с.
22. Счастливцев В.М., Яковлева И.Л., Терещенко Н.А. и др. Особенности химического состава и структура низкоуглеродистых низколегированных трубных сталей после контролируемой прокатки // МиТОМ. – 2008. – № 5. – С. 3–8.
23. Курдюмов Г.В., Утевский Л.М., Энтин Р.И. Превращения в железе и стали. – М.: Наука, 1977. – 236 с.
24. Структурная чувствительность механических свойств армко-железа, подвергнутого равноканальному угловому прессованию / С.А. Фирстов, Ю.Н. Подрезов, В.И. Копылов, Н.И. Даниленко // Металлы. – 2004. – № 1. – С. 96–103.
25. Han B.Q., Lavernia E.J., Mohamed F.A. Mechanical properties of iron processed by severe plastic deformation // Metallurgical and Materials Trans. A. – 2003. – V. 34. – P. 71–83.
26. Сон А.А. Влияние субмикрокристаллического состояния на масштабные уровни локализации деформации армко-железа, малоуглеродистой и сложнолегированной стали: дис. ...канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2005. – 166 с.

Поступила 16.01.2014 г.

UDC 669.14:539.4

THE INFLUENCE OF INITIAL STATE OF LOW-CARBON STEELS ON STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES UNDER EQUAL-CHANNEL ANGULAR PRESSING

Elena G. Astafurova,
Dr. Sc., Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, 634021, Tomsk, pr. Akademicheskii, 2/4.
E-mail: elena.g.astafurova@gmail.com

Galina G. Maier,
Cand. Sc., Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, 634021, Tomsk, pr. Akademicheskii, 2/4.
E-mail: galinazg@yandex.ru

Evgeny V. Naydenkin,
Cand. Sc., Institute of Strength Physics and Materials Science, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, 634021, Tomsk, pr. Akademicheskii, 2/4.
E-mail: nev@ispms.tsc.ru

Georgy I. Raab,
Dr. Sc., Research Institute of Physics of Advanced Materials of Ufa State Aviation Technical University, Russia, Republic of Bashkortostan, 450025, Ufa, Karl Marks street, 12. E-mail: giraab@mail.ru

Pavel D. Odessky,
Dr. Sc., Institute of Building Structures, Russia, 109428, Moscow, 2d Industrialnaya street, 6. E-mail: odesskiy@tsniisk.ru

Sergey V. Dobatkin,
Dr. Sc., Institute of Metallurgy and Materials Science after A.A. Baykov, Russian Academy of Sciences, Russia, 119991, Moscow, Leninsky prospekt, 49.
E-mail: dobatkin@imet.ac.ru

A microstructure and a phase composition of low-carbon steels Fe-Mn-V-Ti-C and Fe-Mo-Nb-V-C subjected to severe plastic deformation by equal-channel angular pressing from various initial states (after normalization, quenching, quenching and the subsequent tempering) were studied using the methods of optical metallography, transmission electron microscopy and X-ray diffraction analysis. The ultrafine-grained structures with the average size of structural elements about 300 nm (ferrite) stabilized by disperse particles were formed under equal-channel angular pressing independently on the initial structural and phase states of steels. The investigated states with the close size of structural elements after equal-channel angular pressing are characterized by various levels of strength properties: the structure formed from initial quenched state possesses the greatest values of 0,2 pct offset yield strength and microhardness ($\sigma_{0,2}$=1125 MPa, H_μ=3,7 GPa) in comparison with two other states ($\sigma_{0,2}$=960–990 MPa, H_μ =3,1–3,3 GPa). The authors have analyzed the major physical factors defining a character of ultrafine-grained structure of low-carbon steels after severe plastic deformation and have estimated the contribution of the main hardening mechanisms into steel yield strength.

Key words:
Low-carbon steel, equal-channel angular pressing, ferrite, pearlite, martensite, particle strengthening, ultrafine-grained structure, «stress-strain» curves, microhardness.

REFERENCES

1. Valiev R.Z., Aleksandrov I.V. *Obemnye nanostrukturnye metallicheskie materialy* [Bulk nanostructured metallic materials]. Moscow, IKC Akademkniga, 2007. 397 p.
2. Noskova N.I., Mulyukov R.R. *Submikrokristallicheskie i nanokristallicheskie metally i splavy* [Ultrafine grained metals and alloys]. Ekaterinburg, UrO RAN, 2003. 279 p.
3. *Nanomaterials by severe plastic deformation, NanoSPD5*. Ed. by J.T. Wang, R.B. Figueiredo, T. Langdon. Switzerland, Trans Tech Publications Ltd, 2011. 1224 p.
4. Weng Y. *Ultra-fine grained steels*. Berlin, Metallurgical Industry Press, Beijing and Springer-Verlag GmbH, 200. 588 p.
5. Kozlov E.V., Koneva N.A., Popova N.A. Zerennaya struktura, geometricheski neobkhodimye dislokatsii i chastitsy faz v polikristallakh mikro- i mezourovnya [The grain structure, geometrically necessary dislocations and particles of phases in polycrystals of micro- and mesolevel]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 93–106.
6. Dobatkin S.V., Odessky P.D., Shagalina S.V. Ultrafine grained low carbon steels processed by severe plastic deformation. *Materials Science Forum*, 2008, vol. 584–586, pp. 623–630.
7. Teplov V.A., Korshunov L.G., Shabashov V.A., Kuznetsov R.I., Pilyugin V.P., Tupitsa D.I. Strukturnye prevrashcheniya vysokomargantsovistykh austenitnykh staley pri deformirovanii sdvi-

gom pod davleniem [Structural transformations of high-manganese austenitic steels at deformation by high-pressure torsion]. *Fizika metallov i metallovedenie*, 1988, vol. 66, no. 3, pp. 563–571.
8. Dobatkin S.V., Shagalina S.V., Sleptsov O.I., Krasilnikov N.A. Vliyanie iskhodnogo sostoyaniya nizkouglerodistykh staley na formirovanie nanorazmernoy struktury pri plasticheskoy deformatsii krucheniem s bolshimi stepenyami i davleniem [The influence of initial state of low-carbon steel on nanodimensional structure formation at plastic deformation by torsion with high strain and pressure]. *Metally*, 2006, no. 5, pp. 95–104.
9. Shin D.H., Park K.-T. Ultrafine grained steels processed by equal channel angular pressing. *Materials Science and Engineering A*, 2005, vol. 410–411, pp. 299–302.
10. Panin V.E., Derevyagina L.S., Lemeshev N.M., Korznikov A.V., Panin A.V., Kazachenok M.S. O prirode nizkotemperaturnoy khrupkosti staley s OTSK-strukturoy [On the nature of low-temperature brittleness of steels possesses BCC-structure]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 6, pp. 5–12.
11. Wang J., Xu C., Wang Y., Du Z., Zhang Z., Wang L., Zhao X., Langdon T.G. Microstructure and properties of a low carbon steel after equal channel angular pressing. *Nanomaterials by severe plastic deformation*. Eds. M.J. Zehetbauer, R.Z. Valiev. Vienna, Austria, Wiley-VCH, 2002. pp. 829–834.
12. Fukuda Y., Ohishi K., Horita Z., Langdon T. Processing of a low carbon steel by equal channel angular pressing. *Acta Materialia,* 2002, vol. 50, pp. 1359–1368.
13. Degtyarev M.V., Chashchuhina T.I., Voronova L.M., Kopylov V.I. Ustanovlenie sootvetstviya mezhdu stepenyu deformatsii, tverdostyu i razmerami elementov struktury zheleza i konstruktsionnykh staley pri bolshchoy plasticheskoy deformatsii razlichnymi sposobami [The correlation between the strain, hardness and size of the structural elements of iron and structural steels under a large plastic deformation in different ways]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 6, pp. 71–80.
14. Utevskiy L.M. *Difraktsionnaya elektronnaya mikroskopiya v metallovedenii* [Diffraction electronic microscopy in material science]. Moscow, Metallurgiya, 1973. 584 p.
15. Saltykov S.A. *Stereometricheskaya metallografiya* [Stereometric metallography]. Moscow, Metallurgiya, 1970. 376 p.
16. Williamson G.K., Smallman R.E. Dislocation densities in some annealed and cold-worked metals from measurements on the X-ray Debye-Scherrer spectrum. *Philosophical Magazine*, 1956, no.1, pp. 34–46.
17. Astafurova E.G., Zakharova G.G., Naydenkin E.V., Raab G.I., Odesskiy P.D., Dobatkin S.V. Osobennosti mikrostruktury i mekhanicheskoe povedenie stali 06MBF posle ravnokanalnogo uglovogo pressovaniya [The features of a microstructure and mechanical behavior of steel 06MBF after equal-channel angular pressing]. *Pisma o materialakh*, 2011, vol. 1, pp. 198–202.
18. Astafurova E.G., Zakharova G.G., Naydenkin E.V., Dobatkin S.V., Raab G.I. Vliyanie ravnokanalnogo uglovogo pressovaniya na strukturu i mekhanicheskie svoystva nizkouglerodistoy stali 10G2FT [The influence of equal-channel angular pressing on structure and mechanical properties of low-carbon steel 10G2FT]. *Fizika metallov i metallovedenie*, 2010, vol. 110, no. 3, pp. 275–284.
19. Ramesh K.T. *Nanomaterials. Mechanics and Mechanisms*. Berlin, Springer, 2009. pp. 353.
20. Milman Yu.V., Goncharova I.V. *Perspektivnye materialy. Nanomaterialy tekhnicheskogo i meditsinskogo naznacheniya* [Perspective materials. Nanomaterials of technical and medical appointment]. Moscow, MISIS publ., vol. 3, 495 p.
21. Goldshtein M.I., Farber V.M. *Dispersionnoe uprochnenie stali* [Particle hardening of steel]. Moscow, Metallurgiya, 1979. 208 p.
22. Schastlivtsev V.M., Yakovleva I.L., Tereshchenko N.A. Osobennosti khimicheskogo sostava i struktura nizkouglerodistykh nizkolegirovannykh trubnykh staley posle kontroliruemoy prokatki [Features of a chemical composition and structure of low-carbon low-alloyed pipe steel after controlled rolling]. *MiTOM*, 2008, no. 5, pp. 3–8.
23. Kurdyumov G.V., Utevskiy L.M., Entin R.I. *Prevrashcheniya v zheleze i stali* [Transformations in iron and steel]. Moscow, Nauka, 1977. 236 p.
24. Firstov C.A., Podrezov Yu.N., Kopylov V.I., Danilenko N.I. Strukturnaya chuvstvitelnost mekhanicheskikh svoystv armkozheleza, podvergnutogo ravnokanalnomu uglovomu pressovaniyu [Structural sensitivity of mechanical properties of armko-iron subjected to equal-channel angular pressing]. *Metally*, 2004, no. 1, pp. 96–103.
25. Bing Q. Han, Enrique J. Lavernia, Farghalli A. Mohamed. Mechanical properties of iron processed by severe plastic deformation. *Metallurgical and Materials Transaction A,* 2003, vol. 34, pp. 71–83.
26. Son A.A. *Vliyanie submikrokristallicheskogo sostoyaniya na masshtabnye urovni lokalizatsii deformatsii armko-zheleza, malouglerodistoy i slozhnolegirovannoy stali*. Diss. kand. nauk [Influence of submicrocrystalline state on scale levels of localization of deformation of armko-iron, low-carbon and high-alloyed steel. Cand. Diss.]. Tomsk, 2005. 166 p.

УДК 669–179: 539.4.016

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ АЗОТИРОВАННЫХ СЛОЕВ В ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРОВАННОЙ СТАЛИ 40Х, ОБРАБОТАННОЙ ИНТЕНСИВНЫМИ ПОТОКАМИ ИОНОВ АЗОТА

Ковалевская Жанна Геннадьевна,
канд. техн. наук, доцент кафедры материаловедения и технологии металлов Института физики высоких технологий ТПУ, ведущий инженер Института физики прочности и материаловедения СО РАН, Россия, 634021, г. Томск, пр. Академический, 2/4. E-mail: kovalevskaya@ispms.tsc.ru

Кукареко Владимир Аркадьевич,
д-р физ.-мат. наук, доцент, начальник центра структурных исследований и трибо-механических испытаний материалов и изделий машиностроения ГНУ «Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси», Республика Беларусь, 220072, г. Минск, ул. Академическая, 12. E-mail: v_kukareko@mail.ru

С помощью комбинированной ультразвуковой финишной обработки и высокоинтенсивной низкоэнергетической имплантации ионами азота получены упрочненные слои на поверхности стали 40Х. Используя методы оптической металлографии, рентгеноструктурного анализа и дюрометрии, исследованы особенности строения и свойств поверхностных слоев, полученных данным способом. Показано, что при имплантации на поверхности стали формируется азотированный слой, представляющий зону внутреннего азотирования, фазовый состав которой определяется температурой имплантации и способом предварительной подготовки поверхности. Увеличение температуры азотирования приводит к возрастанию доли нитридных фаз в поверхностном слое стали. Ультразвуковая финишная обработка интенсифицирует процесс имплантации ионов азота, увеличивая глубину упрочненного слоя за счет образования в структуре большого количества дефектов кристаллического строения и повышая микротвердость за счет увеличения доли нитридных фаз.

Ключевые слова:
Ультразвуковая финишная обработка, имплантации ионами азота, структура, фазовый анализ, упрочнение.

Введение

При азотировании стали легированный слой образуется за счет диффузионного проникновения атомов азота в объем основного материала и формирования нитридных фаз, изменяющих свойства на поверхности детали. Скорость диффузионного переноса атомов определяется градиентом химического потенциала и диффузионной подвижностью насыщающего элемента в металле. Поэтому в основе процесса насыщения поверхности детали лежат технологические характеристики насыщающей среды и особенности процесса диффузии насыщающего элемента в металл [1]. Известно, что диффузия в твердых телах является структурно-чувствительным процессом, так как границы зерен и субзерен, дислокации и вакансии, то есть дефекты кристаллического строения, оказывают заметное влияние на скорость переноса примесных атомов вглубь металла [2]. Одним из способов влияния на диффузионные процессы в металлических материалах является их холодная пластическая деформация, приводящая к эволюции дислокационных структур и увеличению плотности вакансий.

К настоящему времени опубликовано много работ о влиянии предварительной пластической деформации на процесс формирования диффузионных слоев в металлических сплавах. При этом существуют разные мнения по указанному вопросу. В частности, согласно одной точке зрения предварительная пластическая деформация затрудняет диффузию атомов внедрения [3]. В основе этой модели лежит теория о том, что атомы внедрения весьма активно взаимодействуют с дислокациями. Дислокации выступают в качестве «ловушек», адсорбирующих атомы растворенных элементов [4]. В то же время большое количество научных работ, опубликованных в последнее время [5–7], свидетельствует о том, что предварительная пластическая деформация и образующиеся при этом дефекты структуры способствуют более активной диффузии внедряемого вещества. Указанные сведения получены при использовании современных методов насыщения поверхности азотом, основанных на применении интенсивных потоков ионов, осаждаемых на упрочняемую деталь из плазмы, либо полученных методами ионно-лучевой имплантации [8, 9].

В результате использования ионно-лучевых технологий, за счет протекания процессов радиационно-стимулированной диффузии легирующей примеси, интенсивность насыщения поверхностных слоев материалов азотом существенно возрастает, что позволяет формировать азотированные слои значительной глубины при относительно низких температурах ионной обработки вплоть до 300...350 °С [10]. Снижение температуры обработки открывает новые

возможности азотирования материалов с термически неустойчивой структурой, в том числе, формируемой при предварительной интенсивной пластической деформации [10, 11].

В связи с этим в задачу исследования входило изучение особенностей структурно-фазового состояния азотированных слоев типичной конструкционной стали, подвергнутой комбинированной обработке, включающей поверхностную пластическую деформацию стали с помощью ультразвуковой финишной обработки и азотирование методом высокоинтенсивной низкоэнергетической имплантации ионов азота.

Методика эксперимента

Для азотирования была выбрана конструкционная сталь 40Х после нормализации (нагрев до 850 °С и охлаждение на воздухе). Образцы имели форму цилиндров высотой 6 мм и диаметром 10 мм. Торцевая поверхность образцов шлифовалась. Часть образцов подвергалась поверхностной пластической деформации с помощью ультразвуковой финишной обработки (УФО) по методике, описанной в [12]. При пластической деформации с одновременным ультразвуковым воздействием на металл обнаруживаются характерные особенности формирования дефектов структуры, связанные с поглощением дислокациями в процессе УФО энергии ультразвуковых волн. Данное явление повышает подвижность дислокаций и обеспечивает их неконсервативное движение, что приводит к образованию избыточной концентрации «деформационных» вакансий, которые способны сохраняться длительное время и участвовать в диффузионных процессах [13]. Подвергнутые УФО образцы обрабатывались интенсивными потоками низкоэнергетических ионов азота. В работе использовалась разработанная в Физико-техническом институте НАН Беларуси ионно-лучевая установка [14]. Имплантация проводилась ионами азота с энергией 3 кэВ и плотностью ионного тока 2 мА/см^2 в течение 2 часов. Суммарная доза ионов азота, падающих на поверхность, составляла $3 \cdot 10^{19}$ см$^{-2}$. Образцы имплантировались при температуре 350, 400, 450, 500 °С.

Рентгеноструктурные исследования поверхностных слоев проводились на дифрактометре ДРОН-2,0 в монохроматизированном CoK_{α}-излучении. Глубина проникновения рентгеновского излучения составляла около 20 мкм. Получаемые данные рентгеноструктурного анализа давали интегральную оценку фазового состава слоя той же глубины. Дюрометрический анализ проводился на приборе «Nano Hardness Tester». При нагрузке 30 г измерялась кинетическая твердость упрочненных слоев, как на поверхности, так и в поперечном сечении с одновременным проведением металлографического анализа. Глубина азотированного слоя оценивалась по методике, изложенной в работе [15]. За глубину азотирования принимался слой, на границе которого значение твердости на 500 единиц выше твердости исходного материала.

Результаты эксперимента

В исходном состоянии после нормализации в стали 40Х формируется феррито-перлитная структура. Микротвердость нормализованной стали составляет 3120 МПа. В процессе УФО происходит интенсивная пластическая деформация поверхностного слоя стали (рис. 1). Под воздействием инструмента зерна поверхностного слоя теряют свою равноосную форму и вытягиваются в направлении движения инструмента. Глубина визуально наблюдаемой зоны пластической деформации составляет около 25 мкм. Вместе с тем, по результатам измерения микротвердости, общая глубина деформированного слоя составляет около 120 мкм, а среднее значение микротвердости обработанной поверхности увеличивается на 49 % и достигает 4780 МПа.

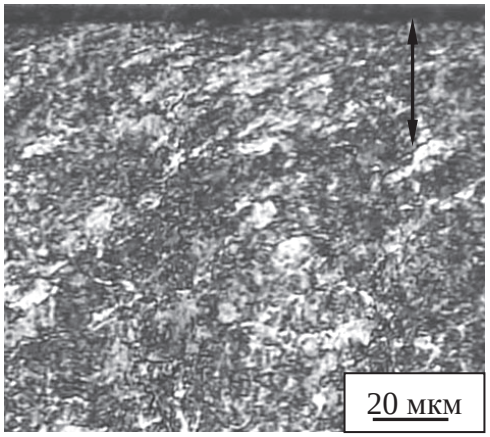


Рис. 1. *Оптическое изображение микроструктуры стали 40Х после УФО (стрелкой указана визуально наблюдаемая зона пластической деформации)*

Данные рентгеноструктурного анализа (РСА) показали, что в исходном состоянии в стали 40Х основными фазами являются α-фаза и карбид железа Fe_3C (рис. 2, *а*). Период решетки α-фазы a=0,2867 нм, что соответствует параметру решетки нелегированного феррита. После УФО наблюдается снижение интенсивности дифракционных линий карбида железа и увеличение параметра решетки феррита до a=0,2870 нм (рис. 2, *б*). Можно полагать, что в результате интенсивной пластической деформации частицы цементита дробятся на меньшие фрагменты и частично растворяются в феррите. Кроме того, уширение рентгеновских линий матричной α-фазы указывает на увеличение уровня микроискажений кристаллической решетки, увеличение плотности дислокаций и фрагментацию микроструктуры. Таким образом, в процессе УФО в поверхностном слое стали 40Х происходят структурные превращения, характерные для всех ранее исследованных феррито-перлитных углеродистых сталей [16, 17].

В процессе ионной имплантации происходит существенное изменение фазового состава и микротвердости поверхностного слоя стали как в исходном состоянии, так и после УФО. Необходимо

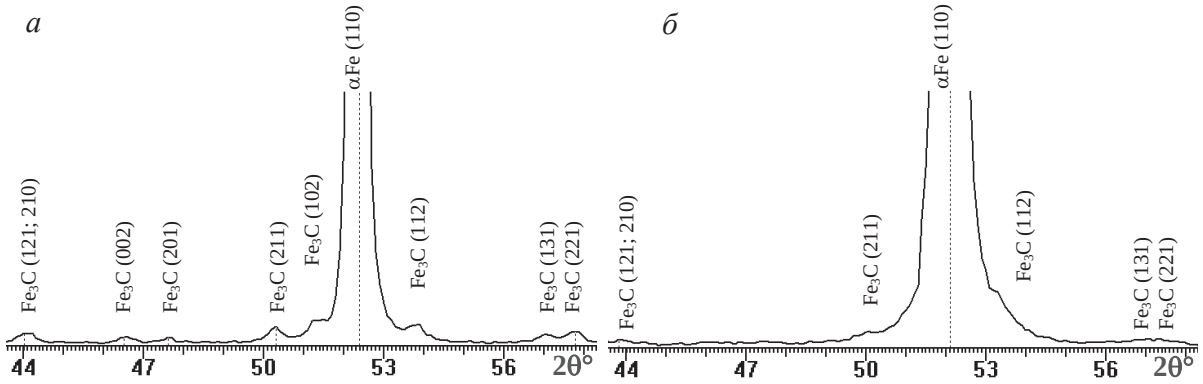


Рис. 2. *Фрагменты рентгеновских дифрактограмм от поверхностных слоев стали 40Х после: а) шлифования; б) УФО*

отметить, что при металлографическом анализе поперечных шлифов азотированных образцов идентификация азотированного слоя затруднена. Травление не выявило нитридной зоны, наблюдаемой как белый бесструктурный слой. При этом зона внутреннего азотирования, выявляемая как зона повышенной травимости, наблюдается только на образцах, имплантированных при температуре 450 и 500 °С. Как видно на рис. 3, зона азотирования не имеет выраженной границы с неимплантированным материалом.

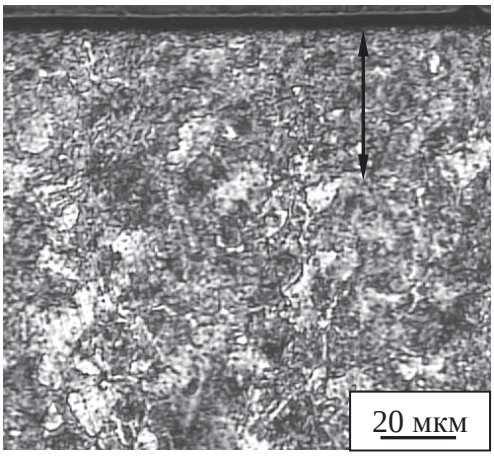


Рис. 3. *Оптическое изображение микроструктуры стали 40Х после УФО и ионной имплантации азота при температуре 450 °С (стрелкой указана зона повышенной травимости)*

Результаты РСА показали, что в поверхностном слое имплантированной при 350 °С стали, и в исходном, и в модифицированном УФО состоянии основной фазой остается α-железо, сохраняется цементит, и формируется фаза ε-Fe_3N (рис. 4, *а*, *б*). Предварительная УФО поверхности стали в процессе ионной обработки увеличивает количество выделившегося ε-нитрида. На это указывает возрастание интенсивности дифракционных линий данной фазы (рис. 4, *б*).

В процессе ионного азотирования возрастает параметр решетки α-фазы для предварительно шлифованной стали до a=0,2869 нм, а для модифицированной УФО – до a=0,2871 нм. Увеличение параметра кристаллической решетки феррита свидетельствует о растворении в ней азота и обусловлено внутрикристаллитной диффузией азота. На дифрактограмме полученной от модифицированной УФО и имплантированной азотом при 350 °С стали 40Х сохраняется высокое физическое уширение дифракционных линий α-фазы. Последнее свидетельствует о том, что нагрев до 350 °С мало влияет на дефектную структуру поверхностного слоя, сформированную под действием ультразвуковой обработки.

При повышении температуры имплантации до 400 °С в азотированном слое стали наряду с α-фазой, ε-нитридом и цементитом регистрируется образование частиц нитридной фазы γ'-Fe_4N (рис. 4, *в*, *г*). При этом концентрация частиц γ'-фазы в поверхностных слоях подвергнутой УФО стали существенно выше, чем в шлифованной стали (рис. 4, *г*). Параметр кристаллической решетки α-фазы после имплантации при данной температуре, независимо от режима предварительной обработки поверхности, составляет a=0,2871 нм и при азотировании с большими температурами не увеличивается, что может быть связано с максимально возможным насыщением решетки нелегированного феррита азотом. Имплантация при 400 °С приводит к уменьшению уширения основных рентгеновских линий α-фазы в поверхностных слоях с УФО. Следовательно, в ходе азотирования при 400 °С протекают процессы релаксации напряжений и отжига дефектов кристаллической решетки матричной α-фазы. Азотирование при более высоких температурах углубляет данный процесс, но даже после имплантации при 500 °С сохраняется некоторое уширение основных линий α-фазы (рис. 4, *е*).

После имплантации при 450 °С в модифицированных ионами азота слоях стали 40Х существенно возрастает относительная концентрация γ'-нитрида. При этом предварительная УФО поверхности стали интенсифицирует образование нитридной фазы (рис. 4, *д*, *е*). Интенсивность рентгеновских линий цементита снижается, что указывает на растворение карбида.

