СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Safronova I.E. About structure of Shannon information amount for joint filtering and extrapolation problem by continuous-discrete memory observations // Informatica. – 2004. – V.15. – № 2. – P. 171–202.
4. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Проблемы передачи информации. – 1974. – № 4. – С. 3–15.

Поступила 03.10.2012 г.

УДК 519.2

ОПТИМАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНАЯ ПЕРЕДАЧА СИГНАЛА ПО КАНАЛАМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.В. Рожкова

Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматривается задача оптимальной передачи стохастических процессов по непрерывно-дискретным каналам с запаздыванием. Доказываются экстремальные свойства оптимальных кодирований в смысле максимизации количества информации.

Ключевые слова:
Сигнал, стохастические системы, канал передачи, кодирование, декодирование.

Key words:
Signal, stochastic system, transmission channel, coding, decoding.

1. Постановка задачи

Сигнал x_t, сообщение на выходе канала передачи z_t и сообщение на выходе дискретного канала передачи $\eta(t_m)$ задаются на реализациях процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями

$$dx_t = F(t)x_t dt + \Phi_1(t)dw_t,$$
$$p_0(x) = \mathbf{N}\{x;\mu_0,\gamma_0\}, \qquad (1)$$

$$dz_t = h(t,x_\tau,z)dt + \Phi_2(t)dv_t, \qquad (2)$$

$$\eta(t_m) = g(t_m,x_\tau,z) + \Phi_3(t_m)\xi(t_m),$$

$0\le t_0<\tau\le t_m\le t$, т. е. в отличие от [1] в данной работе рассматривается случай непрерывно-дискретной передачи с запаздыванием, когда в непрерывном и дискретном каналах передаются прошлые значения x_τ процесса x_t при наличии мгновенной бесшумной обратной связи по процессу z_t.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $\mathbf{M}\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $\mathbf{N}\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $\Phi_1^2(t)=Q(t)$, $\Phi_2^2(t)=R(t)$, $\Phi_3^2(t_m)=V(t_m)$.

Задача: в классе кодирующих функционалов $\mathbf{K}^1=\{\mathbf{H}^1;\mathbf{G}^1\}=\{h\{\cdot\},g\{\cdot\}\}$, удовлетворяющих энергетическим ограничениям

$$\mathbf{M}\{h^2(t,x_\tau,z)\} \le \tilde{h}(t),$$
$$\mathbf{M}\{g^2(t_m,x_\tau,z)\} \le \tilde{g}(t_m), \qquad (3)$$

найти функционалы $h^0\{\cdot\}$ и $g^0\{\cdot\}$, обеспечивающие относительно задачи фильтрации минимальную ошибку декодирования $\Delta^0(t)=\inf\Delta(t)$, где $\Delta(t)=\mathbf{M}\{[x_t-\hat{x}(t,z,\eta)]^2\}$ является ошибкой оценки фильтрации $\hat{x}(t,z,\eta)$ процесса x_t, которая соответствует принятому сообщению $\{z_0^t;\ \eta_0^m\}$ при заданных $h\{\cdot\}$, $g\{\cdot\}$. Так как при заданных $h\{\cdot\}$ и $g\{\cdot\}$ оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой фильтрации является апостериорное среднее $\mu(t)=\mathbf{M}\{x_t|z_0^t,\eta_0^m\}$ [2], то $\Delta(t)\ge\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$, где $\gamma(t)\ge\mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)]^2|z_0^t,\eta_0^m\}$. Таким образом, $\Delta^0(t)=\inf\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$.

2. Основные результаты

Замечание 1. Очевидно, что до момента τ, где $0\le t_0<\tau\le t_m\le t$, мы имеем $h(\cdot)=h(t,x_t,z)$, $g(\cdot)=h(t_m,x_{t_m},z)$, т. е. передаются текущие значения процесса x_t, справедливо Замечание 2 из [1]. Считаем, что при $\tau<t$ передача шла оптимальным способом согласно этому Замечанию.

