УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С МАРКОВСКИМИ СКАЧКАМИ

М.В. Самородова, Т.Ю. Пашинская
Научный руководитель: профессор, д.т.н. В.В. Домбровский
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: samorodova21@gmail.com

MODEL PREDICTIVE CONTROL OF MARKOVIAN JUMP NONLINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

M.V. Samorodova, T.Y. Pashinskaya
Scientific Supervisor: Prof., Dr. V.V. Dombrovskii
National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: samorodova21@gmail.com

Abstract. *In this paper we consider model predictive control for a class of constrained discrete-time Markovian switching systems consisting of a family of nonlinear stochastic subsystems whose nonlinear stochastic term for a particular mode is described by its statistical properties. The additive nonlinearity of the subsystems is allowed to contain state, input, and independent noise vectors. It is allowed also that hard constraints are imposed on the input manipulated variables.*

Введение. Моделями с марковскими скачкообразными параметрами описывается широкий класс реальных систем [1]. Эффективным подходом к синтезу систем управления с ограничениями, получившим широкое признание и применение в практике управления сложными технологическими процессами, является метод управления с прогнозирующей моделью [2, 3]. Применению данного метода к управлению дискретными системами с марковскими скачками посвящены работы [4-6]. В работе [5] рассматривается задача управления по квадратичному критерию дискретными нелинейными системами при условии, что от состояния марковской цепи зависит только матрица управления системы. В работе [6] ставится задача управления линейной системой, при этом от состояния цепи зависит не только матрица управления, но и матрица динамики системы.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных в [6], на случай нелинейных дискретных систем. Найдены уравнения синтеза оптимальных стратегий управленияс учетом «жестких» ограничений на управляющие переменные.

Постановка задачи. Пусть объект управления описывается уравнением

$$x(k+1) = A[\theta(k+1),k+1]x(k) + B[\theta(k+1),k+1]u(k) + f(x(k),u(k),w(k+1),\theta(k+1)), \qquad (1)$$

$$A[\theta(k+1),k+1] = \sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k+1)A^i(k+1),\ B[\theta(k+1),k+1] = \sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k+1)B^i(k+1),$$

$$f(x(k),u(k),w(k+1),\theta(k+1)) = \sum_{i=1}^{\nu}\theta_i(k+1)f^i(x(k),u(k),w(k+1)),$$

$A^i(k) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B^i(k) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_u}$, $x(k)$ – n_xмерный вектор состояния, $u(k)$ – n_u-мерный вектор управления, $w(k)$ – вектор белых шумов размерности n_w с нулевым средним и единичной матрицей ковариации, $\theta_i(k)$

(i=1,2,…,ν) – компоненты вектора $\theta(k)$, $\theta(k)=[\delta(\alpha(k),1),\ldots,\delta(\alpha(k),\nu)]^{\mathrm{T}}$, $\delta(\alpha(k),j)$ – функция Кронекера $(j=\overline{1,\nu})$, {α(k); k=0,1,2,…} – однородная дискретная марковская цепь с конечным множеством состояний {1,2, … ν} и известной матрицей переходных вероятностей $P=\left[P_{i,j}\right]$.

Вектор $\theta(k)$ допускает следующее представление в пространстве состояний [7]: $\theta(k+1)=P\theta(k)+\upsilon(k+1)$, где $\left\{\upsilon(k)\right\}$ – последовательность мартингал-разностей.

Нелинейные функции f^i обладают следующими характеристиками:

$$E\left\{f^i(x(k),u(k),w(k+1))/x(k)\right\}=0,$$

$$E\left\{f^i(x(k),u(k),w(k+1))f^i\left(x(k),u(k),w(k+1)\right)^{\mathrm{T}}/x(k)\right\}=T_0^i+\sum_{j=1}^{r}T_j^i\left(x^{\mathrm{T}}(k)W_j^ix(k)+u^{\mathrm{T}}(k)M_j^iu(k)\right),$$

где $r=n_x(n_x+1)/2, T_0^i\ T_j^i, W_j^i$ и $M_j^i\ (j=\overline{1,r}, i=\overline{1,\nu})$ – неотрицательно определенные симметричные матрицы. Предполагается, что состояние марковской цепи в момент времени k доступно наблюдению. Последовательности $w(k)$ и $\theta(k)$ независимы.

На управляющие воздействия наложены ограничения вида:

$$u_{\min}(k)\le S(k)u(k)\le u_{\max}(k), \tag{2}$$

где $S(k)\in\mathbb{R}^{q\times n_u}, u_{\min}(k), u_{\max}(k)\in\mathbb{R}^q$. Необходимо определить закон управления системой (1) при ограничениях (2) из условия минимума критерия со скользящим горизонтом управления

$$J(k+m/k)=E\left\{\sum_{i=1}^{m}x^{\mathrm{T}}(k+i)R_1(k+i)x(k+i)+u^{\mathrm{T}}(k+i-1/k)R(k+i)u(k+i-1/k)/x(k),\theta(k)\right\} \tag{3}$$

где $E\{\ldots/\ldots\}$ – оператор условного математического ожидания; m – горизонт прогноза, k – текущий момент времени; $R_1(k+i)\ge 0, R(k+i)>0$ – весовые матрицы соответствующих размерностей.

Синтез стратегий прогнозирующего управления. Для решения сформулированной задачи используем методологию управления с прогнозирующей моделью.