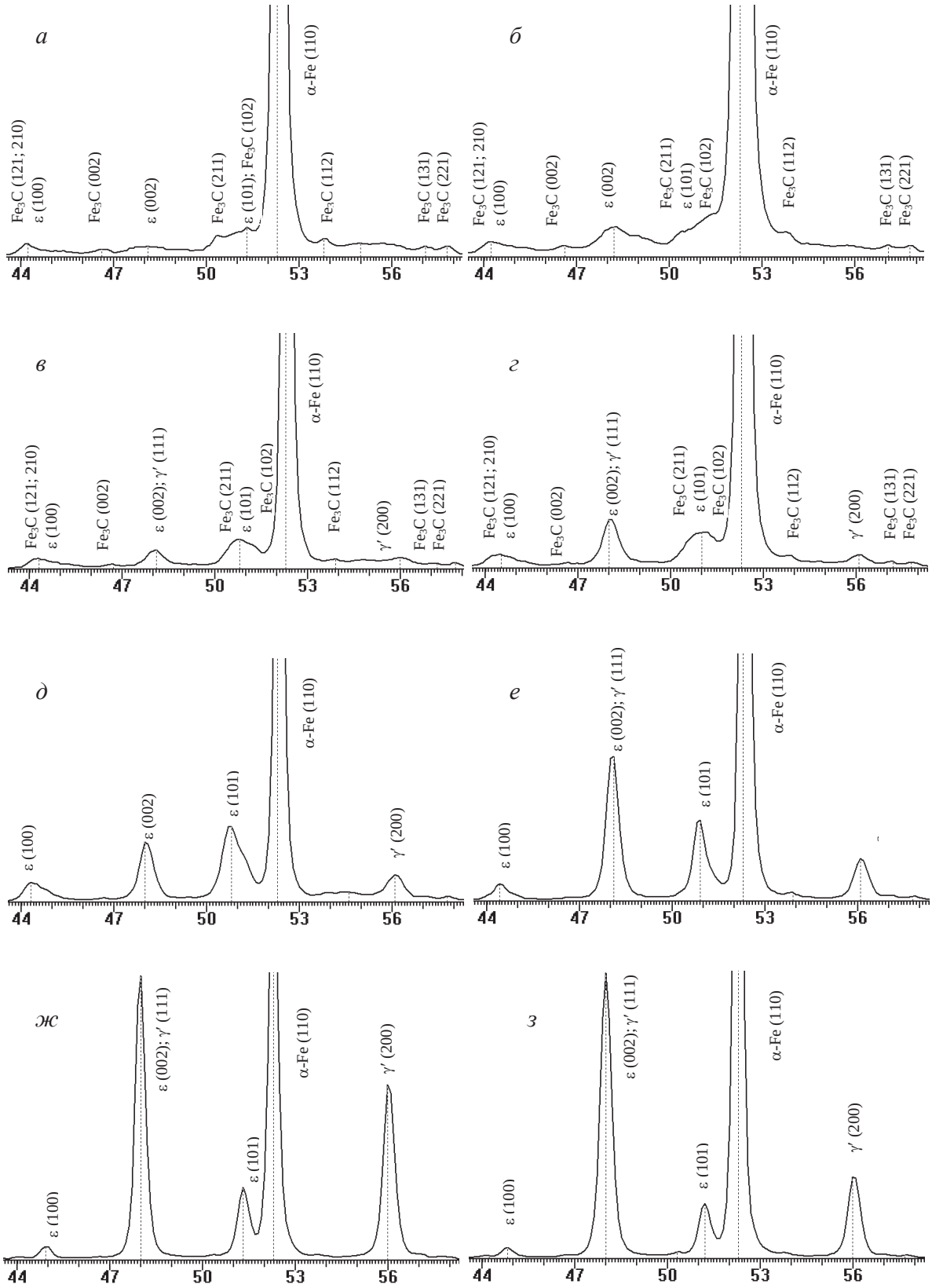


Рис. 4. *Фрагменты рентгеновских дифрактограмм от поверхностных слоев стали 40Х после ионной имплантации азотом (а, в, д, ж) и после ионной имплантации азотом с предварительной УФО (б, г, е, з) при температурах: а, б) 350; в, г) 400; д, е) 450; ж, з) 500 °С*

В результате имплантации при 500 °С, независимо от способа предварительной обработки поверхности, в азотированном слое образуются: твердый раствор азота в α-железе, нитрид γ'-Fe_4N и нитрид ε-Fe_3N (рис. 4, *ж*, *з*). Цементит в слое практически не регистрируется. Влияние предварительной УФО на содержание нитридов после имплантации при 500 °С не прослеживается.

Таким образом, можно констатировать, что при ионной имплантации на поверхности стали 40Х формируется азотированный слой, соотношение фаз в котором определяется температурой имплантации и способом предварительной подготовки поверхности.

Для оценки глубины азотированного слоя проводилось измерение микротвердости на поперечных шлифах. Анализ распределения значений микротвердости по глубине азотированного слоя показал, что при всех исследованных режимах азотирования микротвердость в поверхностном слое стали меняется по одной зависимости, близкой к экспоненциальной, что характерно для зоны внутреннего азотирования первого рода [15]. Значения микротвердости плавно снижаются от поверхности вглубь образца до уровня микротвердости исходного материала (рис. 5). При повышении температуры имплантации растет значение микротвердости на поверхности образцов и глубина упрочненного слоя. Так, при температуре имплантации 350 °С микротвердость на поверхности шлифованных образцов составляет H_{30}=5150–5800 МПа, а глубина упрочненного слоя 33–40 мкм. При температуре имплантации 500 °С микротвердость соответствует H_{30}=9550–1000 МПа, а глубина упрочненного слоя 120–140 мкм (рис. 5, *а*, *г*).

Распределение микротвердости в азотированном слое с предварительной УФО имеет некоторые особенности. При температуре имплантации 350 °С по всей глубине упрочненного слоя значения микротвердости выше по сравнению с микротвердостью образцов с предварительно шлифованной поверхностью (рис. 5, *а*). При этом глубина упрочненного слоя значительно больше и составляет около 120 мкм. Как видно из графика, по характеру изменения значений микротвердости в поверхностном слое стали на глубине до 40 мкм повышение значений микротвердости обусловлено формированием нитридов, а на большей глубине – за счет дефектов структуры, образованных в процессе УФО. Таким образом, значительная глубина упрочненного слоя обусловлена комбинированным воздействием двух методов модифицирования поверхности, и глубина азотированного слоя значительно меньше упрочненного. Это подтверждают и результаты РСА. При анализе дифрактограммы, снятой с модифицированной УФО и имплантированной при 350 °С поверхности стали 40Х, наблюдается одновременно и образование нитридной фазы, и сохранение уширения основных рентгеновских линий α-фазы, что указывает на сохранение в поверхностном слое сформированной при УФО дислокационной субструктуры. Похожая картина распределения значений микротвердости в упрочненном слое наблюдается и при температуре имплантации 400 °С (рис. 5, *б*). При температуре имплантации 450 °С глубина азотированного слоя становится соизмеримой с упрочненным слоем (рис. 5, *в*). При данном режиме имплантации явно заметен эффект предварительной модификации поверхности. УФО повышает и глубину упрочненного слоя, и значения микротвердости. Так, при имплантации с 450 °С глубина упрочненного слоя с предварительным шлифованием составляет 80–100 мкм, а с УФО – 120–150 мкм. После имплантации при 500 °С глубина упрочненного слоя с предварительным шлифованием составляет 140 и 200 мкм – с предварительной УФО (рис. 5, *г*).

Обсуждение результатов

Как видно из результатов эксперимента, радиационно-стимулированная диффузия, характерная для данного метода азотирования, обеспечивает формирование на поверхности стали 40Х азотированного слоя во всем исследуемом интервале температур. Следует отметить, что для данного типа стали при газовом азотировании близкие характеристики упрочненного слоя получаются за время, в десятки раз превышающее выбранное в эксперименте [15]. Воздействие интенсивного потока ионов, бомбардирующих облучаемую поверхность материала, может приводить к распылению поверхностного нитридного слоя и ускорению диффузионного переноса азота в подповерхностные слои [3]. Подобные азотированные слои были получены и в данном эксперименте – во всем температурном интервале имплантации упрочненный слой представляет собой зону внутреннего азотирования.

При температуре имплантации 350 °С в поверхностном слое стали формируется высокоазотистый нитрид ε-Fe_3N, что характерно для азотирования с высокой степенью насыщения материала азотом и углеродом (рис. 4, *а*, *б*). Так как оптически азотированная зона не наблюдается, то можно предположить, что образующийся нитрид железа наследует строение исходной фазы, а именно цементита. Как описывается в работе [15], нитридные частицы растут на цементитных пластинах зерен перлита, повторяя их контуры. Подвод ионов азота при этом происходит по границам зерен и малоугловым границам (при низкой температуре обычно преобладают именно эти пути диффузии [2]), дислокациям и объему кристаллической решетки. Внутрикристаллитная диффузия подтверждается повышением параметра кристаллической решетки феррита и на шлифованных, и на обработанных УФО поверхностях. После предварительной УФО параметр решетки феррита увеличивается значительнее, что обусловлено наличием в модифицированной стали в кристаллической решетке большего число вакансий, облегчающих процесс переноса азота [18, 19]. Увеличение количества нитридных

частиц при имплантации стали, подвергнутой УФО, связано с увеличением плотности линейных дефектов и малоугловых границ в ее поверхностных слоях, а также с интенсификацией внутрикристаллитной диффузии и увеличением количества центров зарождения и роста нитридных частиц. Последнее может быть связано с дроблением цементитных пластинок перлита [17]. Поскольку предварительная УФО увеличивает долю нитридов и количество растворенного в феррите азота в азотированном слое стали, то микротвердость поверхности стали становиться выше. В частности, упрочнение стали 40Х после имплантации при 350 °С для предварительно шлифованной поверхности составляет 75 %, а для поверхности, обработанной УФО, 100 %.

Анализ фазового состава и строения азотированных слоев, имплантированных при температуре 400 и 450 °С, показал следующие особенности. Как видно на рис. 4, *в–е* на дифрактограммах происходит снижение интенсивности линий цементита с одновременным увеличением интенсивности линий ε-фазы и смещением их в область меньших углов. Такие изменения на дифрактограммах ха-

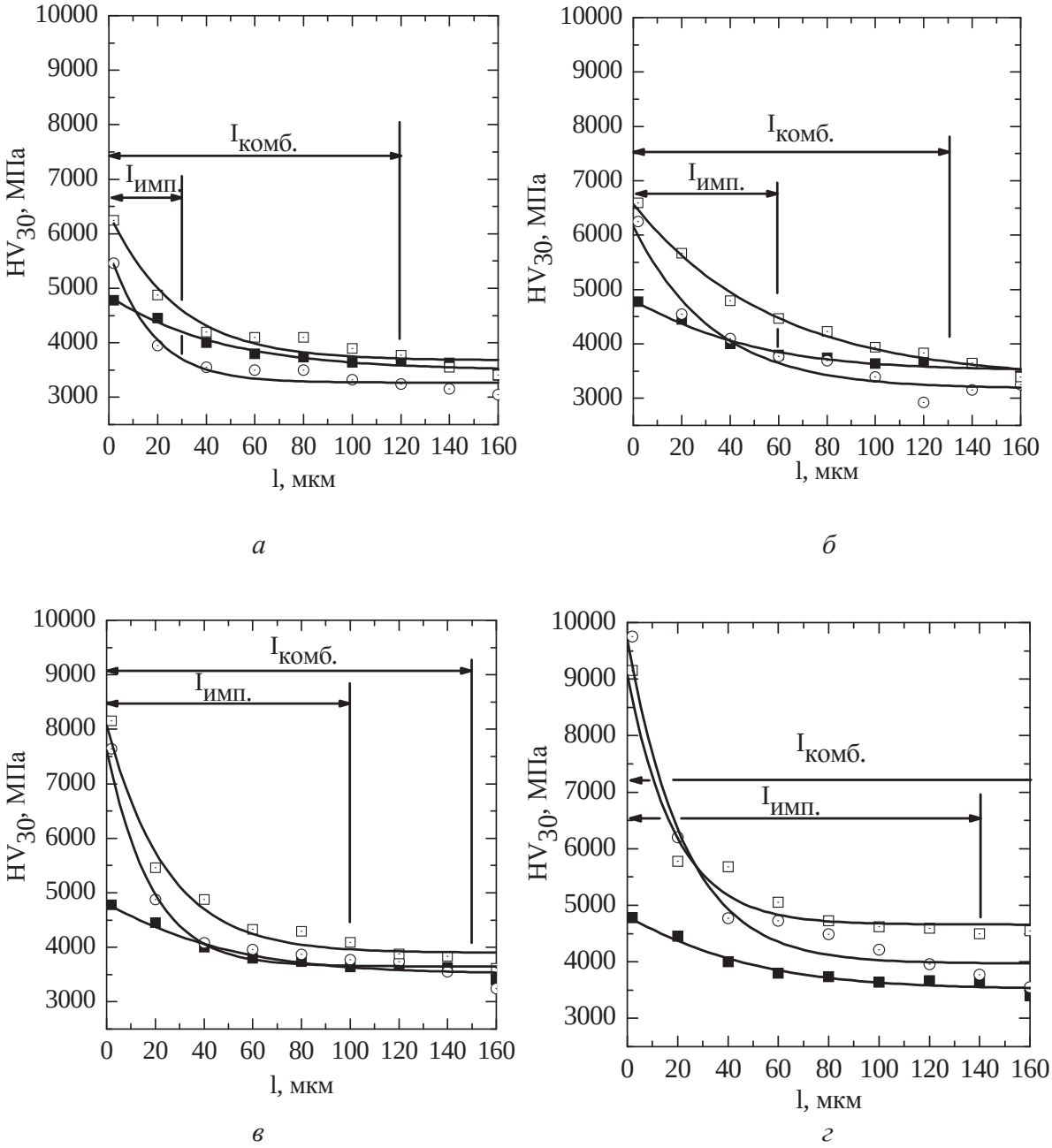


Рис. 5. *Распределение микротвердости по глубине упрочненного слоя стали 40Х после УФО (график -■-), ионной имплантации азотом (график -○-) и ионной имплантации азотом с предварительной УФО (график -□-) при температурах: а) 350; б) 400; в) 450; г) 500 °С. Зона $l_{имп.}$ – азотированный слой после имплантации, зона $l_{комб.}$ – азотированный слой после УФО и имплантации*

рактерны для процесса формирования карбонитрида $Fe_3(N,C)$, растворение в котором атомов углерода повышает параметр решетки ε-фазы. Как можно предположить, в данном температурном интервале образующиеся на пластинах цементита нитриды частично или полностью заменяют цементит, превращаясь в карбонитриды без изменения исходной морфологии перлита [20]. Наряду с данной фазой в азотированном слое формируются частицы γ'-фазы, идентифицируемой на дифрактограммах уже после азотирования при температуре 400 °С (рис. 4, *в*, *г*). Образование γ'-фазы проявляется в повышении травимости поверхностного слоя стали, что характерно для структуры с выделением субмикрокристаллических нитридных частиц [15]. Мелкодисперсные частицы нитрида выделяются из пересыщенного твердого раствора азота в феррите и могут располагаться на дислокациях и других дефектах кристаллической решетки α-фазы [3].

За счет дополнительного упрочнения дисперсными частицами γ'-фазы микротвердость поверхности имплантированных при температуре 450 °С предварительно шлифованных образцов возрастает на 145 %, а образцов, подвергнутых УФО, – на 160 %. Повышение значений микротвердости имплантированной поверхности стали, подвергнутой УФО, обусловлено увеличением в азотированном слое доли частиц γ'-фазы (рис. 4, *д*, *е*), а большая глубина упрочненного слоя – интенсификацией процесса диффузии по дефектам структуры, образованным при УФО (рис. 5, *в*).

Особенность формирования азотированного слоя при имплантации азота с температурой 500 °С связана с процессом обратной диффузии углерода, характерной для высокоэнергетических методов азотирования [21]. Одновременное с диффузией азота обезуглероживание поверхностного слоя стали сказывается на кинетике формирования нитридных фаз. Происходит увеличение доли фазы γ'-Fe_4N, формированию которой благоприятствует понижение содержания углерода в поверхностном слое (рис. 4, *ж*, *з*). То, что углерод не растворяется в карбонитриде железа, а диффундирует к поверхности стали и удаляется, подтверждает положение дифракционных линий ε-фазы. Их углы соответствуют положению линий нитрида ε-Fe_3N (рис. 4, *ж*, *з*). Возрастанию содержания низкоазотистого нитрида γ'-Fe_4N способствует также увеличение глубины азотированного слоя, сопровождающееся при одной и той же дозе ионов снижением концентрации азота в слое.

При имплантации образцов с предварительной УФО при температуре 500 °С одновременно с процессом диффузии азота активизируются процессы, характерные для возврата и полигонизации пластически деформированного материала: аннигиляция точечных дефектов и дислокаций разных знаков, перемещение дислокаций и выстраивание их в стенки. Данные структурные превращения приводят к формированию диффузионно-проницаемых дислокационных стенок и малоугловых границ, диффузия азота по которым значительно ускоряется [7]. В результате увеличивается глубина зоны внутреннего азотирования и это, возможно, приводит к снижению концентрации азота на поверхности стали. В результате, в поверхностном слое на глубине до 20 мкм объемная доля нитридов больше на образцах без предварительной УФО (рис. 4, *ж*, *з*). Степень упрочнение на поверхности стали после имплантации при 500 °С на предварительно шлифованной поверхности составляет 220 %, с УФО – 190 %. Меньшее значение микротвердости на поверхности с УФО компенсируется большей глубиной упрочнения до 200 мкм (рис. 5, *г*). А, как известно, большая глубина азотированного слоя со структурой, характерной для зоны внутреннего азотирования, благоприятна для эксплуатации деталей, работающих на износ при больших удельных нагрузках в условиях усталости [22].

Выводы

Исследовано влияние комбинированной обработки низколегированной конструкционной стали 40Х, включающей ультразвуковую финишную обработку и высокоинтенсивную низкоэнергетическую имплантацию ионами азота на структуру и фазовый состав азотированных слоев стали. Показано, что в процессе высокоинтенсивной низкоэнергетической имплантации ионами азота на поверхности стали 40Х формируется азотированный слой толщиной до 200 мкм, представляющий зону внутреннего азотирования следующего фазового состава: твердый раствор азота в феррите, цементит, нитриды железа – ε-Fe_3N и γ'-Fe_4N. При повышении температуры имплантации с 350 до 500 °С увеличивается доля низкоазотистого нитрида Fe_4N, что связано с увеличением глубины азотирования и, возможно, с процессом обратной диффузии углерода.

Установлено, что предварительная ультразвуковая финишная обработка интенсифицирует процесс имплантации, увеличивая глубину упрочненного слоя за счет ускоренной диффузии ионов азота по дополнительным дефектам кристаллического строения, и повышая микротвердость азотированного слоя, за счет увеличения доли нитридных фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лахтин Ю.М., Коган Я.Д., Шпис Г.-И. и др. Теория и технология азотирования. – М.: Металлургия, 1991. – 320 с.
2. Бокштейн С.З. Диффузия и структура металлов. – М.: Металлургия, 1973. – 208 с.
3. Арзамасов Б.Н., Братухин А.Г., Елисеев Ю.С. и др. Ионная химико-термическая обработка сплавов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 400 с.
4. Гегузин Я.Е. Диффузионная зона. – М.: Наука, 1979. – 343 с.
5. Лахтин Ю.М., Кальнер В.Д., Седуков В.К. и др. Влияние предварительной холодной деформации на цементацию стали // Металловедение и термообработка металлов. – 1971. – № 12. – С. 22–26.
6. Тиняев В.Г., Назаренко В.Д., Лахник А.М. Особенности формирования диффузионных слоев на сплавах железа после предварительной пластической деформации // Металлофизика и новейшие технологии. – 1996. – Т. 18. – № 2. – С. 45–51.
7. Власов В.М., Жигунов К.В., Иванькин И.С. и др. Влияние предварительной холодной пластической деформации на кинетику процесса никотрирования теплостойких сталей // Металловедение и термообработка металлов. – 2002. – № 9. – С. 39–41.
8. Исследование износостойкости стали, упрочненной высокоэнергетическими воздействиями / Ж.Г. Ковалевская, В.А. Клименов, И.М. Гончаренко, Н.Н. Коваль, А.И. Толмачев, В.А. Доломанова // Физическая мезомеханика. – 2006. – Т. 9. – Спец. выпуск. – С. 153–156.
9. Фазовые и структурные превращения в материалах на основе железа, подвергнутых низкоэнергетической имплантации азотом при высоких плотностях тока / А.В. Белый, В.А. Кукареко, О.В. Лободаева, С.К. Ших // Физика металлов и металловедение. – 1995. – Т. 80. – Вып. 6. – С. 82–95.
10. Белый А.В., Кукареко В.А., Патеюк А. Инженерия поверхностей конструкционных материалов концентрированными потоками ионов азота. – Минск: Белорусская наука, 2007. – 244 с.
11. Белый А.В., Кукареко В.А., Лободаева О.В. и др. Ионно-лучевая обработка металлов, сплавов и керамических материалов. – Минск: Изд-во Физико-технического института НАНБ, 1998. – 220 с.
12. Ковалевская Ж.Г., Уваркин П.В., Толмачев А.И. Исследование влияния дефектов точения на формирование микрорельефа поверхности стали при ультразвуковой финишной обработке // Обработка металлов. – 2012. – № 1. – С. 14–18.
13. Бекренев А.Н., Эпштейн Г.Н. Последеформационные процессы высокоскоростного нагружения. – М.: Металлургия, 1992. – 159 с.
14. Белый А.В. Высокоинтенсивная низкоэнергетическая имплантация ионов азота // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т. 5. – № 1. – С. 95.
15. Чаттерджи-Фишер Р., Эйзелл Ф.-В. и др. Азотирование и карбонитрирование / под ред. А.В. Супова. – М.: Металлургия, 1990. – 280 с.
16. Клименов В.А., Нехорошков О.Н., Уваркин П.В. и др. Структура, фазовый состав и свойства стали 60, подвергнутой ультразвуковой финишной обработке // Физическая мезомеханика. – 2006. – Т. 9. – Спец. выпуск. – С. 173–176.
17. Ковалевская Ж.Г., Иванов Ю.Ф., Перевалова О.Б. и др. Исследование микроструктуры поверхностных слоев малоуглеродистой стали после точения и ультразвуковой финишной обработки // Физика металлов и металловедение. – 2013. – Т. 114. – № 1. – С. 47–60.
18. Клименов В.А., Ковалевская Ж.Г., Перевалова О.Б. и др. Влияние ультразвуковой обработки поверхности стали 40Х13 на микроструктуру азотированного слоя, сформированного при высокоинтенсивной низкоэнергетической имплантации ионами азота // Физика металлов и металловедение. – 2006. – Т. 102. – № 6. – С. 621–629.
19. Мазанко В.Ф., Богданов Е.И., Мордюк Б.Н. и др. Особенности структурных изменений и диффузионного перераспределения атомов в стали 20 при ультразвуковой обработке // Металлофизика новейших технологий. – 2007. – № 3. – С. 305–315.
20. Апасов А.М., Апасов А.А., Козлов Э.В. Разрушение нитроцементованной стали // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 72–76.
21. Белоус В.А., Носов Г.И. Ионное азотирование сталей в дуговом разряде низкого давления // Технология машиностроения. – 2004. – № 3. – С. 35–39.
22. Лахтин Ю.М., Коган Я.Д. Внутреннее азотирование металлов и сплавов // Металловедение и термообработка металлов. – 1974. – № 3. – С. 20–28.

Поступила 31.10.2013 г.

UDC 669–179: 539.4.016

FEATURES OF FORMATION OF LAYERS NITRIDED IN PLASTICALLY DEFORMED STEEL 40X TREATED WITH INTENSIVE NITROGEN ION FLUXES

Zhanna G. Kovalevskaya,
Cand. Sc., National Research Tomsk Polytechnic University, Russia, 634050, Tomsk, Lenin avenue, 30, Institute of Strength Physics and Materials Science Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Russia, 634021, Tomsk, pr. Akademicheskii, 2/4. E-mail: kovalevskaya@ispms.tsc.ru

Vlavimir A. Kukareko,
Dr. Sc., State Scientific Institution Physical-Technical Institute of National Academy of Sciences of Belarus, Republic of Belarus, 220072, Minsk, Akademicheskaya street, 12. E-mail: v_kukareko@mail.ru

Hardened layers on the surface of the steel 40X were obtained by combination of ultrasonic finishing treatment and high-intensity low-energy ion implantation of nitrogen ions. Using the optical metallography, X-ray diffraction and durometery methods the authors have studied the features of the structure and properties of surface layers. It is shown that nitride layer is formed on steel surface at implantation. This layer is a zone of internal nitriding; its phase composition is determined by the temperature of the implantation and by technique of surface pretreatment. The increase of nitriding temperature results in rising the nitriding phase in steel surface layer. Ultrasonic finishing treatment intensifies nitrogen ion implantation increasing the depth of the hardened layer by forming large number of crystal defects in the structure and improving micro-hardness by increasing the proportion of nitride phases.

Key words:
Ultrasonic finishing treatment, nitrogen ion implantation, structure, phase analysis, hardening.

REFERENCES

1. Lakhtin Yu.M., Kogan Ya.D., Shpis G.-I. *Teoriya i tekhnologiya azotirovaniya* [Theory and technology of nitriding]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1991. 320 p.
2. Bokshteyn S.Z. *Diffuziya i struktura metallov* [Diffusion and structure of metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1973. 208 p.
3. Arzamasov B.N., Bratukhin A.G., Eliseev Yu.S. *Ionnaya khimiko-termicheskaya obrabotka splavov* [Ion chemical thermal treatment of alloys]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 1999. 400 p.
4. Geguzin Ya.E. *Diffuzionnaya zona* [Diffusion zone]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 343 p.
5. Lakhtin Yu.M., Kalner V.D., Sedukov V.K. Vliyanie predvaritelnoy kholodnoy deformatsii na tsementatsiyu stali [Effect of prior cold deformation on steel carburizing]. *Metal Science and Heat Treatment*, 1971, no.12, pp. 22–26.
6. Tinyaev V.G., Nazarenko V.D., Lakhnik A.M. Osobennosti formirovaniya diffuzionnykh sloev na splavakh zheleza posle predvaritelnoy plasticheskoy deformatsii [Features of formation of diffusion layers on iron alloys after preliminary plastic]. *Physics of Metals and Advanced Technologies*, 1996, no. 2, pp. 45–51.
7. Vlasov V.M., Zhigunov K.V., Ivankin I.S. Vliyanie predvaritelnoj kholodnoy plasticheskoy deformatsii na kinetiku protsessa nikotrirovaniya teplostoykikh staley [Effect of prior cold plastic deformation on the kinetics of heat-resistant steel carbonitriding]. *Metal Science and Heat Treatment*, 2002, no. 9, pp. 39–41.
8. Kovalevskaya Zh.G., Klimenov V.A., Goncharenko I.M., Koval N.N., Tolmachev A.I., Dolomanova V.A. Issledovanie iznosostoykosti stali, uprochnennoy vysokoenergeticheskimi vozdeystviyami [Study of wear resistance of steel, reinforced by high impacts]. *Physical Mesomechanics*, 2006, vol. 9, Special Issue, pp. 153–156.
9. Bely A.V., Kukareko V.A., Lobodaeva O.V., Shikh S.K. Fazovye i strukturnye prevrashheniya v materialakh na osnove zheleza, podvergnutykh nizkoenergeticheskoy implantatsii azotom pri vysokikh plotnostyakh toka [Phase and structural changes in iron based materials exposed to low energy nitrogen implantation at high current densities]. *The Physics of Metals and Metallography*, 1995, vol. 80, no. 6, pp. 82–95.
10. Bely A.V., Kukareko V.A., Pateyuk A. *Inzheneriya poverkhnostey konstruktsionnykh materialov kontsentrirovannymi potokami ionov azota* [Engineering of of structural material surfaces by concentrated flows of nitrogen ions]. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2007. 244 p.
11. Bely A.V., Kukareko V.A., Lobodaeva O.V. *Ionno-luchevaya obrabotka metallov, splavov i keramicheskikh materialov* [Ion-beam processing of metals, alloys and ceramic materials]. Minsk, Publ. house of Fiziko-tekhnicheskiy institut NANB, 1998. 220 p.
12. Kovalevskaya Zh.G., Uvarkin P.V., Tolmachev A.I. Issledovanie vliyaniya defektov tocheniya na formirovanie mikrorelefa poverkhnosti stali pri ultrazvukovoy finishnoy obrabotke [Studying turning defect influence on formation of steel surface microrelief at ultrasonic finishing]. *Obrabotka metallov – Metal Working*, 2012, no.1, pp. 14–18.
13. Bekrenev A.N., Epshteyn G.N. *Posledeformatsionnye protsessy vysokoskorostnogo nagruzheniya* [Processes after high strain loading]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1992. 159 p.
14. Bely A.V. Vysokointensivnaya nizkoenergeticheskaya implantatsiya ionov azota [High-intensity low-energy nitrogen ion implantation]. *Physical Mesomechanics*, 2002, vol. 5, no. 1, pp. 95.
15. Chatterdzhi-Fisher R., Eyzell F.-V. *Azotirovanie i karbonitrirovanie* [Nitriding and carbonitriding]. Ed. by Supov A.V. Moscow, Metallurgiya Publ., 1990. 280 p.
16. Klimenov V.A., Nehoroshkov O.N., Uvarkin P.V. Struktura, fazovy sostav i svoystva stali 60, podvergnutoy ultrazvukovoy finishnoy obrabotke [Structure, phase composition and properties of steel 60 subjected to ultrasonic treatment]. *Physical Mesomechanics*, 2006, vol. 9, Special Iss., pp.173–176.
17. Kovalevskaya Zh.G., Ivanov Yu.F., Perevalova O.B. Issledovanie mikrostruktury poverkhnostnykh sloev malouglerodistoy stali posle tocheniya i ultrazvukovoy finishnoy obrabotki [The microstructure of the surface layers of mild steel after turning and ul-

trasonic treatment]. *The Physics of Metals and Metallography*, 2013, vol. 114, no. 1, pp. 47–60.
18. Klimenov V.A., Kovalevskaya Zh.G., Perevalova O.B. Vliyanie ultrazvukovoy obrabotki poverkhnosti stali 40H13 na mikrostrukturu azotirovannogo sloya, sformirovannogo pri vysokointensivnoy nizkoenergeticheskoy implantatsii ionami azota [Effect of ultrasonic treatment of steel 40X13 surface on microstructure of the nitrided layer formed at high-intensity low-energy nitrogen ion implantation]. *The Physics of Metals and Metallography*, 2006, vol. 102, no. 6, pp. 621–629.
19. Mazanko V.F., Bogdanov E.I., Mordyuk B.N. Osobennosti strukturnykh izmeneniy i diffuzionnogo pereraspredeleniya atomov v stali 20 pri ultrazvukovoy obrabotke [Features of structural changes and diffusion redistribution of atoms in the steel 20 by ultrasonic treatment]. *Physics of Metals and Advanced Technologies*, 2007, no. 3, pp. 305–315.
20. Apasov A.M., Apasov A.A., Kozlov E.V. Razrushenie nitrotsementovannoy stali [Destruction of carbonitrided steel]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 2, pp. 72–76.
21. Belous V.A., Nosov G.I. Ionnoe azotirovanie staley v dugovom razryade nizkogo davleniya [Steel ion nitriding in low-pressure arc discharge]. *Tekhnologiya mashinostroeniya – Engineering Technology*, 2004, no. 3, pp. 35–39.
22. Lakhtin Yu.M., Kogan Ya.D. Vnutrennee azotirovanie metallov i splavov [Internal nitriding of metals and alloys]. *Metal Science and Heat Treatment*, 1974, no. 3, pp. 20–28.