Теорема 1. На классе $\mathbf{K}_l^1=\{\mathbf{H}_l^1;\mathbf{G}_l^1\}$ линейных функционалов

$$\mathbf{H}_l^1 = \{h(\cdot): h(t,x_\tau,z) = h(t,z) + H_1(t,z)x_\tau\}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{G}_l^1 = \{g(\cdot): g(t_m,x_\tau,z) = g(t_m,z) + G_1(t_m,z)x_\tau\}:$$

1) оптимальные кодирующие функционалы $h^0(t,x_\tau,z^0)$, $g^0(t_m,x_\tau,z^0)$ имеют представления

$$h^0(t,z^0) = -H_1^0(t,z^0)\mu^0(\tau,t),$$
$$H_1^0(t,z^0) = [\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}, \qquad (5)$$

$$g^0(t_m,z^0) = -G_1^0(t_m,z^0)\,\mu^0(\tau,t_m-0),$$
$$G_1^0(t_m,z^0) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}, \qquad (6)$$

2) оптимальное сообщение $\{z_t^0;\ \eta^0(t_m)\}$ определяется соотношениями

$$dz_t^0 = [\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}[x_\tau - \mu^0(\tau,t)]dt + \Phi_2(t)dv_t, \quad (7)$$

$$\eta^0(t_m) = [\tilde{g}(t_m)/\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[x_\tau - \mu^0(\tau,t_m-0)]dt + \Phi_3(t_m)\xi(t_m); \qquad (8)$$

3) оптимальное декодирование $\mu^0(t)$ и минимальная ошибка декодирования $\Delta_0(t)$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$, определяются уравнениями

$$d\mu^0(t) = F(t)\mu^0(t)dt +$$
$$+R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)/\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}\Delta_{01}^0(\tau,t)dz_t^0, \qquad (9)$$

$$d\Delta^0(t)/dt =$$
$$=\begin{pmatrix} 2F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\times \\ \times[(\Delta_{01}^0(\tau,t))^2/\Delta^0(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)] \end{pmatrix}\Delta^0(t) + Q(t) \qquad (10)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(t_m) = \mu^0(t_m-0) +$$
$$+\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0)[\tilde{g}(t_m)\Delta_{11}^0()\tau,t_m-0]^{1/2}\times$$
$$\times[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m), \qquad (11)$$

$$\Delta^0(t_m) = \Delta^0(t_m-0)\frac{V(t_m)}{[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)}\left(1-\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta^0(t_m-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)}\right)\right], \qquad (12)$$

где $Q(t)=\Phi_1^2(t),\ R(t)=\Phi_2^2(t),\ V(t_m)=\Phi_3^2(t_m)$;

4) $$\mu^0(\tau,t) = \mathbf{M}\{x_\tau\,|(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m\},$$
$$\Delta_{11}^0(\tau,t) = \mathbf{M}\{[x_\tau - \mu^0(\tau,t)]^2\},$$
$$\Delta_{01}^0(\tau,t) = \mathbf{M}\{[x_t - \mu^0(t)][x_\tau - \mu^0()\tau,t]\}$$

на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$d\mu^0(\tau,t) = R^{-1}(t)[\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)]^{1/2}dz_t^0, \qquad (13)$$

$$d\Delta_{11}^0(\tau,t)/dt = -R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\Delta_{11}^0(\tau,t), \qquad (14)$$

$$d\Delta_{01}^0(\tau,t)/dt = [F(t) - R^{-1}(t)\tilde{h}(t)]\Delta_{01}^0(\tau,t) \qquad (15)$$

с начальными условиями

$$\mu^0(\tau,t_m) = \mu^0(\tau,t_m-0) +$$
$$+[\tilde{g}(t_m)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)]^{1/2}\times$$
$$\times[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\eta^0(t_m), \qquad (16)$$

$$\Delta_{11}^0(\tau,t_m) = V(t_m)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0), \quad (17)$$

$$\Delta_{01}^0(\tau,t_m) = V(t_m)[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]^{-1}\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0). \quad (18)$$

Доказательство:

При заданных $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}_l^1$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ (см. [1]) $\mu(t)$ и $\gamma(t)$ определяются уравнениями

$$d\mu(t) = F(t)\mu(t)dt + R^{-1}(t)H_1(t,z)\gamma_{01}(\tau,t)dz_t, \quad (19)$$

$$d\gamma(t)/dt =$$
$$= 2F(t)\gamma(t) - R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\gamma_{01}^2(\tau,t) + Q(t) \qquad (20)$$