Теорема. Стратегия прогнозирующего управления с горизонтом прогноза m, минимизирующая критерий (3) при ограничениях (2) на каждом шаге k равна $u(k)=\left[I_{n_u}\quad 0_{n_u}\quad\ldots\quad 0_{n_u}\right]U(k)$, где I_{n_u} – единичная матрица размерности n_u, 0_{n_u} – квадратная нулевая матрица размерности n_u, $U(k)=[u^{\mathrm{T}}(k/k),\ldots,u^{\mathrm{T}}(k+m-1/k)]^{\mathrm{T}}$ – вектор прогнозирующих управлений, который определяется из решения задачи квадратичного программирования с критерием вида: $Y(k+m/k)=2x^T(k)G(k)U(k)+U^T(k)H(k)U(k)$, при ограничениях $U_{\min}(k)\le\overline{S}(k)U(k)\le U_{\max}(k)$, где

$$\overline{S}(k)=diag(S(k),\ldots,S(k+m-1))$$

$$U_{\min}(k)=\left[u_{\min}^{\mathrm{T}}(k),\ldots,u_{\min}^{\mathrm{T}}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}}, U_{\max}(k)=\left[u_{\max}^{\mathrm{T}}(k),\ldots,u_{\max}^{\mathrm{T}}(k+m-1)\right]^{\mathrm{T}},$$

$H(k)$ и $G(k)$ –блочные матрицы, блоки которых равны:

$$H_{t,t}(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}(k+t)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t)}(k)B^{i_t}(k+t)+\sum_{j=1}^{r}tr\{Q^{(i_t)}(k)T_j^{i_t}\}M_j^{i_t}+R(k+t-1), t=\overline{1,m-1}$$

$$H_{t,s}(k)=\sum_{i_s=1}^{\nu}\ldots\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\sum_{i_t=1}^{\nu}\left(B^{i_t}(k+t)\right)^{\mathrm{T}}\left(A^{i_{t+1}}(k+t+1)\right)^{\mathrm{T}}\ldots\left(A^{i_s}(k+s)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\ldots,i_s)}(k)B^{i_s}(k+s), s>t,$$

$$G_t(k)=\sum_{i_t=1}^{\nu}\ldots\sum_{i_1=1}^{\nu}\left(A^{i_1}(k+1)\right)^{\mathrm{T}}\ldots\left(A^{i_t}(k+t)\right)^{\mathrm{T}}Q^{(i_1,\ldots,i_t)}(k)B^{i_t}(k+t),t=\overline{1,m},$$

матрицы $Q^{(i_t,\ldots,i_s)}(k)$ $(s,t=\overline{1,m})$ определяются следующими выражениями:

$$Q^{(i_t,\ldots,i_s)}(k)=\Theta_{i_t,\ldots,i_s}(k)R_1(k+s)+\sum_{i_{s+1}=1}^{\nu}(A^{i_{s+1}}(k+s+1))^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,\ldots,i_{s+1})}(k)\times$$

$$\times A^{i_{s+1}}(k+s+1)+\sum_{i_{s+1}=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{r}tr\{Q^{(i_t,\ldots,i_{s+1})}(k)T_j^{i_{s+1}}\}W_j^{i_{s+1}},t=\overline{1,m-2},t<s<m\,,$$

$$Q^{(i_t)}(k)=L_{i_t}P^t\theta(k)R_1(k+t)+\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}(A^{i_{t+1}}(k+t+1))^{\mathrm{T}}Q^{(i_t,i_{t+1})}(k)A^{i_{t+1}}(k+t+1)+$$

$$+\sum_{i_{t+1}=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{r}tr\{Q^{(i_t,i_{t+1})}(k)T_j^{i_{t+1}}\}W_j^{i_{t+1}},t=\overline{1,m-1}\,,\ Q^{(i_m)}(k)=L_{i_m}P^m\theta(k)R_1(k+m),$$

с начальными условиями $Q^{(i_t,\ldots,i_m)}(k)=\Theta_{i_t,\ldots,i_m}(k)R_1(k+m),t=\overline{1,m-1}$, где $\Theta_{i_t,\ldots,i_s}(k)=P_{i_s,i_{s-1}}P_{i_{s-1},i_{s-2}}\ldots P_{i_{t+1},i_t}\theta_{i_t}(k+t/k),t=\overline{1,m-1},s>t,$ $\theta_{i_t}(k+t/k)$ - компоненты вектора $\theta(k+t/k)=E\{\theta(k+t)/\theta(k)\}=P^t\theta(k),\ L_{i_t}=[0,\ldots,0,1,0,\ldots,0]_{1\times\nu},i_t=\overline{1,\nu},t=\overline{1,m}.$

Заключение. В данной работе предложен метод синтеза стратегий прогнозирующего управления по квадратичному критерию длянелинейных дискретных систем с марковскими скачками. Данный подход позволяет в явном виде учесть ограничения на управления. Алгоритм синтеза прогнозирующей стратегии управления включает решение последовательности задач квадратичного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пакшин П.В. Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. – М: Физматлит, 1994.
2. Dombrovskii, V., Obyedko, T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization // Automatica.– 2015. –No. 54.– P. 325-331.
3. Rawlings J. Tutorial: Model Predictive Control Technology // Proc. Amer. Control Conf. San Diego. – California, June 1999. – P. 662–676.
4. Costa O.L.V., Oliveira A. Optimal mean-variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises // Automatica.– 2012.– Vol. 48.– No. 2.– P. 304–315
5. Домбровский В.В., Объедко Т.Ю, Самородова М.В. Управление с прогнозированием нелинейными стохастическими системами с марковскими скачками при ограничениях // Вестник Томского государственного университета: управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 3. С. 14–22.
6. Домбровский В.В., Самородова М.В. Управление с прогнозированием по квадратичному критерию линейными дискретными системами с марковскими скачками при ограничениях // Вестник Томского государственного университета: управление, вычислительная техника и информатика. 2016. № 1. С. 4–10.
7. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. Hidden Markov Models: Estimation and Control. Berlin: Springer-Verlag, 1995.