УДК 539.25

НОВЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДАХ КЛИНОВИДНОЙ ФОРМЫ

Толипов Хорис Борисович,
канд. техн. наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики
Южноуральского государственного университета, Россия, 454080,
г. Челябинск, проспект Ленина, 76. E-mail: thb@susu.ac.ru

Исследования распространения волн в упругой клиновидной пластине выявили вблизи ребра новые акустические эффекты, неизвестные в технической литературе. При движении поверхностной волны в этой области происходит непрерывная перестройка акустического поля и излучение объемных волн. С приближением к ребру скорость поверхностной волны падает до нуля, но в обратном направлении волна набирает скорость. Все это свидетельствует о новом физическом явлении: обратная волна в клиновидной пластине возникает не за счет отражения от ребра в классическом понимании, а вследствие сжатия волнового потока. Возникающая при наложении падающих и обратных колебаний стоячая неоднородная волна формируется из возмущений малой амплитуды. Вдоль ребра клина возникает волновое движение оригинальной физической природы.

Ключевые слова:
Неоднородная волна, интерференция, клиновидная пластина, волновое поле, теория упругости.

Введение

Как показали исследования [1–3], движение поверхностной волны в клиновидной пластине сопровождается принципиально новыми эффектами. Так, например, при движении волны Рэлея в некоторой малой области, прилегающей к ребру, имеет место потеря ее устойчивости (стационарности). При этом возникает особый тип поверхностной волны, сопровождающийся в ходе движения непрерывной перестройкой акустического поля и излучением объемных волн.

Причина этого феномена кроется в том, что при движении поверхностной волны изменяются условия распространения: смещения частиц среды в какой-то момент времени начинают достигать противоположной грани клина, ведущей к расщеплению движущейся волны на независимые поверхностную и объемную компоненты. Энергия поверхностной волны в ходе движения начинает уменьшаться, т. к. объемные волны, непрерывно оттекающие с поверхности вглубь среды, уносят с собой часть энергии. Эти эффекты в конечном итоге приводят к расщеплению волны Рэлея на независимые симметричную и антисимметричную моды. Исследование поверхностной волны в клиновидной пластине состояло из двух этапов. Вначале рассматривалась эволюция поверхностной волны, движущейся перпендикулярно ребру клина [2–6], а затем движение волны вдоль ребра [7].

Решение первой задачи

Система уравнений волновой динамики обычно выводится из закона сохранения энергии без учета процессов диссипации. При распространении малых возмущений в клиновидной пластине энергия движущейся поверхностной волны не остается постоянной, а монотонно уменьшается за счет непрерывного оттока в объемные волны.

В рамках плосковолновой модели был рассмотрен подход, позволяющий приближенно оценить эволюцию движущейся поверхностной волны. В цилиндрической системе координат, позволяющей разбить векторное уравнение Ламе для каждого из волновых потенциалов, стандартные уравнения динамики имеют вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+k_\ell^2\Phi=0,$$
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+k_t^2\Psi=0. \qquad (1)$$

Наличие первой производной по продольной координате в (1) свидетельствует о том, что амплитуда потенциалов из-за сжатия волнового потока в клиновидной пластине нарастает к ребру. Однако эти уравнения не учитывают изменение амплитуды, обусловленное убылью энергии при трансформации поверхностной волны в объемные, а также изменение скорости волны.

Введением дополнительного члена в уравнения (1), который учитывал бы изменение амплитуды и скорости волны, не решить проблему, поскольку очень сложно определить зависимость изменяющихся параметров волны от координат. Но если допустить медленное изменение этих параметров в пределах локальной длины волны, то можно воспользоваться этими уравнениями для получения приближенного решения. На малых интервалах изменений r и t решения общего вида можно рассматривать как состоящие из элементарных решений, которые имеют вид:

$$\Phi(r)=A_0\exp[ik(r)r-i\omega t]\sin(\nu\theta),$$
$$\Psi(r)=A_0p\exp[ik(r)r-i\omega t]\sin(\eta\theta),$$

где $k(r)=k_0(1+ar)$, $dk(r)/dr=k_0a=2\pi a/\lambda$, $a=\varepsilon\lambda$, $\varepsilon<<1$, ε – малый параметр задачи.

Волновое число в этих соотношениях выражается в комплексном виде: $k(r)=k_1+ik_2(r)$, где действительная часть этого числа определяет скорость волны: $V(r)=\omega/k_1(r)$, а мнимая – амплитуду: $A(r)=A_0\exp[-k_2(r)]$.

Такой же подход был использован к граничным условиям, выражающим отсутствие напряжений на поверхностях клина [2, 3]:

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta\theta}=0,\ \text{при}\ \theta=\pm\theta_0,$$

где

$$\sigma_{r\theta}=\rho c_t^2\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta}=2\rho c_t^2\left[-\frac{k_t^2}{2}\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right].$$

Решения (1) целесообразно искать в виде комбинаций функции Ханкеля первого рода:

$$\Phi=\begin{bmatrix}A_0H_\nu^{(1)}(k_\ell r)\cos(\nu\theta)+\\+C_0H_\nu^{(1)}(k_\ell r)\sin(\nu\theta)\end{bmatrix}\exp(-i\omega t),$$
$$\Psi=\begin{bmatrix}A_0H_\eta^{(1)}(k_t r)\sin(\eta\theta)+\\+C_0H_\eta^{(1)}(k_t r)\cos(\eta\theta)\end{bmatrix}\exp(-i\omega t),$$

поскольку эти функции удовлетворяют условию погашаемости.

В этих выражениях угловые волновые числа ν, η связаны с искомыми волновыми числами и предполагаются медленно изменяющимися на локальной длине волны.

С учетом этих преобразований получаем комплексное дисперсионное уравнение для определения амплитуды и скорости волны:

$$\frac{\dfrac{H_\nu^+}{H_\nu^{(1)}(k_l r)}-2\left(\dfrac{k_t^2}{k_l^2}-1\right)}{\dfrac{H_\nu^-H_{i\eta}^-}{(H_\nu^{(1)}(k_l r)H_\eta^{(1)}(k_l r))}}\frac{H_\eta^+}{H_\eta^{(1)}(k_l r)}-\left[\frac{tg\eta\theta}{tg\nu\theta}\right]^n=0, \qquad (2)$$

где

$$H_\nu^\pm=H_{\nu-2}^{(1)}(x_j)\pm H_{\nu+2}^{(1)}(x_j),$$
$$H_\eta^\pm=H_{\eta-2}^{(1)}(x_j)\pm H_{\eta+2}^{(1)}(x_j),$$
$$x_1=k_l r,\ \ x_2=k_t r,\ \ n=\pm 1\ .$$

Уравнение (2) показывает наличие двух спектральных ветвей (мод) акустической волны – симметричной (n=1) и антисимметричной (n=–1)

На рис. 1 приведены соответственно зависимости относительной скорости симметричных и антисимметричных волн от расстояния до ребра клина.

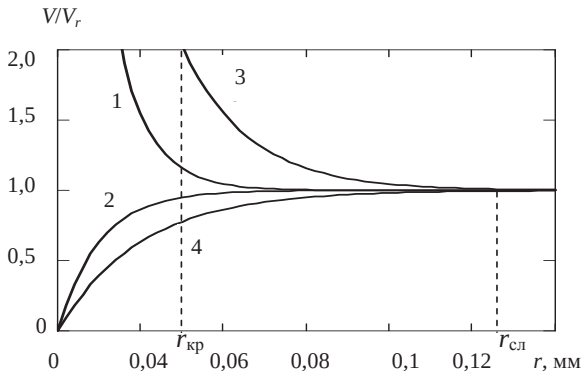


Рис. 1. *Зависимость относительной скорости распространения антисимметричных (2 и 4) и симметричных (1 и 3) волн от расстояния до ребра клина (V_r – скорость рэлеевской волны, f=2,5 МГц)*

Следует отметить особый характер полученных зависимостей скоростей этих мод. С приближением к ребру от бесконечности до точки $r_{сл}$ имеем устойчивое стационарное распространение поверхностной волны, а после этой точки происходит потеря устойчивости, сопровождающаяся возникновением двух мод. При этом оказывается, что скорости распространения этих мод при приближении к ребру будут изменяться различным образом. Скорость антисимметричной моды стремится к нулю, а симметричной – к скорости продольной волны. Область распространения этих мод также различная: если симметричная мода существует в узкой области от $r_{сл}$ до $r_{кр}$ границы неустойчивой зоны, то антисимметричная занимает всю область от границы $r_{сл}$ до ребра клина.

Акустическое поле в клиновидной пластине вблизи ребра фактически представляет наложение двух неоднородных волн – бегущей к ребру и отраженной от него. Возникающая стоячая акустиче-

ская волна, рассмотренная в [4, 5], формируется только из антисимметричных волн. Скорость падающей волны в направлении ребра снижается от рэлеевской до нуля. В обратном направлении скорость волны убыстряется до рэлеевской. В силу равных условий распространения изменения скорости как в прямом, так и обратном направлениях имеют идентичный характер, что приводит к устойчивой волновой картине.

Амплитуда падающей волны изменяется в ходе движения и определяется конкуренцией двух механизмов – с одной стороны уменьшением локальной толщины пластины, ведущей к сжатию волнового потока и нелинейному росту амплитуды, с другой – нелинейным затуханием возмущений, связанным с оттоком энергии при возникновении объемных волн. Однако амплитуда возмущений при обратном движении определяется только одним механизмом – увеличением локальной толщины пластины, ведущим к нелинейному падению амплитуды. В этой ситуации взаимодействие с противоположной гранью не происходит, следовательно, трансформация поверхностной в объемные волны в этом случае не происходит.

На рис. 2 показана интерференционная структура акустического поля по направлению к ребру клина для угла клина 26°. Отметим, что расстояния между пучностями стоячей волны при приближении к ребру увеличиваются, что свидетельствует об уменьшении скорости моды поверхностной волны. Опытные данные получены на оригинальной установке [6], которая подробно описана в [7].

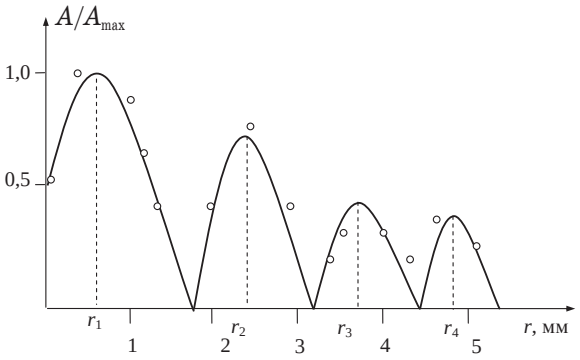


Рис. 2. *Зависимость амплитуды стоячей волны от расстояния до ребра для угла клина 26°*

С приближением к ребру уменьшается локальная толщина, что приводит к уменьшению скорости антисимметричной волны. При этом волновой поток, теряя скорость, сжимается, достигая у ребра максимальной плотности энергии. В обратном направлении поток расширяется, двигаясь от ребра и набирая скорость. Плотность энергии волнового потока при этом уменьшается, что ведет к спаду амплитуды. Этот эффект является специфическим и характерен только для клиновидной пластины.

Решение второй задачи

При распространении волны параллельно ребру клина скорость ее будет также зависеть от локальной толщины клина (в области траектории волны) [7]. Различная скорость по фронту волны будет приводить к отклонению волновой нормали и обуславливать отвод энергии к ребру клина. Поэтому эта волна должна характеризоваться неустойчивой траекторией, что противоречит известным экспериментальным наблюдениям.

Известно, что акустическое волновое сопротивление пропорционально скорости распространения волны. В соответствии с принципом наименьшего действия, при распространении упругой энергии в анизотропной среде происходит снос энергии из области с большим волновым сопротивлением в область с меньшим волновым сопротивлением.

Следовательно, при излучении поверхностной волны первоочередным будет ее движение в сторону более низкого пространственного градиента скорости – к ребру клина в область с уменьшающимся по ходу движения волновым сопротивлением. Отражаясь от ребра, потоки энергий падающей и отраженной волн накладываются, что приводит к пространственному перераспределению интенсивности колебаний с возникновением чередования максимумов и минимумов.

В этой ситуации переноса энергии волны по направлению к ребру не происходит, а прямым следствием этого факта является переориентация направления потока энергии волны, который устремляется вдоль ребра клина.

Таким образом, вначале возникает волновое движение перпендикулярно к ребру клина, существующее только в начальный период времени до образования стоячей волны, а затем формируется интерференционной поток энергии в новом направлении – вдоль ребра клина. Важно отметить, что траектория этой волны теперь будет устойчивой и будет проходить параллельно ребру клина. Это свидетельствует о специфической разновидности неоднородной волны в клиновидной пластине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толипов Х.Б., Гуревич С.Ю., Геренштейн А.В. Распространение упругих волн в клине. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 96 с.
2. Толипов Х.Б. Решение задачи взаимодействия рэлеевских волн с ребром клина при малых углах раствора // ПМТФ. – 2010. – Т. 51. – № 1. – С. 28–39.
3. Толипов Х.Б. Поверхностные акустические волны в упругой среде клиновидной формы // ЖТФ. – 2012. – № 9. – С. 139–142.
4. Tolipov Kh. Stagnant Nonuniform Acoustic Waves // Advanced Material Research. – V. 684. – P. 667–670. Trans Tech Publications. Switzerland (2013). doi:10.4028/www.scientific.net/AMR. 684. – 667 p.
5. Толипов Х.Б. Стоячие волны в упругой клиновидной пластине // АЖ. – 2013. – № 4. – С. 502–507.
6. Устройство для измерения скорости поверхностных акустических волн: пат. № 115492 РФ, МПК G 01 N 29/00т; заявл.21.11.2011; опубл. 27.04.2012, Бюл. № 12. – 2 с.
7. Толипов Х.Б. Теоретическое и экспериментальное исследование волн, распространяющихся вдоль ребра клина // ПМТФ. – 2012. – Т. 51. – № 6. – С. 28–30.

Поступила 20.06.2013 г.

UDC 539.25

NEW ACOUSTIC EFFECTS AT WAVE PROPAGATION IN WEDGE-SHAPED MEDIA

Khoris B. Tolipov,
Cand. Sc., South Ural State University,
Russia, 454080, Chelyabinsk, Lenin avenue, 76. E-mail: thb@susu.ac.ru

The research of wave propagation in elastic wedge plate revealed new acoustic effects near the edge unknown in the technical literature. At surface wave movement in this area the acoustic field is a continuously restructured and spatial wave radiation occurs. When reaching the edge the surface wave rate falls to zero, but in the opposite direction the wave gains velocity. All these facts identify a new physical phenomenon: the inverse wave in the wedge plate occurs not due to reflection from an edge in the classic sense, but because of wave flow compression. Occurring at falling and reverse fluctuations impose the standing nonuniform wave is formed of the displacements of small amplitude. The wave motion of original physical nature occurs along the wedge edge.

Key words:
Nonuniform wave, interference, wedge-shaped plate, wave field, the theory of elasticity.

REFERENCES

1. Tolipov Kh.B., Gurevich S.Yu., Gerenshteyn A.V. *Rasprostranenie uprugikh voln v kline* [Distribution of elastic waves in a wedge]. Chelyabinsk, YuUrGU Publishing house, 2003. 96 p.
2. Tolipov Kh.B. Reshenie zadachi vzaimodeystviya releevskikh voln s rebrom klina pri malykh uglakh rastvora [Solution of interaction problem of Rayleigh waves with the wedge edge with a small apex angle]. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 2010, vol. 55, no. 1, pp. 22–30.
3. Tolipov Kh.B. Poverkhnostnye akusticheskie volny v uprugoy srede klinovidnoy formy [Surface acoustic waves in an elastic wedge media]. *Technical Physics*, 2012, vol. 57, Iss. 9, pp. 1321–1324.
4. Tolipov Kh. *Stagnant Nonuniform Acoustic Waves. Advanced Material Research*. Vol. 684, pp. 667–670. Trans Tech Publications. Switzerland (2013) doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.684. 667 p.
5. Tolipov Kh.B. Stoyachie volny v uprugoy klinovidnoy plastine [Stagnant waves in an elastic wedge-shaped plate]. *Acoustical physiques*, 2013, vol. 59, no. 4, pp. 447–452.
6. Tolipov Kh.B., Tolipova Yu.Kh. *Ustroystvo dlya izmereniya skorosti poverkhnostnykh akusticheskikh voln* [Device for measuring the velocity of the surface acoustic waves]. Patent RF, no. 115492 MPK G01N 29/00, 2011.
7. Tolipov Kh.B. Teoreticheskoe i eksperemntalnoe issledovanie voln rasprostranyayushchikhsya vdol rebra klina [Theoretical and experimental study of waves propagating along the edge of a wedge]. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 2012, vol. 53, no. 6, pp. 854–859.

УДК 621.45.038.7

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПОКРЫТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРОМЕТРИИ ЯДЕРНОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Борисов Анатолий Михайлович,
д-р физ.-мат. наук, профессор ФГБОУ ВПО «МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского», Россия, 109383, г. Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: anatoly_borisov@mail.ru

Востриков Владимир Геннадьевич,
науч. сотр. НИИЯФ им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: vostrikov.vladimir@gmail.com

Романовский Евгений Александрович,
д-р физ.-мат.наук, профессор, зав. отделом, НИИЯФ им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: besp@hep.sinp.msu.ru

Ткаченко Никита Владимирович,
мл. науч. сотр. НИИЯФ им. Д.В. Скобельцына МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: nicki_tkak@mail.ru

Савушкина Светлана Вячеславовна,
науч. сотр. ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», Россия, 125438, г. Москва, ул. Онежская, д. 8. E-mail: sveta_049@mail.ru

Полянский Михаил Николаевич,
канд. техн. наук, заместитель начальника отдела нанотехнологий ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша», Россия, 125438, г. Москва, ул. Онежская, д. 8. E-mail: nanocentre@kerc.msk.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения срока эксплуатации изделий аэрокосмической отрасли путем разработки методов нанесения теплозащитных покрытий на конструкционные материалы изделий.
Цель работы: *исследование структуры теплозащитных покрытий, получаемых плазменным напылением стабилизированного диоксида циркония.*
Методы исследования: *спектрометрия ядерного обратного рассеяния (ЯОР).*
Результаты: *методом спектрометрии ядерного обратного рассеяния исследована структура и элементный состав покрытий, формируемых плазменным напылением стабилизированного порошка диоксида циркония, и определены их толщины. Установлено наличие переходного слоя между покрытием и подложкой толщиной ~5 мкм. Путем сопоставления геометрической и массовой толщин покрытий определена их пористость (20...30 %). Обнаружено, что из-за высоких скоростей нанесения покрытий в динамическом вакууме в случае послойного напыления порошков диоксида циркония и никеля может происходить формирование слоя со смешанным элементным составом, при этом пористость покрытий уменьшается с увеличением количества наносимых слоев. Для структуры покрытия, полученного при плазменном напылении через маску с отверстиями, методом ЯОР установлена периодически изменяющаяся по поверхности толщина покрытия.*

Ключевые слова:
Теплозащитноепокрытие, плазменное напыление, ядерное обратное рассеяние, диоксид циркония, наноструктурирование.

Введение

Нанесение теплозащитных покрытий (ТЗП) на наиболее теплонапряженные узлы изделий ракетно-космической и авиационной техники является одним из широко используемых способов сохранения их работоспособности при высокотемпературных воздействиях. Наиболее часто в качестве ТЗП используют покрытия из нескольких слоев, где нижние слои связующие, а верхнийтермобарьерный, обладающий низким коэффициентом теплопроводности [1, 2]. Одним из наиболее подходящих для ТЗП является диоксид циркония (λ=2 Вт/м·К при температурах ~1500 К), стабилизированный оксидом иттрия [1–3]. Для получения ТЗП широко используются методыгазотермического напыления (ГТН), в частности плазменное напыление [1, 2]. Для улучшения прочностных свойств плазменных покрытий их нанесение часто проводят в динамическом вакууме (при пониженных давлениях от 65 до 130 Па) [4, 5].

Данная работа посвящена исследованию элементного состава, толщины и пористости ТЗП, получаемых при плазменном напылении в динамическом вакууме, методом спектрометрии ядерного обратного рассеяния протонов (ЯОР).

Эксперимент

В работе проводили напыление однослойных диоксид циркониевых покрытий (сплошных и наноструктурированных) имногослойных ТЗП, на стальных (12Х18Н10Т) и медных (М1) подложках, как на часто используемых конструкционных материалах в ракетной технике. Плазменное напыление проводили в динамическом вакууме (плазменно-кластерное напыление) [5] при давлении в камере ~0,1 МПа порошком диоксида циркония, стабилизированного оксидом иттрия (8 %) (размеры частиц порошка ~5...10 мкм) с помощьюплазмотрона постоянного тока с мощностью до ~20 кВт. Ток дуги составлял 100 А, напряжение – 100 В. В качестве плазмообразующего и транспортирующего газа использовали азот с расходом 1 г/с. Дистанция напыления составляла 40 мм. Однослойные покрытия с толщинами 15, 20, 24 и 27 мкм были получены на стальных подложках. Наноструктурированные покрытия («решетка») получали на медных подложках при напылении через маску с отверстиямиразмером 9 мм^2 и перемычками толщиной 1 мм, установленную на расстоянии 1 мм от подложки. Напротив отверстий маски происходило образование обычного плазменного покрытия со структурой, состоящей из сильно деформированных частиц. А в области затенения реализуется течение Прандтля–Майера – сверхзвуковое обтекание перемычки паровой фазой материала в маске с образованием веера волн разряжения, проходя который из паровой фазы напыляемого материала конденсируются наночастицы [6]. Многослойные ТЗП толщиной 35 и 60 мкм получали на медных подложках последовательнымнапылением на поверхность образцов слоёв из никеля и стабилизированного диоксида циркония (3 и 11 слоев) для компенсации внутренних напряжений, возникающих при разнице КТР материала защищаемого изделия и диоксида циркония. Измерение геометрической толщины покрытий производили металлографическими методами.

Исследование элементного состава, толщин, равномерности слоев и пористости покрытий проводилось с помощью метода спектрометрии ядерного обратного рассеяния (ЯОР) [7–9]. Спектры ЯОР измеряли на пучке протонов 120 см циклотрона НИИЯФ МГУ. Энергия протонов пучка составляла 7,5 МэВ, угол рассеяния в лабораторной системе координат – 160 градусов. Извлечение информации о послойном элементном составе поверхностного слоя проводили путем сопоставления экспериментально измеренных спектров ЯОР с расчетными, получаемыми путем моделирования ЯОР протонов с помощью программы NBS.

Модель ядерного обратного рассеяния протонов

Метод спектрометрии обратного рассеяния протонов для исследования состава поверхностных слоёв материалов основан на использовании кинематических и статистических закономерностей упругого рассеяния частиц на ядрах, входящих в состав этих слоёв (например, [10]). Заложенная в программу моделирования NBS схема обратного рассеяния представлена на рис. 1.

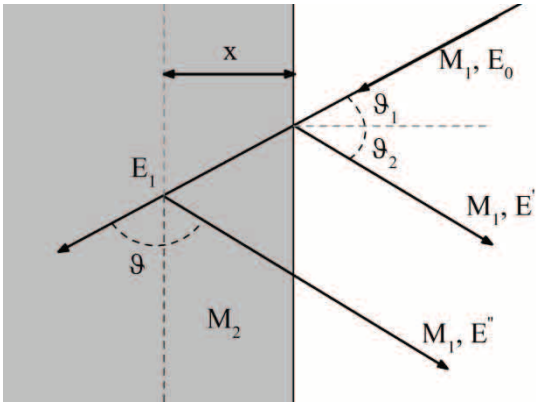


Рис. 1. *Кинематика обратного рассеяния*

Если частица с массой M_1 сталкивается с ядром мишени массой M_2 на поверхности, то начальная (E_0) и конечная (E') энергии частицы будут связаны между собой соотношением

$$E' = kE_0,$$

где

$$k = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2}\right)^2 \left[\cos u + \sqrt{\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 - \sin^2 u}\right]^2.$$

Следовательно, используя пучок частиц с фиксированной и известной энергией и измеряя энергию рассеянных частиц под определённым углом θ, можно определить массу ядра M_2, на котором произошел акт рассеяния на поверхности мишени.

Для случая рассеяния частицы на глубине x начальная и конечные энергии протона будут связаны между собой следующим соотношением

$$E'' = kE_0 - k\frac{x}{\cos u_1}\left(\frac{dE}{dx}\right) - \frac{x}{\cos u_2}\left(\frac{dE}{dx}\right), \qquad (1)$$

где dE/dx – энергетические потери, связанные с ионизацией среды при прохождении протона через вещество. Зная, на каком элементе произошло рассеяние, из (1) можно определить глубину x, на которой произошел акт рассеяния.

Для определения количества атомов в исследуемом поверхностном слое необходимо измерить число протонов dN, рассеянных на определенный угол θ в тонком слое dx_1 на глубине x от поверхности.

В предположении, что протоны испытывают лишь один акт столкновения с ядром, количество

протонов dN, рассеянных на угол θ в телесном угле dW ядрами в тонком слое dx_1, связано с сечением рассеяния $\sigma(E,\theta)$ соотношением

$$dN = N_0 n dW \sigma(E_1,\theta) dx_1,$$

где N_0 – число частиц, падающих на мишень; E_1 – энергия частиц в точке рассеяния; n – число атомов мишени в 1 см^3.