с начальными условиями

$$\mu(t_m) = \mu(t_m-0) + G_1(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)\times$$
$$\times[V(t_m)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)]^{-1}\tilde{\eta}(t_m), \qquad (21)$$

$$\gamma(t_m) = \gamma(t_m-0) - G_1^2(t_m,z)\gamma_{01}^2(\tau,t_m-0)\times$$
$$\times[V(t_m)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)]^{-1}, \qquad (22)$$

где

$$\mu(\tau,t) = \mathbf{M}\{x_\tau\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\gamma_{01}(\tau,t) = \mathbf{M}\{[x_t-\mu(t)][x_\tau-\mu(\tau,t)]\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$\gamma_{11}(\tau,t) = \mathbf{M}\{[x_\tau-\mu(\tau,t)]^2\,|z_0^t,\eta_0^m\},$$
$$d\tilde{z}_t = dz_t - [h(t,z)+H_1(t,z)\mu(\tau,t)]dt, \qquad (23)$$

$$\tilde{\eta}(t_m) = \eta(t_m) - [g(t_m,z)+G_1(t_m,z)\mu(\tau,t_m-0)].$$

Так как $\mathbf{M}\{\cdot\}=\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{|z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\}\}$ [2], то использование (4) в (3) дает

$$\mathbf{M}\{g^2(\cdot)\} =$$
$$= \mathbf{M}\{[g(t_m,z)+G_1g(t_m,z)\mu(\tau,t_m-0)]^2\} +$$
$$+\mathbf{M}\{G_1^2g(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)\} \le \tilde{g}(t_m). \qquad (24)$$

Формула (22) может быть представлена в виде

$$\gamma(t_m) = \gamma(t_m-0) - \frac{\gamma_{01}^2(\tau,t_m-0)}{\gamma_{11}(\tau,t_m-0)} + \frac{\gamma_{01}^2(\tau,t_m-0)}{\gamma_{11}(\tau,t_m-0)}\times$$
$$\times\frac{V(t_m)}{[V(t_m)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)]}. \qquad (25)$$

Пусть до момента $t<t_m$ передача шла оптимальным способом. Тогда $\gamma(t_m-0)$, $\gamma_{11}(\tau,t_m-0)$ и $\gamma_{01}(\tau,t_m-0)$ могут быть заменены на $\Delta(t_m-0)$, $\Delta_{11}(\tau,t_m-0)$ и $\Delta_{01}(\tau,t_m-0)$, которые не являются случайными. В этом случае из (24), (25) для $\Delta(t_m)=\mathbf{M}\{\gamma(t_m)\}$ с учетом неравенства Иенсена $\mathbf{M}\{Y^{-1}\}\ge(\mathbf{M}\{Y\})^{-1}$ [2] получаем

$$\Delta(t_m) \ge \Delta^0(t_m-0) + \frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)} +$$
$$+\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)}\frac{V(t_m)}{[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]} =$$
$$= \Delta^0(t_m-0)\frac{V(t_m)}{[V(t_m)+\tilde{g}(t_m)]}\times$$
$$\times\left[1+\frac{\tilde{g}(t_m)}{V(t_m)}\left(1-\frac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta^0(t_m-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)}\right)\right]. \qquad (26)$$

Использование (6) в (25) дает, что $\gamma^0(t_m)=\Delta^0(t_m)$, которое определяется формулой (12). Из (12), (26) следует, что совпадение $\gamma^0(t_m)$ с нижней границей для $\Delta(t_m)$ доказывает оптимальность кодирования (6), а (8), (11), (12) следуют в результате подстановки (6) в (2), (21), (22) с учетом (23). При заданных $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}_l^1$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ (см. [3])

$$d\mu(\tau,t)=R^{-1}(t)H_1(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)d\tilde{z}_t, \qquad (27)$$

$$d\gamma_{11}(\tau,t)/dt=-R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\gamma_{11}^2(\tau,t), \qquad (28)$$

$$d\gamma_{01}(\tau,t)/dt= =[F(t)-R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)]\gamma_{01}(\tau,t) \qquad (29)$$

с начальными условиями

$$\mu(\tau,t_m)=\mu(\tau,t_m-0)+G_1(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)\times \times[V(t_m)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)]^{-1}\tilde{\eta}(t_m), \qquad (30)$$

$$\gamma_{11}(\tau,t_m)=\gamma_{11}(\tau,t_m-0)-G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}^2(\tau,t_m-0)\times \times[V(t_m)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)]^{-1}, \qquad (31)$$

$$\gamma_{01}(\tau,t_m)=\gamma_{01}(\tau,t_m-0)- -G_1^2(t_m,z)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)\gamma_{01}(\tau,t_m-0)\times \times[V(t_m)+G_1^2(t_m,z)\gamma_{11}(\tau,t_m-0)]^{-1}. \qquad (32)$$

Подстановка (6) в (30)–(32) с учетом (23) дает (16)–(18).