Спектр ЯОР многокомпонентной мишени представляет собой суперпозицию спектров рассеяния на ядрах отдельных компонентов вещества мишени. Индивидуальность сечения рассеяния для каждого ядра$A(Z)$ обусловливает характерный для данного вещества вид спектра ЯОР.

Полученные результаты и обсуждение

На рис. 2 приведен типичный спектр ЯОР длядиоксид циркониевого покрытия толщиной ~15 мкм. По оси xотложены номера каналов, пропорциональные энергии рассеянных протонов, по оси y – число рассеявшихся протонов на канал. Спектр представляет собой суперпозицию спектров от элементов, входящих в состав покрытия (Zr, O), и стальной подложки (Fe). Азота, служившего плазмообразующим и транспортирующим газом, в покрытиях не обнаружено. Исследование элементного состава по глубине однослойных покрытий показало, что кромедиоксид циркониевого слоя в них присутствует переходный слой на границе покрытие–подложка толщиной до 5 мкм, наполовину состоящий из элементов подложки.

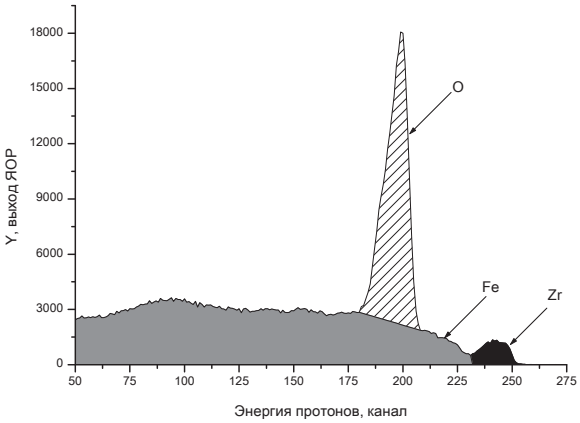


Рис. 2. *Спектр ЯОР для однослойного диоксид циркониевого покрытия толщиной 15 мкм*

Анализ спектров ЯОР многослойных ТЗП показал сильное снижение содержания кислорода в покрытии, не менее чем на 9 ат. %. На рис. 3 показано сравнение спектров ЯОР для образца с ТЗП, состоящим из 11 слоёв диоксида циркония и никеля, и для образца с однослойным диоксид циркониевым покрытием. В случае многослойного покрытия могла проявиться дискретность пика кислорода, так как при прохождении через промежуточные слои никеля энергия протонов дополнительно уменьшается из-за ионизационных потерь. В эксперименте этот эффект не проявился, что позволяетпредположить, что в процессе нанесения покрытия произошло перемешиваниеслоев диоксида циркония и никеля.

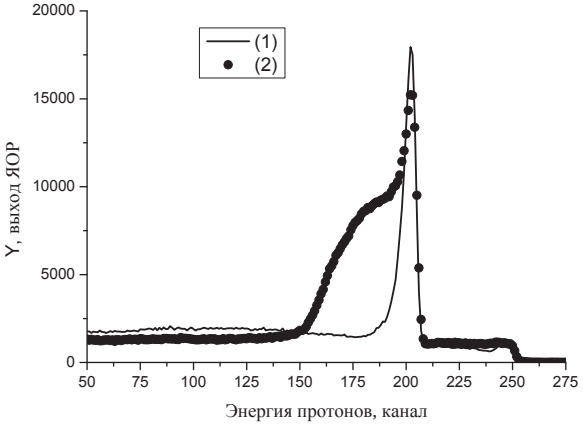


Рис. 3. *Сравнение спектров ЯОР протонов энергии 7,5 МэВ для однослойного диоксид циркониевого покрытия (–) и для многослойного ТЗП из 11-ти чередующихся слоёв никеля и диоксида циркония (●)*

Одной из важнейших характеристик теплозащитных покрытий является пористость, поскольку она влияет на теплопроводность и механические свойства покрытия. Возможность определения пористости методом ЯОР основана на том, что наличие пор (пустот) никак не отражается на спектрах, поскольку измерение толщины покрытия здесь связанно с потерями энергии в веществе. Определяется так называемая массовая, или рентгеновская, толщина, априсравнении ее с геометрической толщиной покрытия становится возможным определить объёмную пористость исследуемых покрытий:

$$П=(h_{геом}-h_{масс})/h_{геом}.$$

При выбранных в эксперименте энергиях пучка протонов максимальная глубина анализа составляет 100 мкм при энергии протонов7,5 МэВ. Для оценки пористости более толстых покрытий требуется повышение энергии пучка протонов.

Таблица. *Результаты анализа однослойных покрытий ZrO_2–Y_2O_3*

Геометрическая толщина, мкм	Массовая толщина, мкм	Пористость, %
15	11,5	23
20	14	30
24	15	28
27	22	22

Результаты анализа спектров ЯОР и оценки пористости покрытий представлены в таблице. Для однослойных диоксид циркониевых покрытий пористостьнаходится в интервале 20...30 %. Оценка пористости для многослойных ТЗП показала, что для трехслойного покрытия пористость практически в 4 раза выше, чем для 11-ти слойного. Это может быть связано с лучшим проплавлением частиц

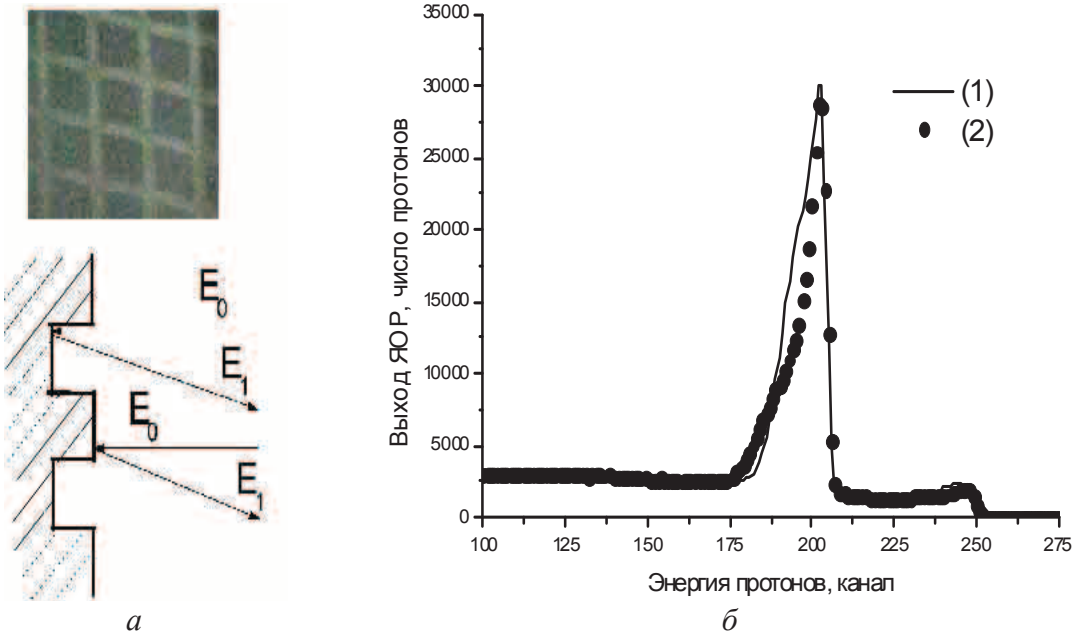


Рис. 4. *Кинематика процесса рассеяния от покрытия «решетка» (а) и сравнение спектров ЯОР (б) от обычного плазменного покрытия (–) и наноструктурированного, полученного при напылении через маску с отверстиями (●)*

порошка никеля и заполнением им пор в диоксид циркониевых слоях, что приводит к формированию более плотной структуры.

На рис. 4, *а* представлена схема эксперимента ЯОР и изображение продольно структурированного покрытия «решётка». Покрытие характеризуется двумя типами областей: наноструктурного покрытия, полученного за перемычками маски, и обычного плазменного покрытия.

Такая структура приводит к изменению схемы ЯОР, так как происходит одновременно рассеяние от относительно тонкой мишени (наноструктурное покрытие) и толстой мишени (плазменное покрытие). Спектр ЯОР представляет собой суперпозицию спектров от двух областей (рис. 4, *б*). Участки наноструктурного покрытия дают вклад только в высокоэнергетическую часть спектров циркония и кислорода. Моделирование ЯОР позволило определить толщины слоев в двух типах областей: в области плазменного покрытия ~22 мкм, в области наноструктурного ~6 мкм.

Выводы

Методом спектрометрии ядерного обратного рассеяния протонов энергии 7,5 МэВ исследованы элементный состав и структура теплозащитных покрытий, формируемых на стальных и медных подложках плазменно-кластерным напылением стабилизированного порошка диоксида циркония.

Установлено, что при формировании покрытий плазменно-кластерным нанесением кроме основного слоя диоксида циркония образуется переходный слой на границе покрытие–подложка толщиной до 5 мкм, наполовину состоящий из элементов подложки. Объемная пористость покрытий, определяемая сопоставлением массовой и геометрических толщин, составила от 22 до 30 %.

При послойном напылении порошков диоксида циркония и никеляв динамическом вакууме из-за высоких скоростей напыления формируются покрытия смешанного состава, при этомобщая пористость покрытий при увеличении количества наносимых слоев уменьшается в несколько раз, что может быть связано с проплавлением частиц порошка никеля и заполнением им пор в слоях диоксида циркония.

Для структуры покрытия, полученного при плазменном напылении через маску с отверстиями, установлена периодически изменяющаяся по поверхности толщина покрытия от 6 до 22 мкм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Газотермическое напыление / под ред. Л.Х. Балдаева. – М.: Маркет ДС, 2007. – 344 с.
2. Кривобоков В.П., Сочугов Н.С., Соловьев А.А. Плазменные покрытия (Свойства и применение). – Томск: Изд-воТПУ, 2011. – 136 с.
3. Физические величины. Справочник / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
4. Кудинов В.В., Бобров Г.В. Нанесение покрытий напылением. Теория, технология, оборудование. – М.: Металлургия, 1992. – 432 с.
5. Иванов А.В., Полянский М.Н., Ребров С.Г. Плазменно-кластерное нанесение тугоплавких покрытий // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2006. – № 8. – С. 464–465.
6. Способ нанесения покрытий: пат. Рос. Федерация № 2462536; заявл. 11.05.2011; опубл. 27.09.2012, Бюл. № 27. – 7 с.

7. Исследование покрытий и поверхностных слоев материалов методом спектрометрии ядерного обратного рассеяния протонов / О.В. Беспалова, А.М. Борисов, В.Г. Востриков, Е.А. Романовский, М.В. Серков // Ядерная физика. – 2009. – Т. 72. – С. 1721–1729.
8. Применение спектрометрии ЯОР протонов для исследования поверхностного слоя циркониевых сплавов / О.В. Беспалова, А.М. Борисов, В.Г. Востриков, С.В. Иванова, Е.А. Романовский, Н.В. Ткаченко // Физика и химия обработки материалов. – 2011. – № 1. – С. 45–50.
9. Исследование покрытий на циркониевом сплаве, полученных методом микродугового оксидирования, с использованием спектрометрии резерфордовского и ядерного обратного рассеяния / А.М. Борисов, В.Г. Востриков, С.В. Иванова, В.С. Куликаускас, Л.Н. Лесневский, М.А. Ляховецкий, Е.А. Романовский, Н.В. Ткаченко, В.Н. Тюрин // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2013. – № 5. – С. 42–46.
10. Фелдман Л., Майер Д. Основы анализа поверхности и тонких пленок. – М.: Мир, 1989. – 344 с.

Поступила 15.01.2014 г.

UDC 621.45.038.7

STUDYING THE STRUCTURE OF THERMAL BARRIER PLASMA COATING WITH NUCLEAR BACKSCATTERING SPECTROMETRY

Anatoliy M. Borisov,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technological University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail: anatoly_borisov@mail.ru

Vladimir G. Vostrikov,
Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University,
Russia, 119991, Moscow, Leninskie gory, 1, bdg. 2.
E-mail: vostrikov.vladimir@gmail.com

Evgeniy A. Romanovskiy,
Dr. Sc., Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow
State University, Russia, 119991, Moscow, Leninskie gory, 1, bdg. 2.
E-mail: besp@hep.sinp.msu.ru

Nikita V. Tkachenko,
Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University,
Russia, 119991, Moscow, Leninskie gory, 1, bdg. 2. E-mail: nicki_tkak@mail.ru

Svetlana V. Savushkina,
Keldysh Research Centre,
Russia, 125438, Moscow, Onezhskaya street, 8. E-mail: sveta_049@mail.ru

Mikhail N. Polyanskiy,
Cand. Sc., Keldysh Research Centre,
Russia, 125438, Moscow, Onezhskaya street, 8. E-mail: nanocentre@kerc.msk.ru

The work motivation is caused by the need to increase service life of aerospace components by developing the methods of thermal barrier coatings on structural materials
The main aim of the paper *is to study thermal barrier coating structures formed by plasma spraying of yttria-stabilized zirconia.*
The methods used in the study *is the nuclear backscattering spectrometry.*
The results: *Using the methods of nuclear backscattering spectrometry the authors have investigated the element composition, structure and thickness of plasma-sprayed yttria-stabilized zirconia coatings. The intermediate layer between coatings and base material was founded. The total porosity of the coatings, evaluated by comparison of mass- and geometric thicknesses, is 20...30 %. It was shown, that due to high speeds of low-pressure plasma spraying the mixed coatings can be formed in case of layer-by-layer deposition of nickel and yttria-stabilized zirconia powders. The total porosity tends to decrease with the increase number of layers. For the coating formed by plasma spraying through the mask with holes, the periodically changing coating thickness was determined.*

Key words:
Thermal barrier coating, low-pressure plasma spraying, nuclear backscattering spectrometry, yttria-stabilized zirconia, nanopatterning.

REFERENCES

1. *Gazotermicheskoe napylenie* [Gas-thermal deposition]. Ed. by L.Kh. Baldaev. Moscow, Market DS Publ., 2007. 344 p.
2. Krivobokov V.P., Sochugov N.S., Solovyev A.A. *Plazmennye pokrytiya (Svoystva i primenenie)* [Plasma coatings (properties and applications)]. Tomsk, TPU Publ., 2011. 136 p.
3. *Fizicheskie velichiny. Spravochnik* [Physical quantities. Handbook]. Ed. by I.S. Grigoryev. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 1232 p.
4. Kudinov V.V., Bobrov G.V. *Nanesenie pokrytiy napyleniem. Teoria, tekhnologia, oborudovanie* [Coating by deposition. Theory, technology, instalation]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1992. 432 p.
5. Ivanov A.V., Polyanskiy M.N., Rebrov S.G. Plasmenno-klasternoe nanesenie tugoplavkikh pokritiy [Plasma-cluster deposition of high-temperature coatings]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika*, 2006, no. 8, pp. 464–465.
6. Polyanskiy M.N., Savushkina S.V., Evdokimova T.A. *Sposob naneseniya pokrytiy* [Method of coating]. Patent RF, no. 2462536, 2012.
7. Bespalova O.V., Borisov A.M., Vostrikov V.G., Romanovskiy E.A., Serkov M.V. Issledovanie pokrytiy i poverkhnostnykh sloev materialov metodom spektrometrii yadernogo obratnogo rasseyaniya protonov [Analysis of coating sand diffusion layers by nuclear backscattering spectrometry]. *Yadernaya fizika*, 2009, vol. 72, pp. 1721–1729.
8. Bespalova O. V., Borisov A.M., Vostrikov V.G., Ivanova S.V., Romanovskiy E.A., Tkachenko N.V. Primenenie spektrometrii YAOR protonov dlya issledovaniya poverkhnostnogo sloya tsirkonievykh splavov [Application of NBS spectrometry for analyzing diffusion layers in zirconium]. *Fizika i khimiya obrabotki materialov*, 2011, no. 1, pp. 45–50.
9. Bespalova O.V., Borisov A.M., Vostrikov V.G., Ivanova S.V., Kulikauskas V.S., Lesnevkiy L.N., Lyakhovetskiy M.A., Romanovskiy E.A., Tkachenko N.V., Tyurin V.N. Issledovanie pokrytiy na tsirkonievom splave, poluchennykh metodom mikrodugovogo oksidirovaniya, s ispolzovaniem spektrometrii rezerfordovskogo i yadernogo obrarnogo rasseyaniya [Analysis of coatings on zirconium, formed by micro-arc oxidation, with Rutherford and nuclear backscattering spectrometry]. *Poverkhnost. Rentgenovskie, sinkhotronnye i neytronnye issledovania*, 2013, no. 5, pp. 42–46.
10. Feldman L., Mayer D. *Osnovy analiza poverkhnosti i tonkikh plenok* [Fundamentals of surface and thin film analysis]. Moscow, Mir Publ., 1989. 344 p.

УДК 621.785, 67.017, 67.02

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРОЧНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ СТАЛЕЙ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ИОННОМ И ЛАЗЕРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Борисов Анатолий Михайлович,
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ТОМПВЭ МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: anatoly_borisov@mail.ru

Крит Борис Львович,
д-р техн. наук, профессор МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Куликаускас Вацловас Станиславович,
канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института ядерной физики им. Д.В. Скобельцына МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 119991, ГСП-1,
г. Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2. E-mail: vaclav@anna19.sinp.msu.ru

Семенова Наталья Леонидовна,
канд. физ.-мат. наук, доцент физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1.
E-mail tompve-2005@yandex.ru

Суминов Игорь Вячеславович,
д-р техн. наук, профессор, МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail tompve-2005@yandex.ru

Тихонов Сергей Александрович,
ст. преподаватель МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail laser001@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью разработок и исследования новых методов модификации физико-механических свойств поверхности стальных деталей различных приборов и устройств.
***Цель работы**: исследование комбинированного воздействия ионных и лазерных пучков на физико-механические свойства поверхности конструкционных и инструментальных сталей.*
***Методы исследования:** спектрометрия резерфордовского обратного рассеяния, измерение микротвердости по Виккерсу, компьютерное моделирование взаимодействия ионов с твердым телом.*
***Результаты:** Экспериментально полученные данные говорят о перспективности комбинированной ионно-лазерной обработки сталей. Найдено, что обработка ионами титана и последующее лазерное термоупрочнение увеличивают микротвердость стали 45 и У8 до 6 раз. Оценены возможности предложенной аналитической методики определения основных параметров полиэнергетической ионной имплантации с использованием вакуумно-дугового ионного источника. Сравнивая результаты моделирования и спектрометрии резерфордовского обратного рассеяния, можно говорить о возможности использования модели для оптимизации процессов ионной имплантации.*

Ключевые слова:
Высокодозная ионная имплантация, лазерная термообработка, модификация поверхности, микротвердость.

Введение

Обработка материалов концентрированными потоками энергии позволяет в широком диапазоне изменять физико-химические свойства поверхности. Для модификации поверхности материалов интенсивно используются ионные и лазерные пучки. При ионной обработке, в частности ионной имплантации, поверхностные свойства материалов модифицируются в результате внедрения высокоэнергетических ионов, вызывающих изменение элементного состава (легирование) и структурно-фазового состояния приповерхностных слоев. С помощью ионной имплантации удается направленно изменять такие свойства материалов, как микротвердость, износостойкость, коррозионную стойкость, жаростойкость, а также фрикционные, оптические, магнитные, эмиссионные свойства и др.

Развитие лазерной техники вызвало широкое применение лазеров для обработки материалов. Одним из перспективных направлений лазерной технологии с точки зрения модификации свойств материалов является поверхностное лазерное упрочнение, при котором направленно изменяется структурно-фазовое состояние приповерхностных слоев путем импульсной термообработки. Перспективность такой технологии обусловлена возможностью создания различных новых поверхностных структур с улучшенными физико-химическими и механическими свойствами в достаточно толстых слоях при использовании относительно простого оборудования.

Анализ различных технологических процессов показал, что эффективность лазерных методов обработки могла быть значительно увеличена за счет создания лазерных комбинированных методов, основанных на объединении лазерных источников с другими источниками энергетического воздействия на материалы.

При ионной обработке конструкционных материалов существенное изменение свойств происходит при достижении концентрации примесей, по плотности сравнимой с плотностью твердого тела. Для этого необходимые дозы облучения составляют порядка 10^{16}–10^{18} ион/см^2 (диапазон высоких доз). Для высокодозной ионной имплантации (ВИИ) используют ионы с энергией, при которой их пробег в материале превышает толщину распыленного слоя. При энергии ионов $\approx 10^4$–10^6 эВ глубина залегания ионов составляет 0,1–1мкм [1, 2].

Высокодозную ионную имплантацию можно рассматривать как сложное химическое, термическое и механическое воздействие на материалы. ВИИ обладает рядом преимуществ перед другими способами обработки материалов (например, напылением).

В настоящее время интенсивно развиваются работы по модификации свойств конструкционных материалов ионно-плазменными потоками, позволяющими изменять физико-механические, электрофизические, электрохимические свойства поверхностного слоя материалов и изделий из них [2]. В этих работах снижаются требования к моноэнергетичности и чистоте ионного пучка при необходимости повышения производительности (дозы обработки 10^{16}–10^{18} см$^{-2}$) и площади обрабатываемых изделий (соответственно, ионного пучка) до 10^2–10^3 см^2.

Высокую производительность имеют бессепарационные технологические имплантеры с вакуумно-дуговыми импульсными ионными источниками металлов типа MEVVA (**me**tal **v**apor **v**acuum **a**rc), при этом данные источники имеют сложный состав ионного пучка как по зарядности ионов, так и их энергиям [2, 3]. Энергия однозарядных ионов определяется ускоряющим напряжением, энергии многозарядных ионов являются кратными энергии однозарядных, следовательно, данная ионная имплантация является полиэнергетической.

Настоящая работа посвящена изучению комплексного воздействия на микротвердость поверхности конструкционных и инструментальных сталей полиэнергетических пучков ионов металлов, получаемых с помощью вакуумно-дугового источника, и лазерного термоупрочнения.

Методика эксперимента

Устройство используемого в работе бессепарационного имплантера с импульсным вакуумно-дуговым ионным источником иллюстрирует схема, представленная на рис. 1.

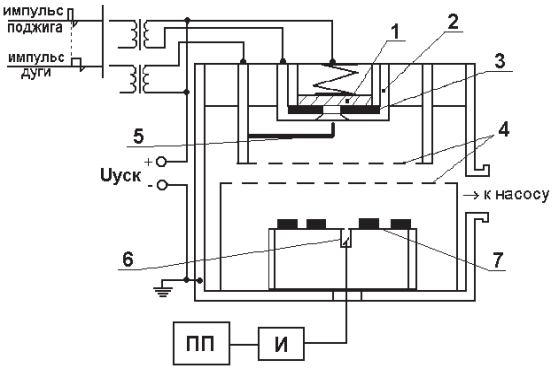


Рис. 1. *Схема установки имплантации с импульсным вакуумно-дуговым ионным источником [4]*

Поджиг дуги инициируется электрическим пробоем кольцевого керамического изолятора – *3* между сменным водоохлаждаемым катодом – *1* диаметром 10 мм и поджигающим электродом – *2*. Дуговой разряд поддерживается импульсным источником питания, обеспечивающим в течение 300 мкс ток дуги около 300 А. Ускорение ионов материала катода, генерируемых вакуумной дугой, происходит в электростатическом поле между вольфрамовыми сетками ионно-оптической системы – *4*. Применение стержневой анодной вставки – *5* позволяет более чем в 3 раза увеличить ток извлекаемых ионов за счет изменения индикатрисы выхода ионов из катода. Дозиметрия ионного облучения образцов, устанавливаемых на предметный столик – 7, производится с помощью цилиндра Фарадея – *6* и интегратора тока (И). Интегратор тока преобразует заряд, прошедший через цилиндр Фарадея, в частоту следования импульсов, суммируемых затем пересчетным прибором (ПП). Имплантер позволяет получать широко апертурные круглого сечения (диаметр выходной апертуры 30 см) пучки ионов металлов с током 0,1–1 А, длительностью импульсов ~300 мкс, частотой следования импульсов до 50 Гц. Максимальное значение ускоряющего напряжения $U_{уск}$=50 кВ.

Условия облучения образцов конструкционных сталей (Ст. 45, 40Х13, У8) и графита, выбранного в качестве образца, – свидетеля полиэнергетической ионной имплантации – представлены в табл. 1.

Элементный состав имплантированного слоя определяли с помощью спектрометрии резерфор-

довского обратного рассеяния пучка ионов гелия энергии 2 МэВ, получаемого на электростатическом ускорителе НИИЯФ МГУ, по методике аналогичной работе [4, 5].

Лазерную обработку проводили на серийной установке лазерного термоупрочнения «Квант-18» с плотностью мощности лазерного излучения, при которой сохранялась микрогеометрия поверхности и не происходило её оплавления ~$2 \cdot 10^5$ Вт/см^2, длительность импульсов 8 мс, коэффициент перекрытия импульсов 0,7.

Микротвердость по Виккерсу измеряли на универсальном измерительном комплексе «METALPLAN» фирмы LEITZ при нагрузках на индентор от 50 до 100 г.

Результаты и их обсуждение

Полученные в настоящей работе экспериментальные данные полиэнергетической высокодозной имплантации (табл. 1) рассматривали в рамках аналитической модели высокодозной ионной имплантации, в которой учитывается только один доминирующий фактор – распыление мишени ионной бомбардировкой [5].

При полиэнергетической имплантации, когда энергия ионов определяется их зарядом q=1,2,3,.., парциальные концентрационные профили ионов в мишени $N_q(x)$ могут быть описаны в виде:

$$N_q(x) = \frac{N_o n_q}{2S}\left[erf\left(\frac{x + \frac{F}{N_o}S - R_q}{\sqrt{2}\Delta R_q}\right) - erf\left(\frac{x - R_q}{\sqrt{2}\Delta R_q}\right)\right],$$

где N_0 – концентрация атомов мишени; n_q – относительная концентрация ионов с зарядом q в пучке; R_q и ΔR_q – соответственно проективный пробег и среднеквадратичный разброс проективного пробега ионов с зарядом q; F – флюенс имплантации. Коэффициент распыления при полиэнергетическом ионном облучении:

$$S = \sum_{q=1}^{n} S_q n_q,$$

где S_q – коэффициент распыления мишени ионами с зарядом q. Значения S_q рассчитывали с помощью программ SRIM.

Суммарный концентрационный профиль имплантированных атомов:

$$N(x) = \sum_{q=1}^{n} N_q(x).$$

Интегральная доза имплантации:

$$D_p = \int D(x)dx.$$

Пример расчетов парциальных и суммарного концентрационных профилей приведен на рис. 2, 3. Суммарный концентрационный профиль существенно определяется зарядовым составом ионного пучка (рис. 2).