Представим уравнение (20) в виде

$$d\gamma(t)/dt= =\begin{pmatrix}2F(t)-R^{-1}(t)H_1^2(t,z)\times\\ \times\gamma_{11}(\tau,t)\left[\gamma_{01}^2(\tau,t)/\gamma(t)\gamma_{11}(\tau,t)\right]\end{pmatrix}\gamma(t)+Q(t). \qquad (33)$$

Пусть до момента $t<t_m$ передача шла оптимальным способом. Тогда дифференциальное уравнение (33) на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ эквивалентно интегральному уравнению

$$\gamma(t)=\Delta^0(t_m)\times \times\exp\left\{\int_{t_m}^{t}\begin{pmatrix}2F(\sigma)-R^{-1}(\sigma)H_1^2(\sigma,z)\times\\ \times\gamma_{11}(\tau,\sigma)\left[\dfrac{\gamma_{01}^2(\tau,\sigma)}{\gamma(\sigma)\gamma_{11}(\tau,\sigma)}\right]\end{pmatrix}d\sigma\right\}+ \int_{t_m}^{t}Q(\sigma)\times \times\exp\left\{\int_{t_m}^{t}\begin{pmatrix}2F(u)-R^{-1}(u)H_1^2(u,z)\times\\ \times\gamma_{11}(\tau,u)\left[\dfrac{\gamma_{01}^2(\tau,u)}{\gamma(u)\gamma_{11}(\tau,u)}\right]\end{pmatrix}du\right\}d\sigma, \qquad (34)$$

справедливость которого устанавливается дифференцированием по t. Так как $\mathbf{M}\{\cdot\}=\mathbf{M}\{\mathbf{M}\{\cdot|z_0^{t_m},\eta_0^{m}\}\}$ [2], то использование (4) в (3) дает

$$\mathbf{M}(h^2(\cdot))=\mathbf{M}\{[h(t,z)+H_1()t,z\mu(\tau,t)]^2\}+ +\mathbf{M}\{H_1^2(t,z)\gamma_{11}(\tau,t)\}\le\tilde{h}(t_m). \qquad (35)$$

Использование неравенства Иенсена $\mathbf{M}\{\varphi(Y)\}\ge\varphi(\mathbf{M}\{Y\})$ [2] для выпуклой функции $\varphi(y)=\exp\{y\}$ в (34) приводит к неравенству для $\Delta(t)=\mathbf{M}\{\gamma(t)\}$ вида

$$\Delta(t)\ge\Delta^0(t_m)\times \times\exp\left\{\int_{t_m}^{t}\begin{pmatrix}2F(\sigma)-R^{-1}(\sigma)H_1^2(\sigma,z)\times\\ \times\mathbf{M}\left\{\gamma_{11}(\tau,\sigma)\left[\dfrac{\gamma_{01}^2(\tau,\sigma)}{\gamma(\sigma)\gamma_{11}(\tau,\sigma)}\right]\right\}\end{pmatrix}d\sigma\right\}+ +\int_{t_m}^{t}Q(\sigma)\times \times\exp\left\{\int_{t_m}^{t}\begin{pmatrix}2F(u)-R^{-1}(u)\times\\ \times\mathbf{M}\begin{Bmatrix}H_1^2(u,z)\times\\ \times\gamma_{11}(\tau,u)\left[\dfrac{\gamma_{01}^2(\tau,u)}{\gamma(u)\gamma_{11}(\tau,u)}\right]\end{Bmatrix}\end{pmatrix}du\right\}d\sigma, \qquad (36)$$

Использование (5) в (20), (28), (29) приводит к уравнениям для $\gamma^0(t)$, $\gamma_{11}^0(\tau,t)$, $\gamma_{01}^0(\tau,t)$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ вида

$$d\gamma^0(t)/dt= =\begin{pmatrix}2F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\times\\ \times\left[\dfrac{(\gamma_{01}^0(\tau,t))^2}{\gamma^0(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)}\right]\end{pmatrix}\gamma^0(t)+Q(t), \qquad (37)$$

$$\gamma^0(t_m)=\Delta^0(t_m),$$

$$d\gamma_{11}^0(\tau,t)/dt=-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)[(\gamma_{11}^0(\tau,t))^2/\Delta_{11}^0(\tau,t)], \qquad (38)$$

$$\gamma_{11}^0(\tau,t_m)=\Delta_{11}^0(\tau,t_m),$$

$$d\gamma_{01}^0(\tau,t)/dt=\begin{pmatrix}F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\times\\ \times[(\gamma_{11}^0(\tau,t))^2/\Delta_{11}^0(\tau,t)]\end{pmatrix}\gamma_{01}^0(\tau,t), \qquad (39)$$

$$\gamma_{01}^0(\tau,t_m)=\Delta_{01}^0(\tau,t_m).$$

Уравнения (37)–(39) дают, что $\gamma^0(t)$, $\gamma_{11}^0(\tau,t)$, $\gamma_{01}^0(\tau,t)$ являются не случайными величинами. Согласно (35), получаем $\mathbf{M}\{H_1^2(t,z)\}\gamma_{11}^0(\tau,t)\le\tilde{h}(t)$. Тогда из (36) следует

$$\Delta(t)\ge\Delta^0(t_m)\times \times\exp\left\{\int_{t_m}^{t}\begin{pmatrix}2F(\sigma)-R^{-1}(\sigma)\tilde{h}(\sigma)\times\\ \times\left[\dfrac{(\gamma_{01}^0(\tau,\sigma))^2}{\gamma^0(\sigma)\gamma_{11}^0(\tau,\sigma)}\right]\end{pmatrix}d\sigma\right\}+ +\int_{t_m}^{t}Q(\sigma)\times \times\exp\left\{\int_{t_m}^{t}\begin{pmatrix}2F(u)-R^{-1}(u)\tilde{h}(u)\times\\ \times\left[\dfrac{(\gamma_{01}^0(\tau,u))^2}{\gamma^0(u)\gamma_{11}^0(\tau,u)}\right]\end{pmatrix}du\right\}d\sigma. \qquad (40)$$

Пусть $\Delta^0(t)$ – правая часть (40). Тогда дифференцирование по t дает, что $\Delta^0(t)$ определяется уравнением

$$d\Delta^0(t)/dt= =\begin{pmatrix}2F(t)-R^{-1}(t)\tilde{h}(t)\times\\ \times[(\gamma_{01}^0(\tau,t))^2/\gamma^0(t)\gamma_{11}^0(\tau,t)]\end{pmatrix}\Delta^0(t)+Q(t), \qquad (41)$$

$$\Delta^0(t)\big|_{t=t_m}=\Delta^0(t_m).$$

Из (14), (38) и (15), (39) следует, что решения этих уравнений совпадают, т. е. $\gamma_{11}{}^0(\tau,t)=\Delta_{11}{}^0(\tau,t)$, $\gamma_{01}{}^0(\tau,t)=\Delta_{01}{}^0(\tau,t)$. Поэтому решения (37) и (41), (10) также совпадают, т. е. $\gamma^0(t)=\Delta^0(t)$. Совпадение $\gamma^0(t)$ с нижней границей для $\Delta(t)$ доказывает оптимальность кодирования (5). Уравнения (7), (9), (13) следуют в результате подстановки (5) в (2), (19), (27). Справедливость данного результата для произвольного интервала времени $\tau\le t_m\le t<t_{m+1}$ следует по индукции с учетом Замечания [1] и Замечания 2 из [1].