Таблица 1. *Параметры ионной имплантации и результаты спектрометрии резерфордовского обратного рассеяния при имплантации ионов в графит*

Катод	Концентрация ионов в пучке, q=1+, 2+, 3+, 4+, 5+, %	$q_{ср}$	$U_{уск}$, кВ	F, 10^{17} ион·см$^{-2}$	Результаты спектрометрии РОР и моделирования		
					$D_{РОР}$, 10^{17} атом·см$^{-2}$	S	$D_{расч}$, 10^{17} атом·см$^{-2}$
Ti	11, 75, 14	2,1	35	6,0	1,7	1,55	3,0
Al	38, 51, 11	1,7	35	0,4	0,73	0,67	0,4
Nb	1, 24, 51, 22, 2	3,0	35	3,0	0,39	3,24	1,34
Cu	16, 63, 20,1	2,0	35	0,6	0,6	0,99	0,59
Cr	10, 68, 21, 1	2,1	35	4,2	2,5	1,75	3,0
Pb	36, 64	1,6	20	0,3	0,2	3,07	0,24

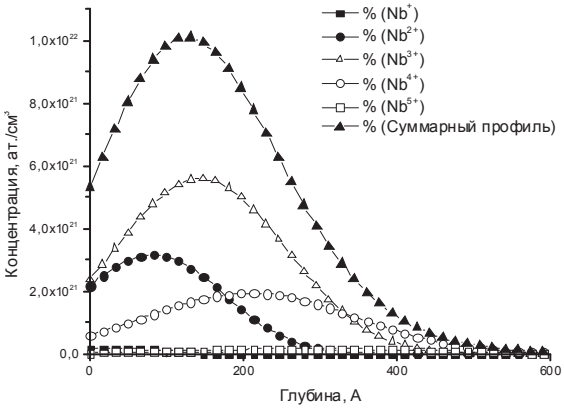


Рис. 2. *Парциальные и суммарный концентрационные профили ниобия, имплантированного в сталь 40Х13 при флюенсе облучения F=3 10^{17} см$^{-2}$*

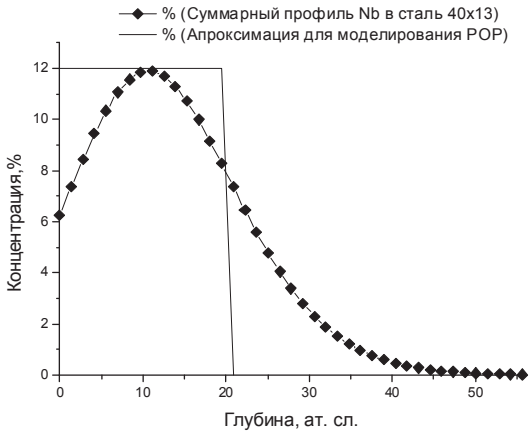


Рис. 3. *Суммарный профиль Nb в стали 40Х13 и его аппроксимация для моделирования РОР*

Анализ спектров РОР при флюенсе облучения свыше 10^{17} см$^{-2}$ выявил наличие примесей, имплантированных в образцы. Выявленные примеси (не более 5 % от имплантированного элемента), такие как вольфрам, молибден, алюминий, являются элементами ионного источника. При ионной

имплантации титаном также обнаружен и кислород, атомная концентрация которого сопоставима с концентрацией имплантированного титана, что говорит о возможном образовании на поверхности образца оксидов титана типа TiO и Ti_2O_3.

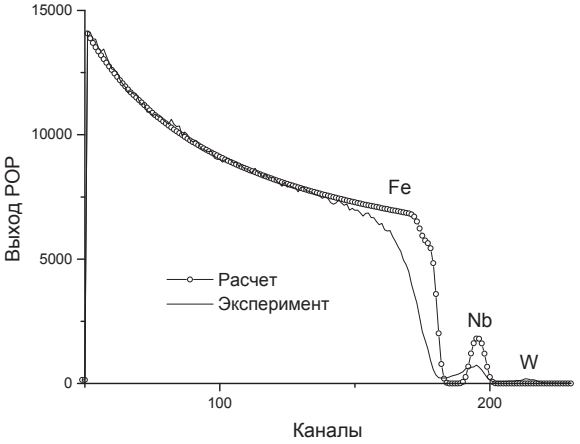


Рис. 4. *Сравнение расчетного и экспериментального спектров РОР для Nb, имплантированного в сталь 4Х13*

Некоторые расхождения формы пиков для Nb, имплантированного в сталь 40Х13 (рис. 4), могут быть также связаны с выбранной аппроксимацией его расчетного профиля (рис. 3).

Так как на концентрационный профиль имплантированного элемента оказывает существенное влияние зарядность ионов, определяющая пробег ионов в материале и распыление поверхности, а также их парциальный состав в пучке, от которого зависит общий профиль, то результаты расхождения моделирования полиэнергетической ионной имплантации с экспериментом (табл. 1) могут быть связаны со следующими факторами:

1. Различие использованных данных работы [3] по зарядовому составу n_q ионных пучков, генерируемых вакуумно-дуговыми ионными источниками типа MEVVA (табл. 1) с соответствующим составом для ионного источника имплантера.
2. Концентрация внедренного элемента зависит от коэффициента распыления S, который является функцией зарядности ионов q. Величина проективного пробега, в свою очередь, зависит от энергии ионов, представляющей собой произведение зарядности q и ускоряющего напряжения $U_{уск}$. Таким образом, из-за указанного несоответствия данных по зарядности неизвестно, какое влияние на расхождение расчетного и экспериментального спектров РОР было больше: коэффициента распыления или проективного пробега.
3. В данной модели использовались значения проективных пробегов, страгглингов и коэффициентов распыления, рассчитанные с помощью программы SRIM. Эта программа моделирует распыление в режиме линейных каскадов. В нашем случае имплантируются тяжелые ионы и, следовательно, возможен режим тепловых пиков, который в программе SRIM не учитывается.
4. Наличие примесей также может оказывать влияние на концентрационный профиль имплантированной примеси, т. к. при моделировании процесса имплантации наличие примеси не учитывается в расчетах.

В табл. 2 приведены результаты измерения микротвердости при нагрузке на индентор 50 г и параметры ионной имплантации для сталей 40Х13, ст. 45, У8.

Таблица 2. *Параметры ионной имплантации и микротвердость сталей*

№	Ион	Ускоряющее напряжение, кВ	Флюенс облучения, ион/см^2	Время облучения, мин	Микротвердость, Hv		
					40Х13	Сталь 45	У8
1	Исходный материал				301±4	105±4	104±3
2	Cu	35	$5{,}8\cdot10^{16}$	110	380±5	126±3	151±3
3	Pb	20	$3\cdot10^{16}$	52	393±6	113±3	154±6
4	A	35	$4\cdot10^{16}$	70	389±5	123±5	129±4
5	Ti	35	$2\cdot10^{17}$	135	537±10	159±6	183±5
6	Nb	35	$3\cdot10^{17}$	162	546±9	158±5	175±6

Рассчитанная с помощью программы SRIM глубина пробега ионов в стали не превышает 0,1 мкм, а глубина вдавливания индентора составляет единицы микрометров. Эффект увеличения микротвердости в таких случаях обычно связывают с эффектами дальнодействия ионной имплантации [6].

Одним из механизмов таких эффектов считают радиационно-стимулированную диффузию точечных дефектов и образования дислокационных петель, которые вызывают искажение решетки и упрочняют материал [1, 6]. Поток междоузельных атомов вглубь образца может вызвать переползание дислокаций. Таким образом, радиационные дефекты и упругие напряжения могут проникать на значительно большие глубины, чем пробег ионов, оказывая существенное влияние на свойства поверхностного слоев.

Выявлено, что значительное увеличение микротвердости поверхности наблюдается при ионной бомбардировке ионами титана и ниобия.

После ионной имплантации на установке «Квант-18» проводили лазерное термоупрочнение образцов из конструкционных и инструментальных сталей. Результаты измерения микротвердости представлены на рис. 5.

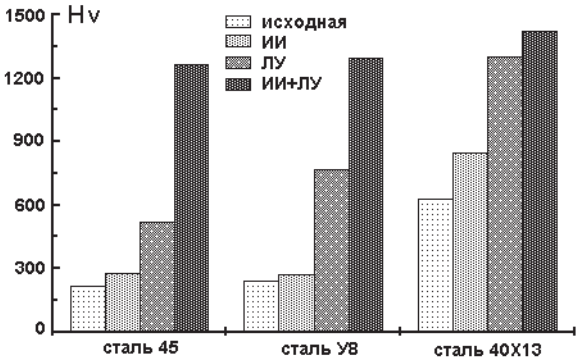


Рис. 5. *Влияние ионной имплантации титана и лазерной обработки на микротвердость сталей 45, У8, 40Х13*

Резкое увеличение микротвердости сталей при комбинированном ионно-лазерном воздействии можно объяснить влиянием радиационных дефектов, образованных ионами, и внедренной примеси на последующее формирование структуры закалки при лазерном термоупрочнении, изменением микроструктуры поверхности и, в частности, повышением дисперсности мартенсита.

Выводы

1. С использованием спектрометрии резерфордовского обратного рассеяния имплантированных образцов оценены возможности аналитической методики определения основных параметров полиэнергетической ионной имплантации с использованием вакуумно-дугового ионного источника.
2. Проведены исследования влияния ионной имплантации на упрочнение поверхности конструкционных и инструментальных сталей. Установлено, что ионная имплантация увеличивает микротвердость поверхности сталей на 20...80 % в зависимости от сорта ионов. Наилучшие результаты повышения микротвердости сталей У8, 45 и 40Х13 в 1,5–1,8 раз дала обработка ионами титана и ниобия при флюенсах облучения ~10^{17} $см^{-2}$.
3. Проведены исследования влияния лазерной термообработки на микротвердость сталей. Полученные результаты говорят об увеличении микротвердости поверхности сталей У8, 45 и 20Х13 в 1,3–2,5 раза.
4. Полученные результаты говорят о перспективности комбинированной ионно-лазерной обработки сталей. Найдено, что обработка ионами титана и последующее лазерное термоупрочнение увеличивают микротвердость стали 45 и У8 до 6 раз, а предварительно закаленной термически стали 40Х13 – более чем в 2 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комаров Ф.Ф. Ионная имплантация в металлы. – М.: Металлургия, 1990. – 216 с.
2. Быковский Ю.А., Неволин В.Н., Фоминский В.Ю. Ионная и лазерная имплантация металлических материалов. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 240 с.
3. Физика и технология источников ионов / под ред. Я. Брауна. – М.: Мир, 1998. – 496 с.
4. Особенности импульсной полиэнергетической ионной имплантации / А.М. Борисов, Б.Л. Крит, С.А. Тихонов, И.В. Суминов, В.Г. Сухарев, В.С. Куликаускас // Известия РАН. Серия физическая. – 2000. – Т. 64. – № 4. – С. 737–740.
5. Особенности ионной имплантации с использованием вакуумно-дугового ионного источника / А.М. Борисов, Н.В. Бородулина, Б.Л. Крит, С.А. Тихонов // Прикладная физика. – 2004. – № 1. – С. 89–93.
6. Эффекты дальнодействия в ионно-имплантированных металлических материалах / А.Н. Диденко, Ю.П. Шаркеев, Э.В. Козлов, А.И. Рябчиков. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 328 с.

Поступила 15.01.2014 г.

UDC 621.785, 67.017, 67.02

THE STUDY OF STEEL SURFACE HARDENING AT COMBINED ION AND LASER IRRADIATION

Anatoliy M. Borisov,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technologic University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail: anatoly_borisov@mail.ru

Boris L. Krit,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technologic University, Russia, 109383, Moscow,
Polbin street, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Vatslovas St. Kulikauskas,
Cand. Sc., Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State
University, Russia, 119991, Moscow, Leninskie gory, 1, bdg. 2.
E-mail: vaclav@anna19.sinp.msu.ru

Natalya L. Semenova,
Cand. Sc., Lomonosov Moscow State University,
Russia, 119991, Moscow, Leninskie gory, 1. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Igor V. Suminov,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technological University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Sergey A. Tikhonov,
MATI – Russian State Technological University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail laser001@yandex.ru

The motivation of the work is caused by the need to develop and to research new methods for modifying physical and mechanical properties of steel details surface for various units and devices.
The main aim of the study *is the investigation of the combined ion and laser beams action for physical and mechanical properties of the constructional and tool steels surfaces.*
The methods used in the study*: Rutherford backscattering spectrometry, Vickers microhardness testing, computer simulation of ions and solid state interaction.*
The results*: The experimental data show the perceptivities of surface properties modification by combined ion and laser beam irradiation. In particular, it has been found that the titanium ion treatment and laser hardening result in microhardness enhancement of 45 and U8 steels up to 6 times. The authors have evaluated the possibility of the proposed analytical methodology for determining the basic parameters polyenergetic ion implantation using a vacuum arc ion source. Comparing the results of modeling and spectroscopy rutherford backscattering spectrometry, it is possible to talk about the opportunity of using the model to optimize the processes of ion implantation.*

Key words:
High-dose ion implantation, laser thermal treatment, surface modification, microhardness.

REFERENCES

1. Komarov F.F. *Ionnaya implantatsiya v metally* [Ion implantation into metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1990. 216 p.
2. Bikovskiy U.A., Nevolin V.N. *Fominskiy V.U. Ionnaya i lazernaya implantatsiya metallicheskikh materialov* [Ion and laser implantation of metallic materials]. Moscow. Energoatomizdat Publ., 1991. 240 p.
3. *Fizika i tekhnologiya istochnikov ionov* [Physics and technology of ion sources]. Ed. by Ya. Broun. Moscow, Mir Publ., 1998. 496 p.
4. Borisov A.M., Krit B.L., Tikhonov S.A., Suminov I.V., Kulikauskas V.S., Sukharev V.G. Osobennosti impulsnoy polienergeticheskoy ionnoy implantatsii [Features of polyenergetic pulsed ion implantation]. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 737–740.
5. Borisov A.M., Borodulina N.V., Krit B.L., Tikhonov S.A. Osobennosti ionnoy implantatsii s ispolzovaniem vakuumno-dugovogo ionnogo istochnika [Properties of ion implantation using a vacuum arc ion source]. *J. Applied Physics*, 2004, no. 1, pp. 89–93.
6. Didenko A.N. Sharkeev U.P., Kozlov E.V. Ryabchikov A.I. *Effekty dalnodeystviya v ionno-implantipovannykh metallicheskikh materialakh* [Long-range effects in ion-implanted metallic materials]. Tomsk, Publishing NTL, 2004. 328 p.

УДК 620.197: 621.794

ВЛИЯНИЕ СОСТАВА ЭЛЕКТРОЛИТА НА СВОЙСТВА СПЛАВА МА2–1 ПРИ МИКРОДУГОВОМ ОКСИДИРОВАНИИ

Владимиров Борис Владимирович,
аспирант МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: 9674025@mail.ru

Крит Борис Львович,
д-р техн. наук, профессор МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Людин Валерий Борисович,
д-р техн. наук, профессор Российского государственного аграрного заочного университета, Россия, 143900, г. Балашиха, ул. Юлиуса Фучика, д. 1. E-mail: ludin-nine@yandex.ru

Морозова Наталья Владиславовна,
канд. пед. наук, доцент Российской медицинской академии последипломного образования,
Россия, 123995, г. Москва, ул. Баррикадная, д. 2/1. E-mail: innat.m@mail.ru

Суминов Игорь Вячеславович,
д-р техн. наук, профессор МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Эпельфельд Андрей Валериевич,
д-р техн. наук, профессор МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К.Э. Циолковского,
Россия, 109383, Москва, ул. Полбина, 45. E-mail: apelfeld@yandex.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью создания лёгких биомедицинских сплавов, обладающих контролируемой (требуемой) скоростью коррозии.
***Цель работы**: исследование влияния состава электролита для микродугового оксидирования сплава МА2–1 на максимальную продолжительность «бездефектной» обработки, а также толщину, сквозную пористость и коррозионно-защитную способность модифицированного слоя.*
***Методы исследования:** плазменно-электролитическое микродуговое оксидирование. Определение сквозной пористости путём измерения электрического сопротивления двухэлектродной электрохимической ячейки, одним из электродов которой является испытуемый образец. Неразрушающий контроль толщины модифицированного слоя с использованием вихретокового толщиномера ВТ-201. Потенциодинамические поляризационные измерения в 3 % растворе NaCl со скоростью развертки 1 мВ/с по трехэлектродной схеме с использованием потенциостата ЕР-20А.*
***Результаты:** Выявлено наличие зависимости между технологическими факторами процесса микродугового оксидирования (максимальная продолжительность «бездефектной» обработки и состав электролита) и коррозионно-защитной способностью сформированных покрытий.*

Ключевые слова:
Сплавы магния, модифицирование, микродуговое оксидирование, технологические факторы, коррозия.

Введение

Среди используемых в различных отраслях современной промышленности металлических материалов магниевые сплавы представляют повышенный интерес, который обусловлен их особыми свойствами:

- низкая плотность (1,35–1,85 г/см^3), что в 1,5–2 раза меньше, чем у алюминиевых сплавов, в 4–5 раз меньше, чем у сталей, и не превышает плотности наиболее часто используемых сегодня высокопрочных конструкционных пластмасс;
- хорошие механические, конструкционные и служебные свойства в интервале температур от –273 до +350 °С, прежде всего высокие показатели удельной прочности и жесткости;

- высокая способность поглощать энергию удара и уменьшать вибрацию, высокие демпфирующие свойства (по данному показателю превосходство перед алюминиевыми сплавами в 100 раз);
- хорошее электромагнитное и противошумовое экранирование, высокие теплопроводность и теплоемкость;
- стабильность размеров при длительных эксплуатации и хранении;
- хорошие технологические свойства при обработке резанием, литье (прежде всего, при литье под высоким давлением на машинах с холодной и горячей камерами прессования) и горячей обработке давлением;
- отсутствие эффекта «старения» (охрупчивания) в отличие от конструкционных пластмасс, которые магниевые сплавы могут адекватно заменить, обеспечив при этом ряд эксплуатационных и технологических преимуществ [1].

Особое место занимают биомедицинские сплавы на магниевой основе, поскольку, помимо перечисленных достоинств, магний нетоксичен, биологически и механически совместим с костными и мышечными тканями. Магний – четвертый по численности катион в человеческом организме, участвует во многих метаболических процессах. В качестве примера можно привести использование ортопедических и сосудистых имплантантов, хирургических имплантантов для внутренней фиксации, а также использование инвазивных устройств, содержащих требуемые фармацевтические препараты и обеспечивающих их адресную эмиссию в организме [2].

Вместе с тем главной отрицательной чертой, существенно ограничивающей распространение сплавов на основе магния, является их высокая химическая активность и, как следствие, низкая сопротивляемость коррозионному разрушению. При этом проблема биомедицинских сплавов на основе магния состоит даже не столько в недостаточно высоком уровне их коррозионной стойкости вообще и в плазме человеческого тела – в частности, а в неконтролируемости процесса их растворения. Решением проблемы может служить разработка изделий с требуемой скоростью коррозии. Это может быть достигнуто в том числе модифицированием поверхности магниевых сплавов.

Для этих целей все шире применяется метод микродугового оксидирования (МДО), благодаря которому возможно осуществлять синтез на поверхности изделий из магниевых сплавов нанокерамических слоев, обладающих высокой прочностью сцепления с основой и контролируемой коррозионно-защитной способностью [3].

Материалы и методы

Образцы, использованные для проведения исследования, имели размеры 7×30×40 мм и были изготовлены из плиты деформируемого магниевого сплава МА2–1 (табл. 1). Подготовку поверхности образцов производили механическим путём: шлифовкой абразивом SiC на бумажной основе зернистостью 500.

Таблица 1. *Элементный состав сплава МА2–1*

Марка	Система	Элементный состав в %				
		Mg	Al	Zn	Mn	примеси
МА2–1	Mg-Al-Zn-Mn	92,7–95,0	3,8–5,0	0,3–0,7	0,8–1,5	>0,1

Схема установки для микродугового оксидирования, использованной в работе, представлена на рис. 1. Основными элементами установки являются технологический источник тока (ТИТ) и ванна с системами охлаждения и перемешивания электролита.

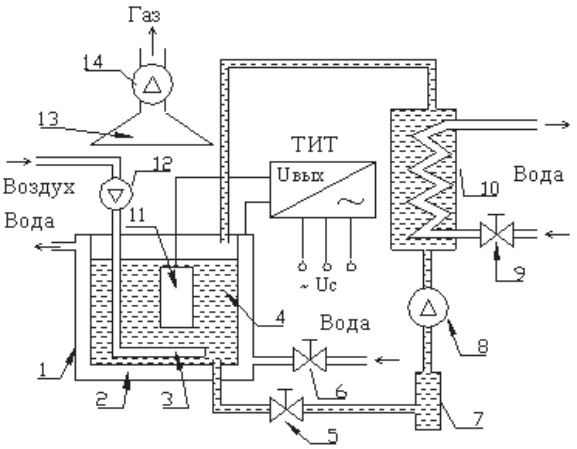


Рис. 1. *Функциональная схема установок МДО: 1 – электролитная ванна; 2 – рубашка водяного охлаждения; 3 – барботер; 4 – электролит; 5, 6, 9 – запорная арматура; 7 – фильтр; 8 – водяной насос; 10 – бак с теплообменником; 11 – деталь; 12 – воздушный компрессор; 13 – вытяжной зонтик; 14 – вытяжной вентилятор*

В качестве компонентов электролита использовали жидкое стекло (силикат натрия) (его концентрацию $C_{жс}$ изменяли в пределах от 3 до 9 мл/л) и гидроксид калия ($C_{кон}$ – от 2 до 8 г/л).

Для проведения измерений толщины, сквозной пористости модифицированного поверхностного слоя и скорости коррозии применяли нижеследующее оборудование и методики исследования.

Толщиномер ВТ-201, предназначенный для быстрого, точного и неразрушающего измерения толщины неметаллических покрытий, нанесенных на металлическое немагнитное основание. Принцип работы прибора основан на использовании физических свойств вихревых токов. Калибровку производили путём преобразования с помощью микропроцессора значения толщины эталонного покрытия в электрический сигнал и измерения соответствующей ему амплитуды. При тестировании измеряемых объектов прибор обеспечивал обратное преобразование полученных сигналов в число, равное значению толщины покрытия, выраженному в микрометрах.

Схема устройства для измерения сквозной пористости представлена на рис. 2. Тестируемый образец помещали в электролит, находящийся в цилиндрической электролитической ячейке, выполненной из нержавеющей стали и являющейся противоэлектродом. Электролитическая ячейка термостатируется при помощи лабораторного термостата ТЖ-ТС-01. Для измерения сопротивления применяется универсальный автоматический R-C-L измеритель Е 7–8. В измерительной цепи этого прибора используется переменный ток частотой 1000 Гц, что практически устраняет влияние поляризационных процессов на результаты измерений. Более подробно данная методика описана в монографии [4].

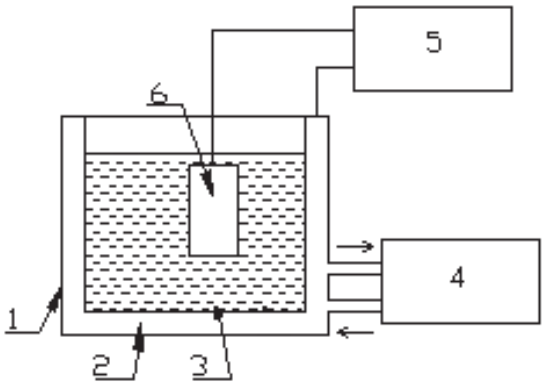


Рис. 2. *Схема устройства для измерения сквозной пористости: 1 – измерительная ванна из нерж. стали; 2 – рубашка; 3 – электролит 0,4 % NaCl; 4 – водяной термостат; 5 – R-C-L измеритель; 6 – образец*

О кинетике электрохимической коррозии можно судить по зависимости между смещением потенциала электрода и плотностью протекающего через электрод тока. Подобная зависимость, выраженная графически, называется поляризационной кривой.

Поляризационные кривые дают не только ценные сведения о характере коррозионного процесса, но в ряде случаев позволяют количественно рассчитывать его абсолютную скорость по плотности протекающего в цепи тока.

Снятие поляризационных кривых производится в 3 % растворе NaCl с использованием трёхэлектродной электролитической ячейки (рис. 3). Ячейка состоит из рабочего электрода, электрода сравнения, относительно которого измеряется потенциал рабочего электрода, и вспомогательного поляризующего платинового электрода, образующего с рабочим электродом цепь, через которую пропускают ток поляризации. В качестве измерительного оборудования применялся потенциостат ЕР-20А предназначеный для поляризационных измерений потенциостатическим и потенциодинамическим методом. Основной его функцией является поддержание потенциала исследуемого электрода на заданном уровне и его развертка (изменение) по заданной программе. В качестве программатора потенциала используется универсальный сканер потенциала EG-20.

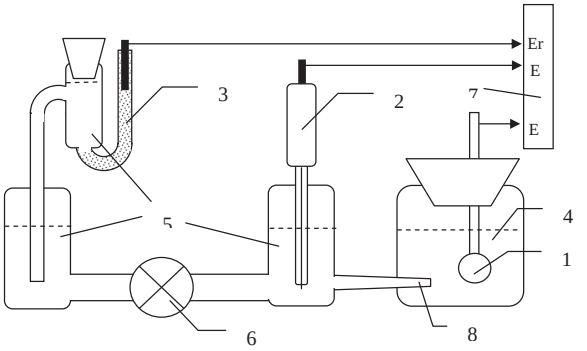


Рис. 3. *Трёхэлектродная электролитическая ячейка: 1 – рабочий электрод (образец), 2 – вспомогательный платиновый электрод, 3 – хлорсеребряный электрод сравнения, 4 – коррозионная среда (3 % раствор NaCl), 5 – насыщенный раствор KCl, 6 – электролитический ключ, 7 – потенциостат, 8 – капилляр Луггина*

Результаты и обсуждение

В работе представлены данные, относящиеся к изучению влияния МДО-обработки в силикатно-щелочном электролите для анодно-катодного (50 Гц) режима при равенстве анодного и катодного токов и их суммарной плотности 11 А/дм^2 на свойства образцов из магниевого сплава МА2–1. Варьировали содержание в электролите жидкого стекла (силиката натрия) $C_{жс}$ в пределах от 3 до 9 мл/л и гидроксида калия $C_{кон}$ – от 2 до 8 г/л.

В процессе проведения исследований было подтверждено наличие резкого спада анодного напряжения в течение МДО Mg сплава [4]. Спад сопровождается угасанием микродугового разряда и растравливанием сформированного оксидного слоя, что делает его абсолютно непригодным для практической реализации. По результатам исследований было определено влияние состава электролита в указанных пределах на максимальную продолжительность «бездефектной» МДО-обработки сплава МА2–1 (табл. 2, рис. 4). Наибольшее значение максимальной продолжительности (54 мин) наблюдали при $C_{кон}$=2 г/л и $C_{жс}$=3 мл/л, а наименьшее (6 мин) – при $C_{кон}$=4 г/л и $C_{жс}$=9 мл/л.

Таблица 2. *Сводные данные эксперимента*

Концентрация КОН, г/л	Концентрация жидкого стекла, мл/л	Максимальная продолжительность МДО, мин	Толщина МДО покрытий, мкм	Сквозная пористость покрытий, %	Плотность тока коррозии, А/м^2
2	3	54	27	3,4	0,025
4	3	34	32	8,3	0,0303
6	3	48	54	13,9	0,0331
8	3	39	31	14,2	0,1016
2	6	14	10	32,3	0,3981
4	6	40	54	8,8	0,0101
6	6	30	37	15,8	0,0653
8	6	31	41	16,2	0,0619
2	9	14	12	32,0	0,3398
4	9	6	13	52,1	0,4048
6	9	36	38	12,6	0,0512
8	9	25	35	17,2	0,0701

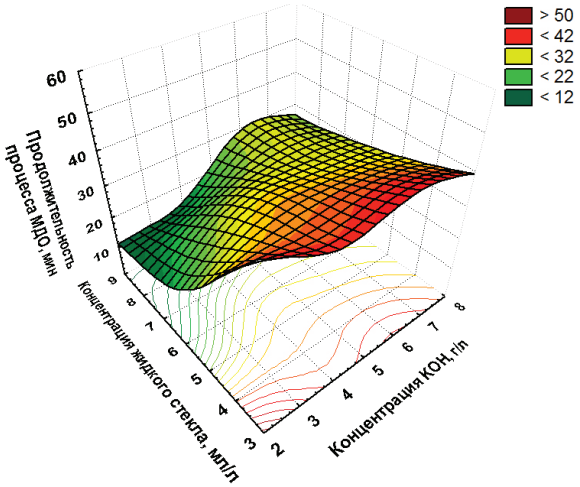


Рис. 4. *Влияние состава электролита на максимальную продолжительность «бездефектной» МДО-обработки сплава МА2–1*

Методом неразрушающего контроля с помощью вихретокового толщиномера ВТ-201 были измерены толщины сформированных МДО-покрытий. Анализируя результаты (табл. 2, рис. 5), можно отметить, что самые тонкие оксидные слои (10…27 мкм) формировались в электролитах, содержащих 2 г/л КОН. Интересным фактом является весьма небольшая (27 мкм) толщина оксидного слоя, полученного при $C_{кон}$=2 г/л и $C_{жс}$=3 мл/л, т. е. там, где наблюдалась максимальная продолжительность «бездефектной» МДО-обработки. Причиной этого является, скорее всего, низкое содержание в электролите силиката, который обычно инкорпорируется в оксидный слой, например в виде кварца SiO_2 и/или форстерита Mg_2SiO_4, увеличивая его толщину. При $C_{кон}$=4 г/л и $C_{жс}$=6 мл/л наблюдался максимум значения толщины МДО-покрытий (54 мкм).

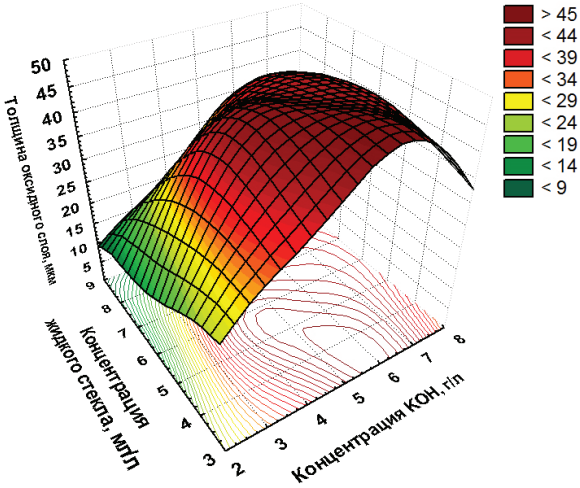


Рис. 5. *Влияние состава электролита на толщину сформированных МДО-покрытий*

Сквозную пористость МДО-покрытий определяли по методике, подробно описанной в монографии [4]. Анализ полученных данных показал (табл. 2, рис. 6), что с увеличением концентрации компонентов электролита, особенно жидкого стекла, величина пористости возрастает с 3,4 % ($C_{кон}$=2 г/л, $C_{жс}$=3 мл/л) до 52,1 % ($C_{кон}$=4 г/л, $C_{жс}$=9 мл/л).

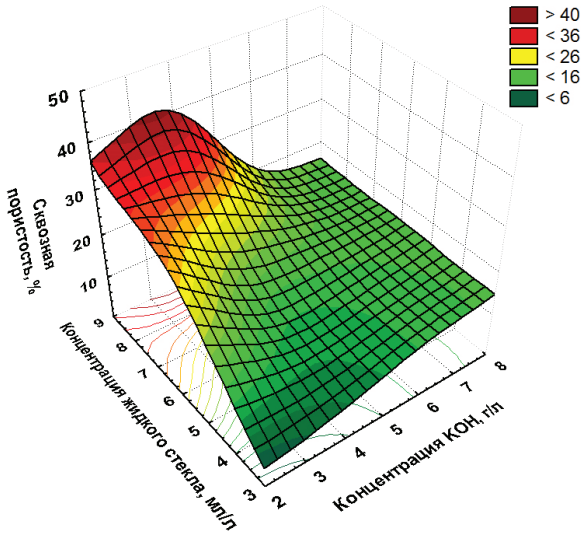


Рис. 6. *Влияние состава электролита на сквозную пористость сформированных МДО-покрытий*

Для оценки влияния МДО-модифицирования на коррозионно-электрохимическое поведение сплава МА2–1 были проведены потенциодинамические поляризационные измерения в 3 % растворе NaCl со скоростью развертки 1 мВ/с по трехэлектродной схеме (рабочий электрод – образец, хлорсеребряный электрод сравнения и вспомогательный поляризующий платиновый электрод) [5]. Типичные зависимости логарифм (десятичный) плотности тока – потенциал (хлорсеребряный электрод) в виде поляризационных кривых представлены на рис. 7.

По полученным поляризационным кривым определяли плотность тока коррозии ***i*** (А/м^2). Проведенные исследования показали (табл. 2), что минимальная плотность тока коррозии (0,0101 А/м^2) наблюдалась при $C_{кон}$=4 г/л и $C_{жс}$=6 мл/л, т. е. для МДО-покрытия с максимальной толщиной, а максимальная (0,4048 А/м^2) – при $C_{кон}$=4 г/л и $C_{жс}$=9 мл/л, т. е. для покрытия с максимальной сквозной пористостью. Для сравнения – плотность тока коррозии для образца сплава МА2–1 без покрытия составляла 0,8 А/м^2.

Основываясь на анализе экспериментальных данных и имеющемся опыте МДО-модифицирования вентильных металлов [3, 4], нами была предложена и опробована двухстадийная обработка. При двухстадийной обработке образцы сначала оксидировали в электролите, содержащем 2 г/л гидроксида калия и 3 мл/л жидкого стекла, в течение 54 мин, а затем в электролите, содержащем 4 г/л гидроксида калия и 6 мл/л жидкого стекла, в течение 40 мин. В результате было сформировано МДО-покрытие толщиной 63 мкм с пористостью 4,2 %.

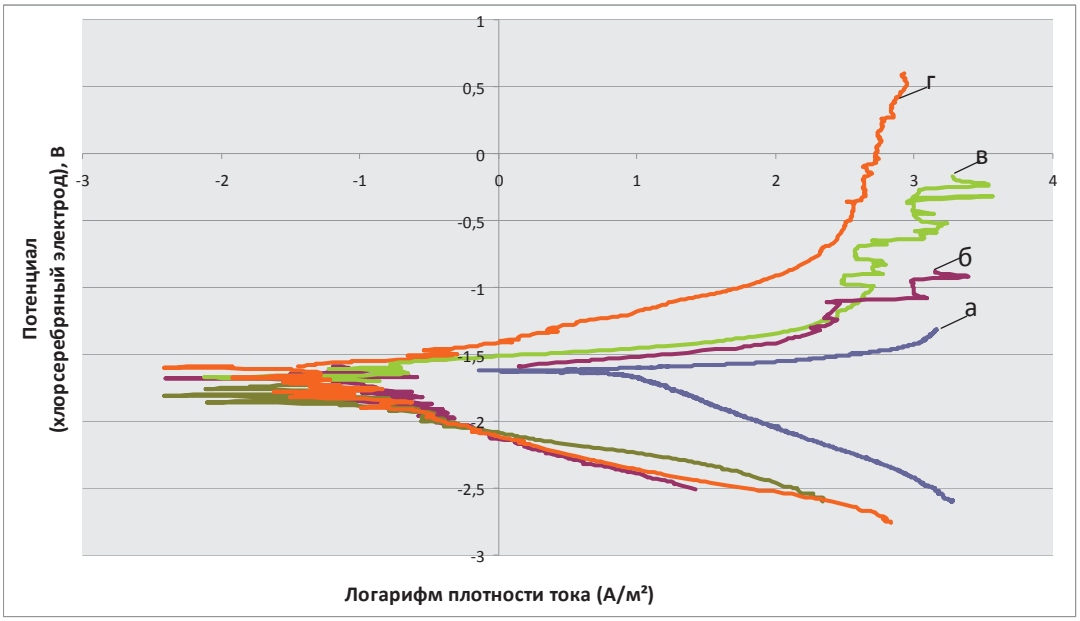


Рис. 7. *Поляризационные кривые, полученные на образцах: а – без МДО-покрытия; б – обработанных в течение 54 мин в электролите $C_{кон}$=2 г/л, $C_{жс}$=3 мл/л; в – обработанных в течение 40 мин в электролите $C_{кон}$=4 г/л, $C_{жс}$=6 мл/л; г – обработанных в две стадии: сначала б, затем в*

Потенциодинамические поляризационные испытания сплава, подвергнутого двухстадийной обработке, показали (рис. 7, *г*), что плотность тока коррозии снизилась почти на порядок – до 0,0016 А/м^2. По-видимому, сначала на обрабатываемой поверхности сплава МА2–1 формируется плотная (малопористая) структура, а затем в более концентрированном электролите активно нарастет толщина МДО-покрытия, что позволяет эффективно повысить его коррозионно-защитную способность.

Выводы

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод о том, что существуют зависимости между такими технологическими факторами процесса МДО, как его продолжительность и состав электролита, и коррозионно-защитной способностью сформированных покрытий. Более детальное исследование этих зависимостей позволит сделать управляемым процесс коррозионного разрушения модифицированного сплава на основе магния и создаст предпосылки для разработки научно-технологических основ получения материалов с контролируемой (требуемой) скоростью деградации.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13–08–12038/13 офи_м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елкин Ф.М. Актуальные проблемы металловедения, производства и применения магниевых сплавов // Технология легких сплавов. – 2007. – № 1. – С. 5–18.
2. Обработка поверхности изделий медицинского назначения в электролитах-суспензиях. Ч. 3 / А.М. Борисов, Б.Л. Крит, В.Б. Людин, Н.В. Морозова, И.В. Суминов, Д.И. Цыганов, А.В. Эпельфельд, Н.Л. Семенова // Технологии живых систем. – 2013. – Т. 10. – № 6. – С. 37–47.
3. Плазменно-электролитическое модифицирование поверхности металлов и сплавов: в 2-х т. Т. II. / И.В. Суминов, П.Н. Белкин, А.В. Эпельфельд, В.Б. Людин, Б.Л. Крит, А.М. Борисов. – М.: Техносфера, 2011. – 512 с.
4. Микродуговое оксидирование (теория, технология, оборудование) / И.В. Суминов, А.В. Эпельфельд, В.Б. Людин, Б.Л. Крит, А.М. Борисов. – М.: ЭКОМЕТ, 2005. – 368 с.
5. Шлугер М.А., Ажогин Ф.Ф., Ефимов Е.А. Коррозия и защита металлов. – М.: Металлургия, 1981. – 216 с.

Поступила 16.01.2014 г.

UDC 620.197: 621.794

INFLUENCE OF ELECTROLYTE COMPOSITION ON PROPERTIES OF THE MA2–1 ALLOY AT MICROARC DISCHARGE OXIDIZING

Boris V. Vladimirov,
MATI – Russian State Technologic University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail: 9674025@mail.ru

Boris L. Krit,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technologic University, Russia, 109383,
Moscow, Polbin street, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Valery B. Lyudin,
Dr. Sc., Russian State Agrarian University, Russia, 143900, Balashikha,
Yulius Fuchik street, 1. E-mail: ludin-nine@yandex.ru

Natalya V. Morozova,
Cand. Sc., Russian Medical Academy of Postgraduate Education,
Russia, 123995, Moscow, Barrikadnaya street, 2/1. E-mail: innat.m@mail.ru

Igor V. Suminov,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technological University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail: tompve-2005@yandex.ru

Andrey V. Epelfeld,
Dr. Sc., MATI – Russian State Technologic University,
Russia, 109383, Moscow, Polbin street, 45. E-mail: apelfeld@yandex.ru

The relevance of the study is caused by the demand to develop light biomedical alloys possessing controlled corrosion speed.
The main aim of the study *is to research the influence of electrolyte composition at microarc discharge oxidizing of MA2–1 alloy both on the maximum duration of «faultless» processing and thickness, through porosity and corrosion-protective ability of the modified layer.*
The methods used in the study: *Plasma-electrolytic microarc discharge oxidizing. Study of through porosity when measuring electric resistance of a two-electrode electrochemical cell; which one electrode is the test sample. Nondestructive control of the modified layer thickness with use of the vortex current VT-201 gage. Potentiodynamic polarization measurements in 3 % NaCl solution with scanning rate of 1 mV/sec. according to the three-electrode scheme with use of EP-20A device.*
The results*: the authors have determined the dependence between the technology factors of microarc discharge oxidizing (the maximum duration of «faultless» processing and electrolyte composition) and corrosion-protective ability of the formed coverings.*

Key words:
Magnesium alloys, modifying, microarc discharge oxidizing, technology factors, corrosion.

REFERENCES

1. Elkin F.M. Aktualnye problemy metallovedeniya, proizvodstva i primeneniya magnievykh splavov [Current problems of metal technology, production and application of magnesium alloys]. *Tekhnologiya legkikh splavov*, 2007, no. 1, pp. 5–18.
2. Borisov A.M., Krit B.L., Lyudin V.B., Morozova N.V., Suminov I.V., Tsyganov D.I., Epelfeld A.V., Semenova N.L. Obrabotka poverkhnosti izdeliy meditsinskogo naznacheniya v elektrolitakh-suspenziyakh [Processing medical product surface in electrolytes-suspensions P. 3]. *Tekhnologii zhivykh system*, 2013, vol. 10, no. 6, pp. 37–47.
3. Suminov I.V., Belkin P.N., Epelfeld A.V., Lyudin V.B., Krit B.L., Borisov A.M. *Plazmenno-elektroliticheskoe modifitsirovanie poverkhnosti metallov i splavov* [Plasma-electrolytic modification of metal and alloy surfaces]. Moscow, Tekhnosfera, 2011. Vol. 2, 512 p.
4. Suminov I.V., Epelfeld A.V., Lyudin V.B., Krit B.L., Borisov A.M. *Mikrodugovoe oksidirovanie (teoriya, tekhnologiya, oborudovanie)* [Microarc oxidation (theory, technique, equipment)]. Moscow, EKOMET, 2005. 368 p.
5. Shluger M.A, Azhogin F.F., Efimov E.A. *Korroziya i zashchita metallov* [Metal corrosion and protection]. Moscow, Metallurgiya, 1981. 216 p.

УДК 621.039.553: 539.219.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОДОРОДОПРОНИЦАЕМОСТИ В РЕАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗОТОПОВ ВОДОРОДА С КОНСТРУКЦИОННЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

Гордиенко Юрий Николаевич,
аспирант Физико-технического института Томского политехнического университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30; начальник группы лаборатории внутриканальных испытаний
Республиканского государственного предприятия на правах хозяйственного ведения
«Национальный ядерный центр Республики Казахстан», филиал «Института атомной энергии»,
Казахстан, 071100, г. Курчатов, ул. Красноармейская, д. 10. E-mail: Gordienko@ nnc.kz

Кульсартов Тимур Валиханович,
канд. физ.-мат. наук, ведущ. науч. сотр. лаборатории внутриканальных испытаний
Республиканского государственного предприятия на праве хозяйственного ведения
«Национальный ядерный центр Республики Казахстан», филиал «Институт атомной энергии»,
Казахстан, 071100, г. Курчатов, ул. Красноармейская, д. 10. E-mail: Kulsartov@nnc.kz

Заурбекова Жанна Асхатовна,
мл. науч. сотр. лаборатории внутриканальных испытаний Республиканского государственного предприятия
на праве хозяйственного ведения «Национальный ядерный центр Республики Казахстан», филиал «Институт
атомной энергии», Казахстан, 071100, г. Курчатов, ул. Красноармейская, д. 10. E-mail: Zaurbekova@nnc.kz

Понкратов Юрий Валентинович,
науч. сотр. лаборатории внутриканальных испытаний Республиканского государственного предприятия
на праве хозяйственного ведения «Национальный ядерный центр Республики Казахстан», филиал «Институт
атомной энергии», Казахстан, 071100, г. Курчатов, ул. Красноармейская, д. 10. E-mail: Ponkranov@nnc.kz

Гныря Вячеслав Сергеевич,
начальник КИР «Байкал-1», гл. инженер КИР Республиканского государственного предприятия
на праве хозяйственного ведения «Национальный ядерный центр Республики Казахстан», филиал
«Институт атомной энергии», Казахстан, 071100, г. Курчатов, ул. Красноармейская, д. 10. E-mail: slava@nnc.kz

Никитенков Николай Николаевич,
д-р физ.-мат.наук, профессор каф. общей физики Физико-технического института
Томского политехнического университета, Россия, 634034, г. Томск, пр. Ленина, 30. E-mail: nikitenkov@tpu.ru

Актуальность работы обусловлена необходимостью создания методической и аппаратурной базы для проведения исследований взаимодействия изотопов водорода с различными материалами в условиях реакторного облучения.
***Цель работы**: разработка и испытание методики по определению параметров взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами в условиях реакторного облучения; проведение расчетных оценок и экспериментов, подтверждающих возможность использования методики.*
***Методы исследования:** использовались теплофизические, нейтронно-физические методы расчета ампульных устройств, метод водородопроницаемости.*
***Результаты:** приведены основные положения методики проведения реакторных исследований материалов методом водородопроницаемости; оценки применимости данной методики и результаты ее использования при проведении реакторных экспериментов с конструкционными материалами, такими как сталь SS316L (N)-IG, ванадиевый сплав V4Cr4Ti и медная бронза CuCrZr.*

Ключевые слова:
Метод водородопроницаемости, водород, изотопы водорода, реакторное облучение, коэффициент диффузии, константа проницаемости, константа растворимости.

Введение

Традиционный интерес к системам металл–водород связан с техническими приложениями в области атомной энергетики, порошковой металлургии, ракетостроения, электровакуумной промышленности, водородной энергетики, защиты оборудования и конструкций от водородной коррозии.

Диффузионный перенос водорода в материалах под действием внешних факторов (конструктивно-технологических и эксплуатационных) может оказывать существенное и преимущественно отрица-

тельное влияние на физико-механические и прочностные свойства металлов и сплавов, снижая работоспособность различных узлов конструкции. Это вызвано тем, что водород, проникающий в металл во время плавки, разливки и различных химических, электрохимических, газоразрядных и ядерных процессов, диффундируя в кристаллической решетке, способен взаимодействовать с различного рода дефектами, содержащимися в реальных материалах. Накопление водорода в дефектах материала способствует быстрому разрушению изделий, контактирующих с водородом, в результате водородного распухания материала [1, 2].

Наиболее существенное влияние на механические свойства материала водород оказывает в атомной и термоядерной энергетике, где изотопы водорода являются продуктами ядерных реакций (атомная энергетика) или непосредственно участвуют в процессе производства энергии – термоядерный синтез. Проблема усложняется тем, что материалы используются в элементах конструкций, работающих в нейтронных радиационных полях. Наличие этих полей приводит к многочисленным ядерным реакциям в материале, в том числе с легирующими элементами и примесями, наработке водорода и его изотопов (дейтерия и трития) в материале, а также вызывает радиационные изменения структуры и фазового состава материала. Комплексное воздействие факторов эксплуатации на конструкционные материалы инициирует сложный процесс изменения свойств материалов, который может привести к внезапному их разрушению. Отдельной важной задачей является оценка тритиевой безопасности ЯР и особенно ТЯР. Утечки трития сквозь конструкционные материалы ТЯР определяют безопасность использования таких установок в будущем.

В связи со сказанным является актуальным исследование параметров взаимодействия изотопов водорода с функциональными и конструкционными материалами в условиях комплексного воздействия факторов эксплуатации (температуры, изотопов водорода, нейтронного облучения и др.).

Отсутствие экспериментальных данных по влиянию реакторного облучения на процессы взаимодействия изотопов водорода с материалами ставит задачу разработки методики реакторных исследований и применение ее для определения параметров взаимодействия изотопов водорода с материалами.

Данная задача включает в себя создание методической и аппаратурной базы для обеспечения реакторных исследований и проведение расчетных оценок и методических экспериментов, подтверждающих возможность использования предложенной методики в реакторных экспериментах.

В Институте Атомной Энергии Национального Ядерного Центра РК на реакторе ИВГ.1М (г. Курчатов) на протяжении нескольких лет различными методами ведутся реакторные исследования процессов взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами. Одним из методов исследований является метод водородной проницаемости (ВП) материалов.

В данной работе приведена методикапроведения реакторных исследований конструкционных материалов методом ВП, оценки применимости данной методики и результаты ее использования при проведении реакторных экспериментов с конструкционными материалами: нержавеющая сталь SS316L (N)-IG, ванадиевый сплав V4Cr4Ti и медная бронза CuCrZr.

Метод определения водородной проницаемости

Экспериментальные методы исследования параметров массопереноса в металлах в настоящее время хорошо разработаны и состоят в основном из различных вариаций явлений газопроницаемости и десорбции.

Метод проницаемости имеет существенное преимущество по сравнению с другими методами, используемыми при исследованиях взаимодействия изотопов водорода с материалами. Это преимущество заключается в возможности измерения в одном эксперименте коэффициента диффузии, констант растворимости и проницаемости. Подробное описание метода водородопроницаемости представлено в ОСТе 92–4949–84 [3].

Для проведения исследований методом водородопроницаемости обычно используется диффузионная ячейка, разделенная мембраной из исследуемого материала на две камеры: входную и выходную.

В статье описывается возможность применения динамического варианта метода водородопроницаемости в реакторных экспериментах по исследованию взаимодействия водорода и его изотопов с конструкционными материалами. Суть метода кратко заключается в следующем: после подготовки образца (отжига) и вакуумирования объемов, прилегающих квходной и выходной сторонам мембраны, при исследуемой температуре подается газ на входную сторону образца. При этом в выходном объеме с помощью масс-спектрометрической регистрации измеряется количество газа, прошедшего сквозь образец. При таком варианте метода водородопроницаемости нахождение параметров процесса проникновения исследуемого газа сводится к решению уравнения Фика со следующими граничными условиями первого рода [4]:

$$J = -D\frac{\partial C}{\partial x},$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

$$C\big|_{t=0} = 0,\ 0 \le X \le l,$$

$$C\big|_{t\ge 0} = S_H\sqrt{P_0},\ X = 0,$$

$$C\big|_{t\ge 0} = 0,\ X = l.$$

В этом случае полагают, что в момент подачи водорода на входной стороне образца мгновенно устанавливается концентрация, равная равновесной растворимости, а концентрация водорода на

выходной стороне мембраны в любой момент времени остается равной нулю.

В соответствии с первым законом Фика поток водорода сквозь мембрану единичной площади запишется следующим образом [5]:

$$J = \frac{DS_H}{l}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left(-\frac{D\pi^2 n^2}{l^2}t\right)\right]\right\}.$$

Для потока на выходной стороне мембраны имеем следующее выражение

$$J_{\text{вых}} = \frac{DS_H}{l}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\exp\left(-\frac{D\pi^2 n^2}{l^2}t\right)\right]\right\}.$$

При достаточно больших значениях tдля величины стационарного потока, из которого может быть рассчитана константа проницаемости, получается выражение:

$$J_{\text{ст}} = J(t,l)\big|_{t\to\infty} = \frac{DS_H}{l}.$$

Анализ формы зависимости $J(t)$ (рис. 1) позволяет выделить ряд характерных точек, связанных с коэффициентом диффузии: это время прорыва, или, как его еще называют, время запаздывания для нестационарного состояния t_n, которое определяется как точка пересечения касательной к кривой $J(t)$, проведенной через точку перегиба, с осью времени; время перегиба t_i – время, при котором вторая производная меняет знак; время полуволны $t_{0,5}$ – время, за которое поток достигает половины стационарного значения.

Любым из характеристических времен можно воспользоваться для определения коэффициента диффузии:

$$D = \frac{l^2}{19{,}9\tau_n} = \frac{l^2}{10{,}9\tau_i} = \frac{l^2}{7{,}2\tau_{0,5}} = \frac{l^2}{6\tau_э}.$$

Факт совпадения D, рассчитанных по различным характеристическим временам, может быть использован в качестве критерия однородности диффузионной среды и возможности описания экспериментальных условий с приведенными краевыми условиями.

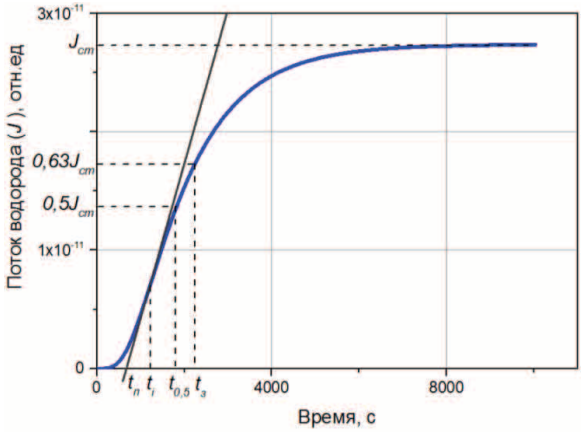


Рис. 1. *Характерная кривая проницаемости водорода через металлическую мембрану*

Более надежным и современным методом в определении коэффициента диффузии является метод спрямления кривой установления стационарного потока в функциональном масштабе [6, 7]. Использование метода линеаризации с применением функциональных масштабов, т. е. сведение сложной зависимости к линейной, позволяет значительно облегчить обработку результатов и сделать их более корректными. Метод линеаризации подробно описан в работе Л.Л. Кунина [8], а функциональные масштабы разработаны в работе [7, 9].

Константа проницаемости и растворимость водорода определяются выражениями [3]:

$$P_H = \frac{\Phi_H l}{S_э\sqrt{P}},$$

$$S_H = \frac{P_H}{D_H},$$

где P_H – константы проницаемости водорода, моль/с·м·Па$^{1/2}$; Φ_H – поток водорода через образец, моль/с; l – толщина образца, м; $S_э$ – эффективная площадь образца, м^2; P – давление газообразного водорода на входной стороне образца, Па; S_H – растворимость водорода моль/м^3; D_H – коэффициент диффузии, м^2/с.

Графически температурные значения водородопроницаемости, коэффициента диффузии и растворимости изображаются в координатах:

$$\lg(P_H, D, S_H) = f\left(\frac{10^3}{T}\right),$$

где T – температура исследуемого образца, К.

Энергию активации процессов диффузии и проникновения определяют как тангенс угла наклона политерм температурной оси и рассчитывают по формулам:

$$E_p = \frac{R}{\lg e}(\lg P_{H_1} - \lg P_{H_2})\frac{T_1T_2}{T_1 - T_2},$$

$$E_D = \frac{R}{\lg e}(\lg D_{H_1} - \lg D_{H_2})\frac{T_1T_2}{T_1 - T_2},$$

$$H_S = \frac{R}{\lg e}(\lg S_{H_1} - \lg S_{H_2})\frac{T_1T_2}{T_1 - T_2},$$

где P_{H_1}, P_{H_2} (D_{H_1}, D_{H_2}; S_{H_1}, S_{H_2}) – значения, полученные при температурах образца T_1 и T_2, соответственно, причем $T_1>T_2$; R (газовая постоянная (R=8,31431 Дж/(моль·К)).

Постоянные диффузии P_0, D_0 и S_0 рассчитывают по формулам:

$$\lg P_0 = \lg P_{H1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}(\lg P_{H1} - \lg P_{H2}),$$

$$\lg D_0 = \lg D_{H1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}(\lg D_{H1} - \lg D_{H2}),$$

$$\lg S_0 = \lg S_{H_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}(\lg S_{H_1} - \lg S_{H_2}).$$

В Институте Атомной Энергии НЯЦ РК методом водородопроницаемости исследовались раз-

личные материалы [10–13]. Исследования процессов проницаемости изотопов водорода сквозь конструкционные материалы в условиях реакторного излучения проводились на экспериментальном стенде, размещённом в реакторном зале исследовательского реактора ИВГ.1М.