Теорема 2. Пусть $I_t^0[x_t;(z^0),(\eta^0)_0{}^m]$ есть количество информации, достигаемое на кодирующих функционалах (5), (6). Тогда имеет место свойство

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=\sup I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m], \tag{42}$$

где sup берется по всем $\{h(\cdot);g(\cdot)\}\in\mathbf{K}_l^1$ и

$$I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\tau\le t_i\le t}\ln\left(\begin{matrix}\left[1+\dfrac{\tilde g(t_i)}{V(t_i)}\right]\times\\ \times\left[\begin{matrix}1+\dfrac{\tilde g(t_i)}{V(t_i)}\times\\ \times\left(1-\dfrac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_i-0))^2}{\Delta^0(t_i-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_i-0)}\right)\end{matrix}\right]^{-1}\end{matrix}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_\tau^t\left[\begin{matrix}\dfrac{\tilde h(\sigma)}{R(\sigma)}\dfrac{(\Delta_{01}^0(\tau,\sigma))^2}{\Delta^0(\sigma)\Delta_{11}^0(\tau,\sigma)}-\\ -Q(\sigma)\left(\dfrac{1}{\Delta^0(\sigma)}-\dfrac{1}{D(\sigma)}\right)\end{matrix}\right]d\sigma, \tag{43}$$

а $D(t)=\mathbf{M}\{[x_t-a(t)]^2\}$, $a(t)=\mathbf{M}\{x_t\}$.

Доказательство:

Используя неравенства Ихары [2] $\Delta(t)\ge D(t)\exp\{-2I_t[\cdot]\}$, получаем

$$I_t[\cdot]\le(1/2)\ln[D(t)/\Delta(t)]. \tag{44}$$

Так как, согласно Теореме 1, $\inf(t)=\Delta^0(t)$, тогда из (44)

$$\sup I_t[x_t;z_0^t,\eta_0^m]=I_t^0[x_t;(z^0)_0^t,(\eta^0)_0^m]=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{D(t)}{\Delta^0(t)}\right]. \tag{45}$$

Так как на кодированиях (5) и (6) имеем, что $p_t(x)=\mathbf{N}\{x;\mu^0(t),\Delta^0(t)\}$ и $p(t,x)=\mathbf{N}\{x;a(t),D(t)\}$, то

$$I_t^0[\cdot]=\mathbf{M}\{\ln[p_t(x_t)/p(t,x_t)]\}=$$
$$=(1/2)\ln[D(t)/\Delta^0(t)]. \tag{46}$$

Совпадение (45) с (46) доказывает свойство (42). Из (46) следует, что

$$\frac{I_t^0[\cdot]}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{D(t)}\frac{dD(t)}{dt}-\frac{1}{\Delta^0(t)}\frac{d\Delta^0(t)}{dt}\right]. \tag{47}$$

Так как для гауссовского процесса x_t, определяемого уравнением (1), мы имеем

$$dD(t)/dt=2F(t)D(t)+Q(t), \tag{48}$$

тогда использование (10), (48) в (47) для $t_m\le t<t_{m+1}$ дает

$$\frac{I_t^0[\cdot]}{dt}=\frac{1}{2}\left[\begin{matrix}\dfrac{\tilde h(t)}{R(t)}\dfrac{(\Delta_{01}^0(\tau,t))^2}{\Delta^0(t)\Delta_{11}^0(\tau,t)}-\\ -Q(t)\left(\dfrac{1}{\Delta^0(t)}-\dfrac{1}{D(t)}\right)\end{matrix}\right]. \tag{49}$$

Из (46) следует, что

$$I_{t_m}^0[\cdot]\le(1/2)\ln[D(t_m)/\Delta^0(t_m)]. \tag{50}$$

Используя (12) в (50), получаем

$$I_{t_m}^0[\cdot]=I_{t_m-0}^0[\cdot]+$$
$$+\frac{1}{2}\ln\left(\begin{matrix}\left[1+\dfrac{\tilde g(t_m)}{V(t_m)}\right]\times\\ \times\left[\begin{matrix}1+\dfrac{\tilde g(t_m)}{V(t_m)}\times\\ \times\left(1-\dfrac{(\Delta_{01}^0(\tau,t_m-0))^2}{\Delta^0(t_m-0)\Delta_{11}^0(\tau,t_m-0)}\right)\end{matrix}\right]^{-1}\end{matrix}\right). \tag{51}$$

Формула (43) очевидно следует из (49), (51).

Замечание 1. Использование (4)–(6) в (3) дает, что $\mathbf{M}\{[h^0(t,x_\tau,z^0)]^2\}=\tilde h(t)$, $\mathbf{M}\{[g^0(t_m,x_\tau,z^0)]^2\}=\tilde g(t_m)$, т. е. при оптимальном способе передачи энергетические возможности каналов передачи используются полностью.