Реактор ИВГ.1М

Реактор ИВГ.1М – исследовательский водо-водяной гетерогенный корпусного типа ядерный реактор на тепловых нейтронах с легководными замедлителем и теплоносителем и бериллиевым отражателем нейтронов (рис. 2)

Технические параметры реактора ИВГ1.М следующие:

- тепловая мощность – 72 МВт;
- эффективный размер активной зоны – 548 мм;
- высота активной зоны – 800 мм;
- содержание урана-235 в активной зоне – 4,6 кг;
- плотность потока тепловых нейтронов в центре экспериментального канала – $3{,}5\cdot10^{14}$ н/см^2·с.

В табл. 1 приведены значения потока нейтронов при мощности реактора 6 МВт.

Таблица 1. *Поток нейтронов в центре активной зоны реактора ИВГ.1М при работе на мощности 6 МВт*

Энергетическая группа	от 0 до 0,67 эВ	от 0,67 до $0{,}1\cdot10^6$ эВ	от 0,1 до 10 МэВ	Интегральный поток
Нейтронный поток, см$^{-2}$·с$^{-1}$	$0{,}87\cdot10^{14}$	$0{,}42\cdot10^{14}$	$0{,}22\cdot10^{14}$	$1{,}5\cdot10^{14}$

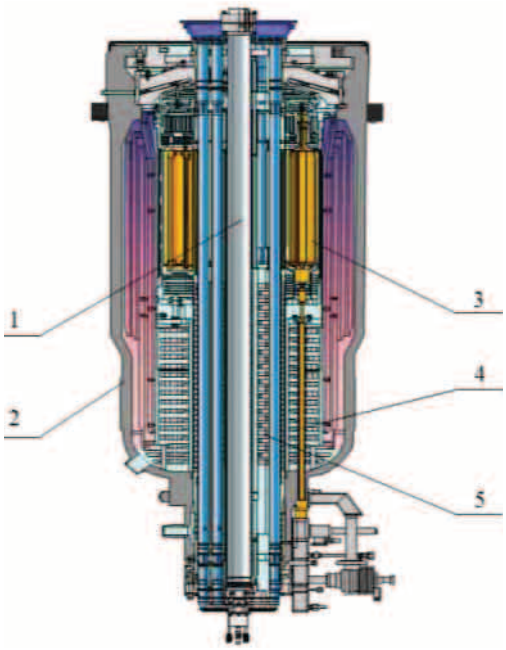


Рис. 2. *Реактор ИВГ.1М: 1 – центральный канал; 2 – корпус реактора; 3 – регулирующий барабан (РБ); 4 – привод исполнительного механизма РБ, 5 –железоводная защита*

Активная зона реактора содержит 30 водоохлаждаемых технологических каналов, установленных в ячейках трех кольцевых рядов. В центральной части реактора расположен центральный петлевой канал с бериллиевым вытеснителем и корпусом физического экспериментального канала (ФКЭ).

Корпус ФКЭ используется в качестве канала для размещения облучаемого ампульного устройства (АУ).

Экспериментальный стенд

Реакторные исследования по взаимодействию изотопов водорода с конструкционными материалами проводились на экспериментальном стенде, который позволяет проводить эксперименты по водородопроницаемости различных конструкционных материалов при потоках тепловых нейтронов до 10^{14} н/см^2, температурах образца от 293 до 1573 К и входных давлениях водорода и его изотопов до 10 атм.

Экспериментальный стенд функционально состоит из вакуумной системы, системы очистки и напуска изотопов водорода и информационно-измерительной системы.

Вакуумная система экспериментального стенда (рис. 3) позволяет провести подготовку стенда к работе и создать необходимые условия для проведения экспериментов. Вакуумная система включает в себя экспериментальное АУ с исследуемым образцом, форвакуумную и высоковакуумную части, соединенные трубопроводами с запорной арматурой. Данная система оснащена вакуумным насосом (НВР-5ДМ) с азотной ловушкой и магниторазрядными насосами (НЭМ-300, НОРД-100 и НОРД-250). Насос НВР-5ДМ с азотной ловушкой служит для предварительной откачки всей системы и обеспечивает минимальное давление для начала работы высоковакуумных магниторазрядных насосов. Насосы НЭМ-300, НОРД-100 и НОРД-250 создают необходимые условия (давление) в объеме ампульного устройства, измерительного тракта и в системе напуска изотопов водорода.

Система очистки и напуска экспериментального стенда обеспечивает напуск спектрально чистого водорода и его изотопов на входную сторону исследуемого образца. Очистка водорода и его изотопов осуществляется с помощью палладий-серебряного фильтра. Спектрально чистый водород для экспериментов накапливается в ресиверную емкость до заданного давления. Система очистки и напуска оснащена вакуумными и газовыми трубопроводами, запорной арматурой и вакуумным насосом для обеспечения периодической откачки и напуска водорода на входной стороне образца после цикла измерений.

Информационно-измерительная система (ИИС) обеспечивает контроль параметров стенда в процессе работы и регистрацию проникновения водорода через исследуемый материал.

ИИС экспериментального стенда автоматизирована (рис. 4) и обеспечивает сбор, регистрацию данных и наблюдение в реальном времени. Авто-

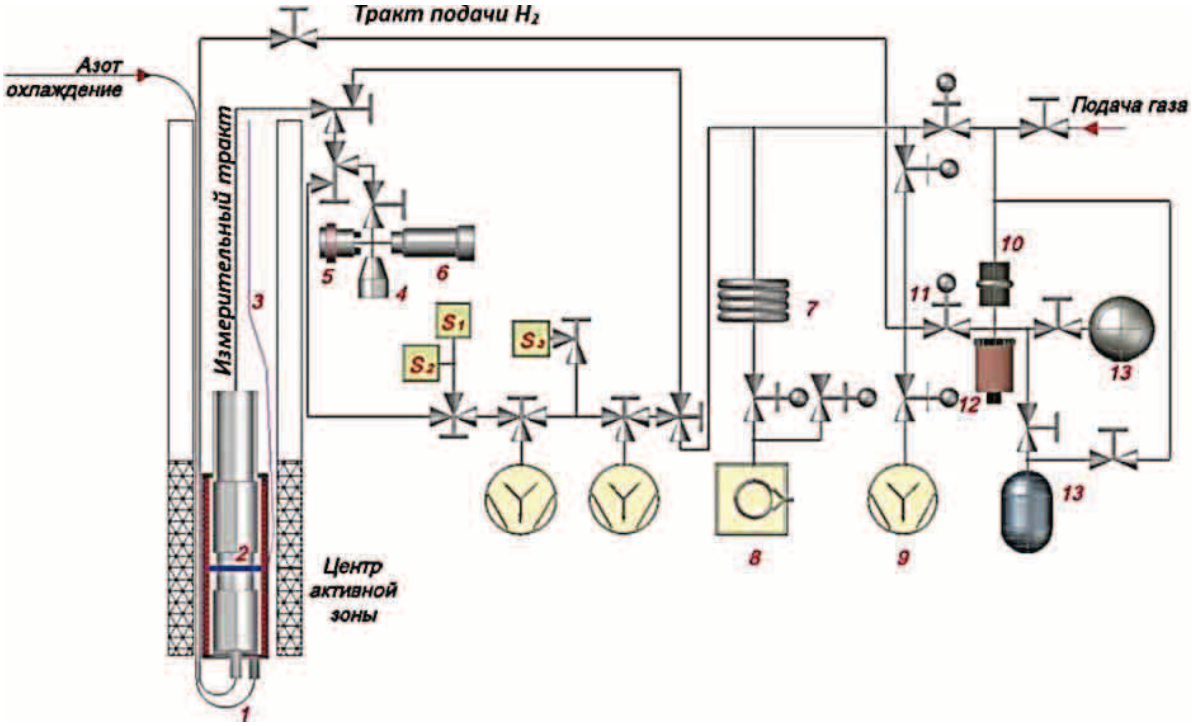


Рис. 3. *Принципиальная схема вакуумной системы стенда ЛИАНА: 1 – ампульное устройство с исследуемым образцом; 2 – исследуемый образец; 3 – термопары; 4 – датчик давления ConvecTorr; 5 – датчик давления ИКД-100; 6 – датчик давления IMG-100; 7 – азотная ловушка; 8 – форвакуумный насос; 9 – высоковакуумный насос; 10 – водородный фильтр; 11 – датчик давления ПМДГ; 12 – вакуумный вентиль; 13 – буферная емкость для спектрально чистого водорода; S1, S2, S3 – масс-спектрометры: ИПДО-1 (с датчиком РМО-13), MX-6407; RGA-100*

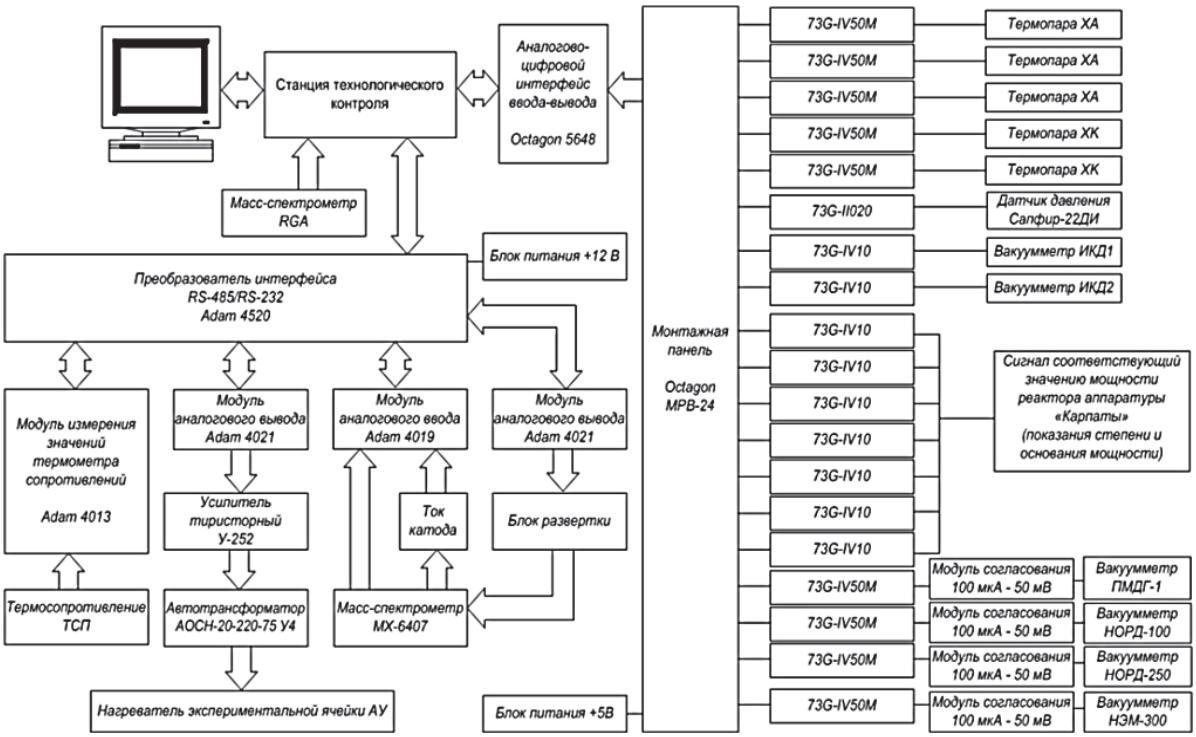


Рис. 4. *Схема системы автоматизации, контроля и регистрации экспериментального стенда*

матизированное рабочее место (АРМ) инженера в составе ИИС находится в помещении, защищенном от излучений реактора, и предусматривает режимы функционирования: предпусковой, пусковой и послепусковой обработки. Функции представления оперативной технологической информации, управление режимами наблюдения и регистрации данных реализованы на базе графического компьютерного терминала ПЭВМ IBM PC.

Регистрация прохождения изотопов водорода через образец производится с помощью масс-спектрометров, установленных в выходной камере и позволяющих определять парциальные давления остаточных газов с точностью ±10 % в диапазоне давлений от 10^{-3} до 10^{-8} Па. Система нагрева ячейки АУ с исследуемым образцом выполнена на базе высокоточного регулятора температуры (ВРТ) и обеспечивает реализацию всех необходимых температурных режимов в проводимых экспериментах с точностью ±2 К. Измерение давления водорода и его изотопов в системах установки производится деформационным газоразрядным вакуумметром ВДГ-1, деформационным датчиком ИКД-100 и термопарным датчиком ConvecTorr.

Реакторные облучательные устройства для проведения экспериментов

Для реализации метода ВП при проведении реакторных исследований взаимодействия изотопов водорода с различными материалами были специально сконструированы облучаемые АУ.

АУ монтируется на экспериментальный стенд и размещается внутри корпуса ФКЭ реактора ИВГ.1М.

АУ включает в себя: экспериментальную диффузионную ячейку с исследуемым образцом, разделяющим вакуумную и газовую полости АУ; электрического нагревателя; устройства газового охлаждения; термопар и соединительного патрубка с фланцем. АУ обеспечивает размещение образца на уровне центра активной зоны реактора ИВГ.1М, откачку газовой и вакуумной полости экспериментальной ячейки, подачу водорода и его изотопов на входную сторону исследуемого образца, регулировку и поддержание исследуемого температурного режима образца.

Для проведения реакторных экспериментов по исследованию взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами SS316L (N)-IG, V4Cr4Ti и CuCrZr было разработано и изготовлено два типа экспериментальных диффузионных ячеек ампульных устройств, схематический вид которых представлен на рис. 5, 6.

На рис. 5 представлена экспериментальная ячейка АУ для проведения экспериментов со сталью SS316L (N)-IG. Исследуемый образец в виде мембраны вварен в диффузионную ячейку и разделяет входную и выходную камеры ячейки АУ.

В экспериментах по исследованию взаимодействия изотопов водорода со сплавом ванадия V4Cr4Ti и медной бронзы CuCrZr было использовано АУ с диффузионной ячейкой, представленной на рис. 6. Исследуемый образец в виде мембраны уплотнялся с помощью двух втулок с гермоуплотнением типа конфлат (образец V4Cr4Ti уплотнялся через медные прокладки с последующей диффузионной сваркой его с медью, а образец CuCrZr уплотнялся без прокладок).

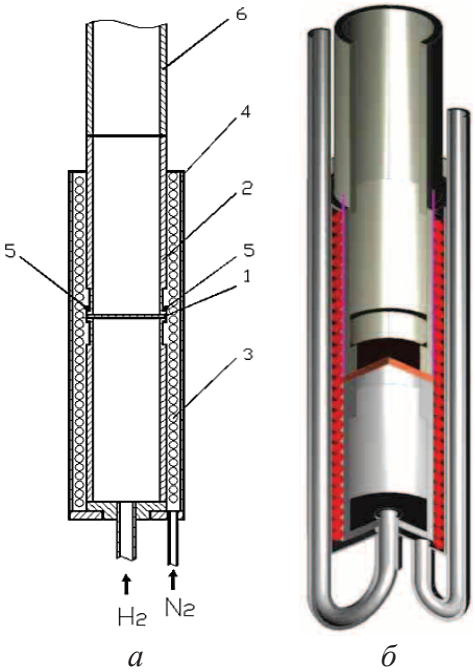


Рис. 5. *Экспериментальная ячейка АУ для проведения экспериментов с образцом SS316L (N)-IG: 1 – образец; 2 – корпус экспериментальной ячейки; 3 – нагреватель; 4 – кожух охлаждения; 5 – термопары; 6 – корпус ампульного устройства*

Диффузионная сварка исследуемого образца проводилась при температуре 1053 К под давлением около 150 кг/см^2 в течение трех часов при давлении во входной и выходной полости диффузионной ячейки 10^{-3} Па. С боковых сторон образца и медных прокладок в процессе сварки была организована продувка газообразным гелием.

Для нагрева исследуемого образца и обеспечения поддержания выбранных температурных режимов на корпус диффузионной ячейки симметрично относительно положения образца установленнагреватель (провод КТМС ХК мощностью 300 Вт). Кроме того, для поддержания заданной температуры образца на ампульном устройстве смонтирована система охлаждения в виде установленного на экспериментальную ячейку кожуха охлаждения. Охлаждение предусматривает продувку газообразного азота через зазор между корпусом экспериментальной ячейки и кожухом охлаждения.

Контроль и регистрация температуры образца и стенки корпуса АУ осуществляется с помощью хромель-алюмелевых термопар, установленных непосредственно на исследуемом образце и на корпусе АУ.

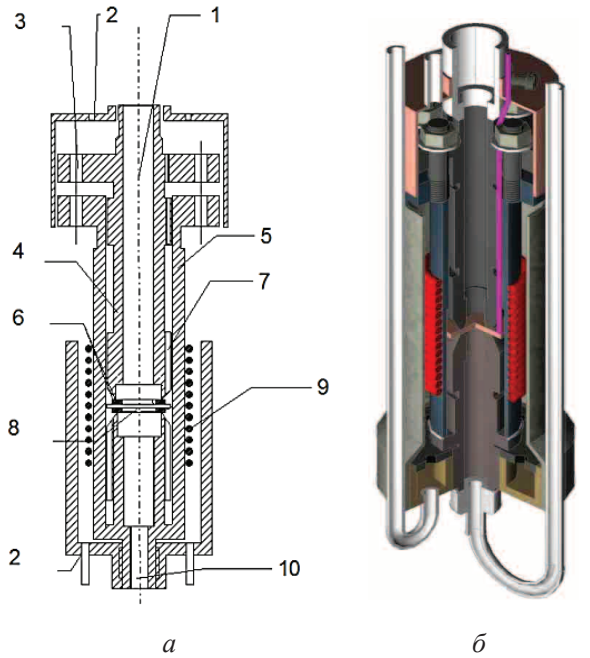


Рис. 6. *Диффузионная ячейка АУ для проведения экспериментов с образцом V4Cr4Ti и CuCrZr: 1 – вакуумный тракт; 2 – трубка подачи охлаждающего газа; 3 – фланцевое соединение; 4 – выходной патрубок; 5 – выходной патрубок диффузионной сборки; 6 – медные прокладки; 7 – проточка для установки термопар; 8 – образец; 9 – нагреватель; 10 – узел подвода водорода*

Исследования взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами методом водородопроницаемости проводились в три этапа: дореакторные, реакторные и послереакторные эксперименты.

Порядок измерений кинетики водородопроницаемости исследуемых образцов соответствовал методике, описанной в [3], с уточнениями для проведения реакторных экспериментов, которые заключались в следующем:

- перед проведением реакторных экспериментов по ВП исследуемого образца была проведена высокотемпературная дегазация диффузионной ячейки с образцом в процессе облучения (так называемый радиационный отжиг). Это делалось для уменьшения фона водорода в системе регистрации, который неизбежно возникает в результате радиационно-стимулированного газовыделения со стенок диффузионной ячейки и самой ампулы при работе реактора на мощности;
- изменен режим измерений в экспериментах. Так как реактор ИВГ.1М имеет ограниченный временной запас работы, то методические рекомендации, изложенные в [3] (а именно, рекомендуемый отжиг образца и порядок снятия временных зависимостей водородопроницаемости) не подходили к реакторным измерениям. Поэтому было необходимо спланировать все измерения таким образом, чтобы сделать явным наблюдаемый эффект влияния облучения на процессы проникновения изотопов водорода сквозь исследуемые материалы.

Исследования взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами с учетом внесенных изменений проводились в следующей последовательности (этапы 1–3):

Этап 1: Дореакторный эксперимент.

Вначале исследуемый образец нагревается до температуры 973 К (для его дегазации), при непрерывной откачке входной и выходной сторон образца (время отжига образца составляло от 5 до 10 ч, в зависимости от исследуемого образца). Затем температура образца понижалась до исследуемой температуры, а в ресиверную емкость через разогретый (до 723 К) палладий-серебряный фильтр набирался спектрально чистый изотоп водорода (дейтерий). После установки заданной температуры образца и установления стационарного уровня по парциальному давлению водорода (дейтерия) в объеме выходной полости АУ на входную сторону образца подавался спектрально чистый водород (дейтерий), накопленный в ресиверной емкости фильтра с регистрацией давления (P). При этом в измерительном тракте регистрировалась кинетика установления стационарного потока исследуемого газа, проникающего сквозь образец, во времени (характерная форма кривой проницаемости представлена на рис. 1). После измерений оставшийся газ скачивался с входной стороны образца, а сам образец нагревался до температуры 973 К для удаления, растворенного в образце газа. Время отжига образца ограничивалось установлением стационарного значения парциального давления водорода в выходном объеме АУ. Далее температура образца понижалась до следующей исследуемой температуры и измерения повторялись.

Этап 2. Реакторный эксперимент.

Перед выходом реактора на мощность проводился отжиг исследуемого образца при температуре 973 К в течение двух часов. После этого температура образца понижалась до исследуемой, а реактор выводился на заданный уровень мощности. Далее эксперимент проводился по схеме, описанной в дореакторномэтапе. После измерений кинетики водородопроницаемости при всех исследуемых температурах образца проводился сброс мощности реактора, а образец снова отжигался при температуре 973 К, после чего сразу проводился послереакторный эксперимент;

Этап 3. Послереакторныйэксперимент.

Порядок эксперимента тот же, что на этапе 1.

Результатом проведенных внереакторных и реакторных экспериментов являлись полученные временные зависимости кинетики проницаемости водорода и его изотопов сквозь исследуемый образец, по которым затем рассчитывались основные параметры водородопроницаемости, такие как коэффициент диффузии, константа проницаемости и растворимости водорода в исследуемом материале, а также энергии активации соответствующих процессов.

Далее в статье приводится описание методических особенностей проведения реакторных экспериментов с некоторыми конструкционными материалами, такими как: медная бронза CuCrZr, ванадиевый сплав V4Cr4Ti и нержавеющая сталь SS316L (N)-IG.

Методические особенности проведения реакторных экспериментов по ВП

Оценка методической ошибки, связанной с неравномерным температурным полем по радиусу мембраны

Одним из факторов, влияющих на возможную методическую ошибку при проведении эксперимента по ВП с образцом в виде мембраны, является градиент температуры по радиусу мембраны.

Первоначально были произведены расчетные оценки распределения температурного поля по радиусу мембраны (при толщине образца 1 мм) в случае разогрева материалов ячейки, когда температура периферийной области мембраны составляет 573, 823 и 1023 К.

По полученным распределениям температуры рассчитана разница между температурами в центре и на краю мембраны для образцов из различных исследуемых материалов (V4Cr4Ti, CuCrZr, SS316L (N)-IG) и для различных уровней мощности облучения. Данные таких расчетов приведены в табл. 2 как максимально возможный градиент температуры по образцу (поверхности мембраны). Относительную ошибку, которая возникает при определении параметров взаимодействия водорода с материалами (имеющих аррениусовскую температурную зависимость) из-за неравномерного температурного поля по мембране, можно оценить по формуле:

$$\delta = \left(1 - \exp\left(E_a \cdot \frac{\Delta T}{RT^2}\right)\right) \cdot 100\ \%,$$

где δ – относительная ошибка; E_a – энергия активации процесса; ΔT – градиент температур по мембране при температуре мембраны T. (Значения энергии активации процессов растворимости, диффузии и проницаемости были определены экспериментально методом ВП). Данная формула применима при условии, что $\Delta T << T$. Кроме того, в табл. 2 приведены значения относительной ошибки в определении параметров ВП при максимальном градиенте температуры по образцу исследуемого материала и заданной средней температуре образца.

Анализируя полученные результаты оценок можно сделать следующие выводы:

1. Максимальный градиент температуры по мембране в диапазоне исследуемых температур от 573 до 1023 К составляет не более 5,5 К для ванадиевого сплава; 4,8 К для медной бронзы и не более 6,0 К для нержавеющей стали. Причем для всех материалов максимальный градиент температуры по мембране наблюдается при проведении экспериментов без облучения при температуре образца 1023 К.
2. В реакторных экспериментах градиент температуры по мембране для всех материалов существенно меньше, чем во внереакторных экспериментах без облучения, это связано с тем, что при облучении образцы прогреваются более равномерно, за счет радиационного энерговыделения в объеме мембраны.
3. Относительная ошибка в определении параметров взаимодействия зависит от энергии активации процесса (чем выше энергия активации, тем выше ошибка) и от средней температуры мембраны (чем ниже температура мембраны, тем выше ошибка). Диапазон значений относительной ошибки, обусловленной неравномерным нагревом мембраны в определении параметров ВП, составляет от 1 до 5 %.
4. Как видно из табл. 2, для ванадиевого сплава наибольшая ошибка при средней температуре 573 К в определении растворимости составляет 1,80 %; для медной бронзы в определении константы проницаемости – 3,25 % при той же температуре; для нержавеющей стали в определении константы проницаемости – 4,63 %.
5. Для проверки полученных расчетов во внереакторных экспериментах по ВП с медной бронзой исследовалась ячейка (рис. 6), в которой непосредственно определялся градиент температур по мембране (температура фиксировалась на краю мембраны 2 термопарами, и одна термопара была установлена в центре мембраны). Полученные экспериментальные результаты показали, что максимальный градиент по мембране составил 3±1 К при проведении внереакторных экспериментов при средней температуре мембраны 873 К.

Таблица 2. *Величины максимального градиента температур по образцу и относительной ошибки, возникающей при определении параметров ВП во внереакторных экспериментах*

Материал	Средняя температура образца, К	Максимальный градиент температуры по образцу, К	Относительная ошибка при определении параметров ВП, %		
			Константы проницаемости	Коэффициента диффузии	Растворимости
V4Cr4Ti	573	3,0	0,38	1,42	**1,80**
	823	4,1	0,25	0,94	1,19
	1023	**5,5**	0,22	0,82	1,04
CuCrZr	573	2,2	3,25	3,06	0,20
	823	3,3	2,38	2,23	0,15
	1023	**4,8**	2,24	2,10	0,14
SS316 L(N)-IG	573	3,7	**4,63**	3,99	0,54
	823	4,6	2,82	2,42	0,33
	1023	**5,9**	2,35	2,01	0,27

Эксперименты по калибровке масс-спектрометрической системы регистрации экспериментального стенда для проведения реакторных экспериментов по ВП

Поскольку в реакторных исследованиях необходимо было регистрировать значения проникающих потоков сквозь образец, были проведены эксперименты по калибровке системы измерения, в ходе которой были получены передаточные функции, связывающие величину проникающего потока водорода (дейтерия) с показаниями масс-спектрометров, регистрирующими парциальные давления этих газов. Получение значений коэффициентов калибровки методом расчета было затруднительно. Поэтому проводились калибровочные эксперименты с целью определения коэффициента, связывающего величину проникающего потока водорода (дейтерия) сквозь образец с показаниями 3-х масс-спектрометров (омегатронного типа, на базе лампы РМО-13; радиочастотного МХ-6407; квадрупольного RGA-100).

Калибровочные эксперименты проводились на ампульном устройстве с образцом из ванадиевого сплава V4Cr4Ti при температуре образца 923 К (выбор материала определялся высокими значениями проницаемости данного материала).

Сам эксперимент состоял в следующем: в камеру на входную сторону образца подавался водород (дейтерий), с выходной стороны образца (в вакуумном объеме камеры с анализаторами) регистрировалась зависимость изменения проникающего потока водорода (дейтерия). На рис. 7 в качестве примера приведена зависимость изменения потока водорода зарегистрированная масс-спектрометром омегатронного типа, на базе лампы РМО-13 и давления водорода во входной камере. На рис. 8 приведены зависимости изменения количества водорода, прошедшего сквозь образец, рассчитанные по результатам интегрирования потока водорода сквозь образец (данные с масс-спектрометра) и по изменению давления на входной стороне образца. Видно, что форма этих зависимостей одинакова.