Замечание 2. Поскольку пропускная способность $C[0,T]$ канала передачи определяется в виде $C[0,T]=\sup\{(1/T)I_T[\cdot]\}$ [4], то согласно Теореме 2 при непрерывно-дискретном способе передачи (1)–(3) кодирующие функционалы (5), (6) обеспечивают передачу максимально возможного количества информации в классе $\mathbf{K}_l^1$ линейных функционалов (4).

Заключение

Полученные результаты могут использоваться при разработке систем связи, систем передачи информации, функционирование которых происходит в условиях непрерывно-дискретной во времени доступной измерению (наблюдению) или поступающей в каналы передачи информации, например, когда непрерывно во времени поступают сигналы бортовых измерителей, а в отдельные моменты времени – сигналы от внешних источников.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.B37.21.0861.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рожкова С.В. Оптимальная непрерывно-дискретная передача сигнала по каналам с памятью при наличии бесшумной обратной связи // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. – № 5. – С. 6–10.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
3. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
4. Gallager R.G. Information theory and reliable communication. – New York: Wiley, 1968 – 346 p.

Поступила 03.10.2012 г.

УДК 681.51

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ СОПРЯЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В СТРОГО-ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

С.Ш. Баласанян

Государственный инженерный университет Армении, г. Капан, Армения
E-mail: suni-com@syunik.am

Разработана компьютерная модель сопряжения элементов в строго-иерархической стратифицированной системе, позволяющая свести имитацию сопряжения элементов смежных страт, т. е. формирование входного сигнала каждой страты на основании выходного сигнала предыдущей страты, к стандартной операции умножения матриц. Показано, что предложенная модель допускает распараллеливание процесса имитации передачи сигналов от элементов каждой страты элементам последующей страты, что предоставляет возможность при использовании многопроцессорных компьютеров значительно ускорить процесс имитации. Применение предложенной модели сопряжения позволяет при проведении компьютерных экспериментов ввести необходимые изменения в матрицы сопряжения смежных страт в соответствии с конкурирующими вариантами структур исследуемой системы в процессе экспериментов, без изменения базовой имитационной программы.

Ключевые слова:
Страта, стратифицированный, контакт, имитация, эксперимент, сопряжение, структура, канал.
Key words:
Strata, stratified, contact, simulation, experiment, link, structure, channel.

Одной из основных проблем, возникающих при программной реализации компьютерных стратифицированных моделей сложных технологических систем со многими состояниями [1], ориентированных на исследование эффективности их функционирования с учетом надежности элементов, является разработка процедуры имитации сопряжения элементов смежных страт в системе, позволяющей обеспечить удобство и простоту проведения компьютерных экспериментов и уменьшить при этом объем перепрограммирования.

Суть этой проблемы заключается в том, что при рассмотрении на компьютерной модели конкурирующих вариантов структуры исследуемой системы возникает необходимость в модификации исходной (базовой) имитационной программы, обусловленной изменением структуры связей между элементами смежных страт.

В настоящей работе предлагается компьютерная модель сопряжения элементов смежных страт в строго-иерархической стратифицированной системе (СИСС) [1], позволяющая успешно решить указанную выше проблему.

Предлагаемая модель базируется на математической модели сопряжения элементов в СИСС [1, 2], рассматривающей взаимодействие между элементами в рамках механизма обмена сигналами [3, 4], который включает следующие составляющие:

1) процесс формирования выходного сигнала элементом, выдающим сигнал;
2) определение адреса передачи для каждой характеристики выходного сигнала;
3) прохождение сигналов по каналам связи и компоновка (формирование) входных сигналов элементов;
4) функционирование элемента, принимающего входной сигнал.

Первая и четвертая составляющие не рассматриваются в рамках модели взаимодействия, поскольку относятся к построению моделей функционирования элементов системы.

Третья составляющая механизма обмена сигналами связана с прохождением сигналов через реальные (неидеальные) каналы связи, формально рассматриваемые как самостаятельные элементы системы, функционирование которых сводится к соответствующим задержкам и искажениям сигналов. В этом случае фиктивные каналы, соединяющие элементы, передают сигналы мгновенно и без искажений, т. е. формально являются идеальными.