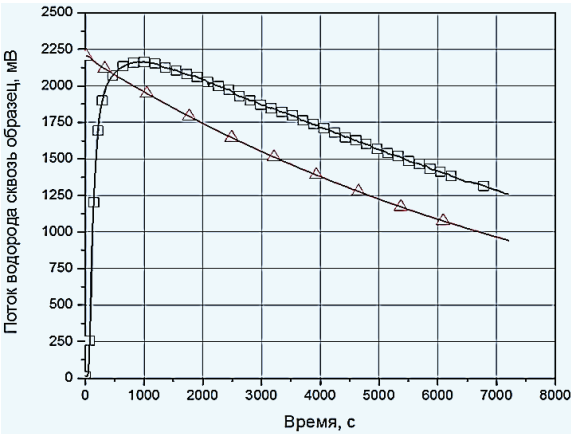


Рис. 7. *Зависимость изменения потока водорода от времени в камере с масс-спектрометром и давления водорода во входной камере: □ – поток водорода; △ – входное давление водорода ($P_{вх}$/1500 торр)*

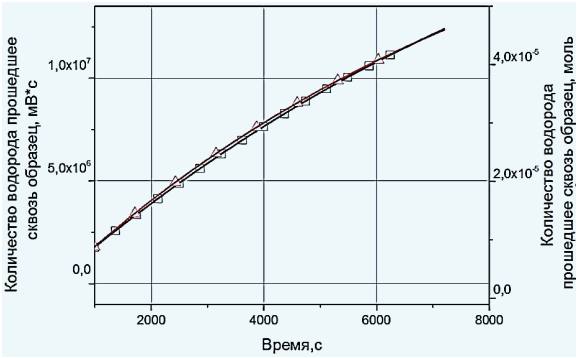


Рис. 8. *Зависимость изменения количества водорода от времени, прошедшего сквозь образец: □ – по результатам интегрирования потока водорода сквозь образец (данные с масс-спектрометра), мВ/с; △ – рассчитанные из зависимости изменения давления на входной стороне образца, моль*

Площадь под полученной кривой падения потока водорода определяет общее количество водорода, прошедшее сквозь образец

$$Q = k\int_0^{t_0} U(t)dt, \qquad (1)$$

где Q – количество водорода (дейтерия), прошедшего сквозь образец (моль) за время t_0 (с); $U(t)$ – показания регистрирующего прибора (отн. единиц); k – коэффициент пропорциональности между показаниями регистрирующего прибора и потоком водорода (дейтерия) сквозь образец (моль/(с·отн. ед.)).

С другой стороны, количество прошедшего сквозь образец водорода выражается через уменьшение давления водорода во входной камере за время эксперимента

$$Q = \frac{V(P_0 - P_1)}{RT}, \qquad (2)$$

где V – объем входной камеры, м^3; $(P_0–P_1)$ – изменение давления водорода (дейтерия) на входной стороне фильтра, Па; R – универсальная газовая постоянная, (R=8,31 Дж/(моль·К)); T – температура водорода во входной камере, T=293 К.

Таким образом, из выражений (1) и (2) определялись коэффициенты пропорциональности между показаниями регистрирующего прибора и потоком водорода (дейтерия) сквозь образец.

Было снято несколько калибровочных кривых (при различных уровнях потока водорода (дейтерия) сквозь образец), относительно которых были вычислены коэффициенты калибровки.

Кроме этого, описанные эксперименты позволили определить предел чувствительности системы измерения по величинам проникающих потоков водорода (дейтерия) сквозь образец, а также время отклика системы измерения для всех масс-спектрометров.

Рассчитанные значения коэффициентов калибровки, пределы чувствительности и времена отклика приведены в табл. 3.

Таблица 3. *Параметры, полученные в экспериментах по калибровке системы измерения*

Параметры	Диапазон потоков, моль/с	Масс-спектрометр омегатронного типа, на базе лампы РМО-13, моль/(с·мВ)	Масс-спектрометр радиочастотный МХ-6407, моль/(с·мВ)	Масс-спектрометр квадрупольный RGA-100 (моль/(с·торр))
Коэффициент калибровки	от 10^{-8} до 10^{-10}	$(4{,}25\pm0{,}07)\cdot10^{-12}$	$(6{,}7\pm0{,}50)\cdot10^{-11}$	$(1{,}64\pm0{,}02)\cdot10^{-2}$
	от 10^{-10} до 10^{-11}	$(4{,}35\pm0{,}09)\cdot10^{-12}$	$(7{,}4\pm0{,}07)\cdot10^{-11}$	$(1{,}70\pm0{,}04)\cdot10^{-2}$
	от 10^{-11} до 10^{-12}	$(2{,}40\pm0{,}10)\cdot10^{-12}$	$(8{,}0\pm0{,}15)\cdot10^{-11}$	$(9{,}00\pm0{,}10)\cdot10^{-3}$
	от 10^{-12} до 10^{-13}	–	–	$(8{,}50\pm0{,}15)\cdot10^{-3}$
Предел чувствительности, моль/с		~ $2\cdot10^{-12}$	~ $1\cdot10^{-11}$	~ $2{,}5\cdot10^{-13}$
Время отклика, с		~ 3	~ 30	~ 0,5

Для экспериментов по ВП точность в определении коэффициента калибровки определяла ошибку в полученных константах проницаемости и растворимости и составляла около 5 % (максимум 10 %) для всех серий экспериментов по ВП, а время отклика определяло ошибку в оценке коэффициента диффузии:

$$\delta = \frac{t}{\tau_{\text{зап}}},$$

где t – время отклика; $\tau_{\text{зап}}$ – время запаздывания. Величина δ менее 3 %.

Оценка ошибки в определении параметров ВП, обусловленной процессами установления и изменения в ходе эксперимента равновесного давления изотопов водорода на входной стороне образца

Одной из возможных причин ошибки в определении параметров ВП является ошибка, связанная с конечным временем установления давления изотопов водорода на входной стороне образца, а также с последующим его уменьшением в течение эксперимента за счет утечек водорода из системы. Утечки водорода обусловлены потоком водорода сквозь образец в камеру с масс-спектрометром и потоком водорода сквозь нагретые элементы конструкции ампульного устройства.

В экспериментах использовалась пассивная система стабилизации давления, которая позволяла увеличивать общее количество водорода с входной стороны образца за счет использования дополнительных буферных объемов, существенно увеличивающих (более чем в 20 раз) первоначальный объем камеры с входной стороны образца.

Были проведены эксперименты по определению скорости установления давления на входной стороне образца. Для входных давлений менее 4500 Па, время установления давления составило менее 2 с, что практически не приводило ни к какой значимой ошибке в определении коэффициента диффузии (максимальная относительная ошибка в определении коэффициента диффузии водорода в ванадиевом сплаве V4Cr4Ti при температуре образца 773 К составила около 1 %). Верхняя оценка принималась для ванадиевого сплава, так как коэффициенты диффузии и проницаемости водорода в ванадиевом сплаве на порядки величины выше, чем для других исследованных материалов.

Далее были проведены оценки возможной ошибки, связанной с падением входного давления водорода при проведении эксперимента. Максимальная ошибка также наблюдалась для ванадиевого сплава V4Cr4Ti при температуре образца 773 К. Уровень падения давления составлял не больше чем 0,01–0,025 Па/с, при уровне входного давления от 100 до 1000 Па. Величина ошибки в определении всех параметров ВП при таких уровнях падения давления составила менее 1 %.

Таким образом, были оценены основные методические ошибки в определении параметров ВП при проведении реакторных экспериментов по водородопроницаемости, и рассчитана общая относительная ошибка, которая составила менее 15 %.

Результаты применения метода водородопроницаемости в реакторных экспериментах по определению параметров водородопроницаемости в конструкционных материалах

По результатам реакторных экспериментов по определению параметров взаимодействия изотопов водорода с конструкционными материалами (медной бронзой CuCrZr, ванадиевым сплавом V4Cr4Ti и нержавеющей сталью SS316L (N)), проводимых по методике, описанной выше, и представленных в работах [12–14], можно сделать следующие выводы:

- эксперименты позволили определить аррениусовские зависимости таких параметров, как эффективные коэффициенты диффузии, константы проницаемости и растворимости водорода во всех исследованных материалах на всех этапах исследований (то есть в условиях реакторного облучения и без облучения) (рис. 9–11).
- удалось зафиксировать эффект влияния реакторного облучения, причем для различных материалов эффект был разным. Более явно эффект влияния реакторного облучения на процесс проницаемости водорода сквозь исследуемые образцы был выражен в экспериментах с ванадиевым сплавом V4Cr4Ti, при исследовании которого оказалось, что реакторное облучение более чем на порядок увеличивает скорость проникновения и установившийся поток водорода сквозь образец. Для стали SS316L (N)-IG реакторное облучение главным образом приводило к уменьшению скорости проникновения водорода при тем-

пературах менее 623 К (и соответственно к уменьшению эффективных коэффициентов диффузии водорода в стали). Для медной бронзы CuCrZr не удалось зафиксировать сильно выраженного эффекта влияния реакторного облучения на параметры взаимодействия водорода.

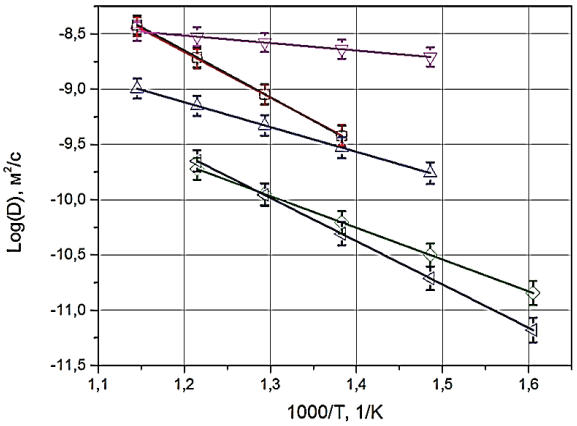


Рис. 9. *Температурные зависимости эффективного коэффициента диффузии водорода сквозь исследуемые образцы: □ – внереакторные эксперименты CuCrZr; ○ – реакторные эксперименты CuCrZr; △ – внереакторные эксперименты V4Cr4Ti; ▽ – реакторные эксперименты V4Cr4Ti; ◇ – внереакторные эксперименты SS316IG; ◁ – реакторные эксперименты SS316L (N)-IG*

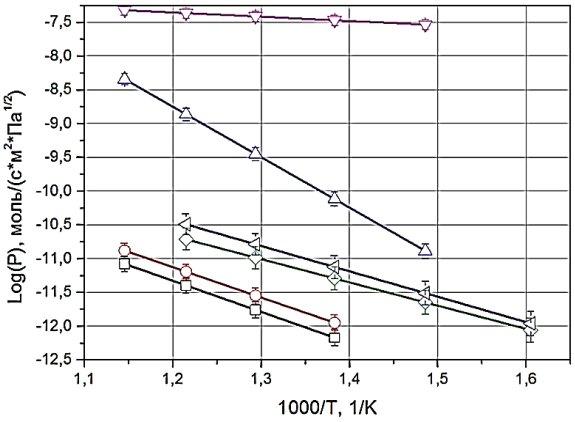


Рис. 10. *Температурные зависимости константы проницаемости водорода сквозь исследуемые образцы: □ – внереакторные эксперименты CuCrZr; ○ – реакторные эксперименты CuCrZr; △ – внереакторные экспериментыV4Cr4Ti; ▽ – реакторные эксперименты V4Cr4Ti; ◇ – внереакторные эксперименты SS316L (N)-IG; ◁ – реакторные эксперименты SS316L (N)-IG (погрешность измерений в пределах точки)*

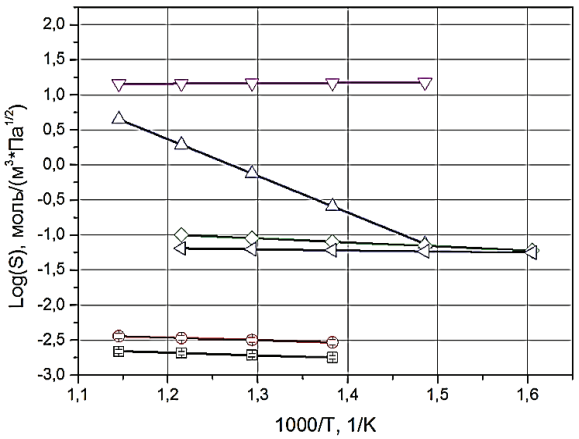


Рис. 11. *Температурные зависимости константы растворимости водорода сквозь исследуемые образцы: □ – внереакторные эксперименты CuCrZr; ○ – реакторные эксперименты CuCrZr; △ – внереакторные экспериментыV4Cr4Ti; ▽ – реакторные эксперименты V4Cr4Ti; ◇ – внереакторные эксперименты SS316L (N)-IG; ◁ – реакторные эксперименты SS316L (N)-IG. (Погрешность измерений в пределах точки)*

Заключение

Таким образом, в настоящей работе описана методика проведения реакторных исследований по взаимодействию изотопов водорода с конструкционными и функциональными материалами методом ВП, проведены оценки применимости данной методики и представлены результаты ее использования в реакторных экспериментах с конструкционными материалами: нержавеющая сталь SS316L (N)-IG, ванадиевый сплав V4Cr4Ti и медная бронза CuCrZr.

В целом предложенная методика проведения реакторных экспериментов по ВП показала свою применимость и позволила зафиксировать эффект влияния реакторного облучения на процессы взаимодействия изотопов водорода с данными конструкционными материалами.

Проведенные исследования возможных ошибок, возникающих при проведении реакторных экспериментов по ВП конструкционных материалов, показали, что данная методика применима для определения параметров взаимодействия изотопов водорода с материалами в условиях реакторного облучения. При этом возможная относительная ошибка измеряемых величин не может превышать 15 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Водород в диффузионных процессах химико-термической обработки металлов и сплавов / В. Г. Барьяхтар, [и др.]. Киев: Наукова думка, 1999. – 256 с.
2. Агеев В.Н., Бекман И.Н., Бурмистрова О.П. Взаимодействие водорода с металлами / под ред. А.П. Захарова. – М.: Наука, 1987. – 296 с.
3. ОСТ 92–4949–84. Отраслевой стандарт. Металлы. Методы определения высокотемпературной водородопроницаемости. – М., 1984. – 35 с.
4. Проницаемость водорода через металлы / А.А. Писарев, И.В. Цветков, Е.Д. Маренков, С.С. Ярко. – М.: МИФИ, 2008. – 144 с.
5. Crank J. The mathematics of diffusion. – Oxford: Oxford University press, 1975. – 425 p.
6. Габис И.Е., Компаниец Т.И, Курдюмов А.А. Поверхностные процессы и водородопроницаемость металлов // Взаимодействие водорода с металлами / под ред. А.П. Захарова. – М.: Наука, 1987. – С. 177–208.
7. Швыряев А.А., Бекман И.Н. Диаграммные бумаги для обработки результатов диффузионных экспериментов // Вестник МГУ. Сер. 2. Химия. – 1981. – Т. 22. – № 5. 517//N:4647–80 деп. ВИНИТИ от 03.11.1980.
8. Кунин Л.Л., Головин А.М. и др. Проблемы дегазации металлов (феноменологическая теория) / под ред. А.П. Виноградова. – М.: Наука, 1972. – 324 с.
9. Тажибаева И.Л., Чихрай Е.В. Численное моделирование диффузии газов в твердых телах при облучении. – Алматы: Казакуниверситетi, 1999. – 77 с.
10. Kulsartov T.V., Kenzhin E.A., Shestakov V.P. In-pile Tritium Permeation through F82H Steel with and without a Ceramic Coating of Cr_2O_3–SiO_2 including $CrPO_4$ // Fusion Engineering and Design. – 2007. – V. 82. – Iss. 15–24. – P. 2246–2251.
11. Kulsartov T.V., Kenzhin E.A., Shestakov V.P. Investigation of hydrogen isotope permeation through F82H steel with and without a ceramic coating of Cr_2O_3–SiO_2 including $CrPO_4$ (out-of-pile tests) // Fusion Engineering and Design. – 2006. – V. 81. – Iss. 1–7. – P. 701–705
12. Влияние реакторного излучения на процесс проникновения изотопов водорода сквозь нержавеющую сталь SS316IG / Е.А. Кенжин, И.Л. Тажибаева, Т.В. Кульсартов, Е.В. Чихрай, В.П. Шестаков // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. – 2008. – Вып. 2. – С. 36–40.
13. Investigations of reactor irradiation influence on hydrogen isotopes yield from V_4Cr_4Ti vanadium alloy / E.A. Kenzhin, I.L. Tazhibayeva, Y.V. Chikhray, V.P. Shestakov, T.V. Kulsartov // Abstracts of 12th Intern. conf. on fusion reactor materials. – USA, Santa Barbara, December 4–9, 2005. – P. 124.
14. Реакторные экспериментальные исследования взаимодействия дейтерия с ванадиевым сплавом V_4Cr_4Ti / Т.В. Кульсартов, Ю.Н. Гордиенко, Н.И. Барсуков, Ю.В. Понкратов // Вестник НЯЦ РК. – 2007. – Вып. 3. – С. 80–85.

Поступила 14.01.2013 г.

UDC 621.039.553: 539.219.3

APPLICATION OF HYDROGEN PERMEATION METHOD IN REACTOR EXPERIMENTS ON INVESTIGATION OF HYDROGEN ISOTOPE INTERACTION WITH STRUCTURAL MATERIALS

Yury N. Gordienko,
Republic State Enterprise on the basis of economic control rights «National nuclear center of Republic of Kazakhstan», branch of «Atomic Energy Institute», Kazakhstan, 071100, Kurchatov, Krasnoarmeyskaya street, 10. E-mail: Gordienko@ nnc.kz

Timur V. Kulsartov,
Cand. Sc., State Enterprise on the basis of economic control rights «National nuclear center of Republic of Kazakhstan», branch of «Atomic Energy Institute», Kazakhstan, 071100, Kurchatov, Krasnoarmeyskaya street, 10. E-mail: Kulsartov@nnc.kz

Zhanna A. Zaurbekova,
State Enterprise on the basis of economic control rights «National nuclear center of Republic of Kazakhstan», branch of «Atomic Energy Institute», Kazakhstan, 071100, Kurchatov, Krasnoarmeyskaya street, 10. E-mail: Zaurbekova@nnc.kz

Yury V. Ponkratov,
State Enterprise on the basis of economic control rights «National nuclear center of Republic of Kazakhstan», branch of «Atomic Energy Institute», Kazakhstan, 071100, Kurchatov, Krasnoarmeyskaya street, 10. E-mail: Ponkranov@nnc.kz

Vyacheslav S. Gnyrya,
State Enterprise on the basis of economic control rights «National nuclear center of Republic of Kazakhstan», branch of «Atomic Energy Institute», Kazakhstan, 071100, Kurchatov, Krasnoarmeyskaya street, 10. E-mail: slava@nnc.kz

Nikolay N. Nikitenkov,
Dr. Sc., Tomsk Polytechnic University,
Russia, 634034, Tomsk, Lenin avenue, 30. E-mail: nikitenkov@tpu.ru

The relevance *of the study is caused by the necessity to develop methodical and instrumental bases for researching hydrogen isotope interaction with different materials under reactor irradiation.*
The main aim of the study *is to develop and to test the technique on determining hydrogen isotope interaction parameters with structural materials under reactor irradiation; to carry out the estimates and experiments confirming the possibility of using the technique.*
The methods used in the study: *thermophysical, neutron calculations methods of ampoule devices and method of hydrogen permeation were used.*
The results*: The paper introduces the principle concepts of material reactor investigation technique using the hydrogen permeation method, estimates of the technique applicability and the results of its application at the reactor experiments with structural materials, such as steel SS316L (N)-IG, vanadium alloy V4Cr4Ti and copper bronze CuCrZr.*

Key words:
Hydrogen permeation method, hydrogen, hydrogen isotopes, reactor irradiation, diffusivity, permeability, solubility.

REFERENCES

1. Baryakhtar V.G. *Vodorod v diffuzionnykh protsessakh khimiko-termicheskoy obrabotki metallov i splavov* [Hydrogen in diffusion processes of chemical-thermal processing of metals and alloys]. Kiev, Naukova dumka, 1989. 256 p.
2. Ageev V.N., Bekman I.N., Burmistrova O.P. *Vzaimodeystvie vodoroda s metallami* [Hydrogen interaction with metals]. Moscow, Nauka, 1987. 296 p.
3. OST 92–4949–84. *Otraslevoy standart. Metally. Metody opredeleniya vysokotemperaturnoy vodorodopronitsaemosti* [Sectorial standard 92–4949–84. Metals. Methods of determination of high-temperature hydrogen permeability]. Moscow, 1984. 35 p.
4. Pisarev A.A., Tsvetkov I.V., Marenkov E.D., Yarko S.S. *Pronitsaemost vodoroda cherez metally* [Hydrogen permeability through metals]. Moscow, MIFI, 2008. 144 p.
5. Crank J. *The mathematics of diffusion*. Oxford, Oxford University press, 1975. 425 p.
6. Gabis I.E., Kompaniets T.I., Kurdyumov A.A. Poverkhnostnye protsessy i vodorodopronitsaemost metallov [Surface processes and hydrogen permeability]. *Vzaimodeystvie vodoroda s metalla-*

mi [Hydrogen interaction with metals]. Moscow, Nauka, 1987. pp. 177–208.
7. Shvyryaev A.A., Bekman I.N. Diagrammnye bumagi dlya obrabotki rezultatov diffuzionnykh eksperimentov [Diagramed documents for processing diffusion experiment results]. *Bulletin of the Moscow State University*, 1981, vol. 22, no 5. 517.N:4647–80 dep. VINITI from 03.11.1980.
8. Kunin L.L., Golovin A.M. *Problemy degazatsii metallov (fenomenologicheskaya teoriya)* [Issues of metals degassing (phenomenological theory)]. Moscow, Nauka, 1972. 324 p.
9. Tazhibaeva I.L., Chikhray E.V. *Chislennoe modelirovanie diffuzii gazov v tverdykh telakh pri obluchenii* [Numerical modeling of gas diffusion in solids under irradiation]. Almaty, Kazakhuniversitety, 1999. 77 p.
10. Kulsartov T.V., Kenzhin E.A., Shestakov V.P. In-pile tritium permeation through F82H steel with and without a ceramic coating of Cr_2O_3–SiO_2 including $CrPO_4$. *Fusion Engineering and Design*, 2007, vol. 82, Iss. 15–24, pp. 2246–2251.
11. Kulsartov T.V., Kenzhin E.A., Shestakov V.P. Investigation of hydrogen isotope permeation through F82H steel with and without a ceramic coating of Cr_2O_3–SiO_2 including $CrPO_4$ (out-of-pile tests). *Fusion Engineering and Design*, 2006, vol. 81, Iss. 1–7, pp. 701–705.
12. Kenzhin E.A., Tazhibayeva I.L., Kulsartov T.V., Chikhray Y.V., Shestakov V.P. Vliyanie reaktornogo izlucheniya na protsess proniknoveniya izotopov vodoroda skvoz nerzhaveyushchuyu stal SS316IG [Influence of reactor irradiation on hydrogen isotopes permeation through stainless steel SS316IG]. *VANT, Thermonuclear fusion*, 2008, vol. 2, pp. 36–40.
13. Kenzhin E.A., Tazhibayeva I.L., Chikhray Y.V., Shestakov V.P., Kulsartov T.V. Investigations of reactor irradiation influence on hydrogen isotopes yield from V_4Cr_4Ti vanadium alloy. *ICFRM 2005: Abstracts of 12th Intern. conf. on fusion reactor materials.* Santa Barbara, USA, December 4–9, 2005. pp. 124.
14. Kulsartov T.V., Gordienko Yu.N., Barsukov N.I., Ponkratov Yu.V. Reaktornye eksperimentalnye issledovaniya vzaimodeystviya deyteriya s vanadievym splavom V_4Cr_4Ti [In-pile experimental researches of deuterium interaction with V_4Cr_4Ti vanadium alloy]. *Bulletin of National Nuclear Center of RK*, 2007, vol. 3, pp. 80–85.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Принимаются статьи, подготовленные в MS Word-2003 (файл и распечатка). Статья должна быть подписана авторами и иметь сопроводительное письмо на бланке организации.

Объем статьи не менее 8 стр., но не более 20 стр., включая рисунки и таблицы, размещенные в тексте по упоминанию. Размер бумаги А4, поля по 25 мм. Текст в 1 интервал **без переносов, лишних пробелов и абзацных интервалов**, шрифт Times New Roman, 12 пунктов. Файлы рисунков (в градациях серого) в jpg, tif, cdr или иных форматах редакторов Photoshop, Corel Draw с разрешением 300 dpi прилагаются к статье. Рисунки и таблицы: **Рис. 1.** Название; **Таблица.** Название. Кавычки вида «...». Интервалы – 1,2...1,8 мм или 5–7 шт. Формулы – в MathType, настройка по умолчанию. Нумеруются только те формулы, на которые есть ссылка в тексте.

Курсивом – буквы латинского и греческого алфавита, кроме входящих в имена собственные, обозначения стандартных математических функций и химических элементов ($U_{пр.}$, $Ф_i$, но $A1_2O_3$, $\cos\alpha_i$ max, lg, «BASF»). Векторы – полужирным курсивом. Список литературы – по ГОСТ Р 7.0.5–2008 (см. пример). Литература – по упоминанию: [1, 2], [2. С. 245], [3-7]. Список литературы должен включать не менее 20 источников.

УДК 621.37 (Пример оформления статьи)

АНАЛИЗ РАБОТЫ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ
(название на английском языке)

Петров Иван Иванович, канд. техн. наук, доцент каф. обработки металлов давлением факультета стандартизации, химии и биотехнологии ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Россия, 455000, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 38. E-mail: vip111@yandex.ru
Иванов Андрей Андреевич, д-р хим. наук, профессор каф. химической технологии топлива и химической кибернетики Института природных ресурсов ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30. E-mail: iip@tpu.ru

Показана возможность расчета ... Установлено, что ... Сделан вывод о том, что ... (Аннотация, 10 кегль, 100–150 слов).

Ключевые слова: (ниже ключевые слова на английском языке)
Усилительный каскад, регулировка тока

В [1, 2] показано, что усилительный каскад с автоматической регулировкой потребляемого тока (АРПТ) позволяет получить ...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фамилия И.О. Название книги. – М.: Издательство, 2014. – 123 с.
2. Название книги / под ред. И.О. Фамилия. – М.: Издательство, 2014. – 123 с.
3. Фамилия И.О. Название статьи // Журнал. – 2014. – Т. 316. – № 1. – С. 71–77.
4. Фамилия И.О. Название диссертации: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 19 с.
5. Название изобретения: пат. 2000000 Рос. Федерация. № 2009129009/10; заявл. 27.07.13; опубл. 10.10.14, Бюл. № 4. – 3 с.
6. Фамилия И.О. Название статьи // Наименование конференции: Труды VII Междунар. научно-практ. конф. молодых ученых. – Томск, 2014. – Т. 1. – С. 226–228.
7. Фамилия И.О. Название статьи // Наименование ресурса. 2013. URL: http://www.tpu.ru/htm1/izvestia.htm (дата обращения: 25.09.2014).

REFERENCES

Поступила 25.01.2013 г.

Руководство для авторов и образец оформления статьи: **http://portal.tpu.ru/izvestiya**

Редактирование *А.С. Глазырин*
Компьютерная верстка *О.Ю. Аршинова*
Перевод на англ. язык и корректура *С.В. Жаркова*

Подписано к печати 27.02.2014. Формат 60x84/8. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 18,96. Уч.-изд. л. 17,15.
Заказ 127-14. Тираж 500 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета
сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822) 563-291, www.tpu.ru, izv@tpu.ru