СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баласанян С.Ш. Стратифицированная модель для оценки и анализа эффективности функционирования сложных технологических систем со многими состояниями // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 5. – С. 25–30.
2. Баласанян С.Ш. Метод стратифицированной формализации сложных систем с учетом надежности // Вестник ГИУА. Серия «Моделирование, оптимизация, управление». – 2007. – Т. 1. – Вып. 10. – С. 22–32.
3. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
4. Сирота А. Компьютерное моделирование и оценка эффективности сложных систем. – М.: Техносфера, 2006. – 280 с.
5. Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978. – 311 с.

Поступила 19.06.2012 г.

УДК 519.872

МНОГОМОДАЛЬНОСТЬ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПОТОКА В УСЛОВИИ ПРЕДЕЛЬНО РЕДКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ЕГО СОСТОЯНИЙ

А.А. Назаров¹, В.З. Ямпольский², М.А. Яценко³

¹Томский государственный университет

²Томский политехнический университет

³ООО «ИНКОМ»

E-mail: yvz@tpu.ru

Построена математическая модель телекоммуникационного потока в виде высокоинтенсивного полумарковского потока в условии предельно редких изменений его состояний, который обладает свойством многомодальности распределения вероятностей числа его событий, наступивших за единицу времени. Показана линейная зависимость его характеристик от времени наблюдения за потоком.

Ключевые слова:

Телекоммуникационные потоки, высокоинтенсивные полумарковские потоки, предельно редкие изменения состояний потока, многомодальность распределения.

Key words:

Telecommunication streams, high-intensity semi-Markov streams, extremely rare stream state changes, multimodal distributions.

Введение

Статистические исследования реальных телекоммуникационных потоков показывают, что некоторые из них обладают свойством многомодальности гистограмм числа их событий, наступивших за единицу времени. Применение методов проверки статистических гипотез не отклоняют гипотезу о том, что теоретическое распределение генеральной совокупности является смесью нормальных распределений.

Ставится задача построения математической модели таких потоков, обладающих свойством многомодальности распределений числа событий, наступивших в этих потоках за единицу времени. В работе показано, что этим свойством обладает высокоинтенсивный полумарковский поток в условии предельно редких изменений его состояний.

Высокоинтенсивный полумарковский поток в условии предельно редких изменений его состояний

Пусть задана диагональная матрица $A(x)$ размерности L с элементами $A_l(x)$, $l=\overline{1, L}$ и стохастическая матрица

$$P = I + \delta Q \quad (1)$$

размерности $L \times L$ с элементами

$$P_{l_1 l_2} = \delta_{l_1 l_2} + \delta q_{l_1 l_2},$$

где I – единичная матрица; $\delta_{l_1 l_2}$ – символ Кронекера; δ – некоторый малый параметр. Также задан положительный большой параметр N .

Рассмотрим полумарковский процесс $l(t)$, принимающий значения $l(t)=l=\overline{1, L}$ с условно независимыми компонентами [1], полумарковская матрица которого факторизуется и равна произведению

$$A(Nx)P = A(Nx)(I + \delta Q). \quad (2)$$

Обрабатывающий его процесс $n(t)$ определяет число событий, наступивших за время t в полумарковском потоке (SM-потоке), заданным полумарковской матрицей (2).

Полумарковский процесс $l(t)$ будем называть процессом, управляющим полумарковским потоком, а значения $l(t)=l$ этого процесса будем называть состояниями SM-потока.

В состоянии l длина ξ_l интервала между моментами наступления событий рассматриваемого потока определяется функцией распределения

$$P\{\xi_l < x\} = A_l(Nx).$$

Наличие здесь большого параметра N оправдывает название – высокоинтенсивный поток. Наличие малого параметра δ , который определяет в (2) вероятности смены состояний потока, оправдывает применение названия условия: условие предельно редких изменений состояний SM-потока.

Ниже будет выполнено исследование рассматриваемого высокоинтенсивного полумарковского потока в условии предельно редких изменений его состояний, применяя подходы, развитые в работах [2] и [3].

Уравнение Колмогорова

Применяя метод дополнительных компонент, рассмотрим трехмерный марковский случайный процесс $\{l(t), z(t), n(t)\}$, где $z(t)$ – длина интервала от момента t до момента наступления следующего события в рассматриваемом потоке. Компоненты $l(t)$ и $n(t)$ этого процесса определены выше. Здесь $l(t)$ – полумарковский процесс, управляющий рассматриваемым потоком, а $n(t)$ – число его событий, наступивших за время t .

Обозначая распределение вероятностей

$$P\left\{l(t) = l, z(t) < \frac{z}{N}, n(t) = n\right\} = P(l, z, n, t),$$

запишем равенство

$$\begin{aligned} &P\{l, z - N\Delta t, n, t + \Delta t\} = \\ &= P(l, z, n, t) - P(l, N\Delta t, n, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^L P(l_i, N\Delta t, n-1, t) P_{i,l} A_i(z) + o(\Delta t), \end{aligned}$$

из которого получим уравнение Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(l, n, t)}{\partial t} = &N \frac{\partial P(l, z, n, t)}{\partial z} - N \frac{\partial P(l, 0, n, t)}{\partial z} + \\ &+ \sum_{i=1}^L N \frac{\partial P(l, 0, n-1, t)}{\partial z} P_{i,l} A_i(z), \end{aligned}$$

где применяется обозначение

$$\left. \frac{\partial P(l, 0, n, t)}{\partial z} = \frac{\partial P(l, z, n, t)}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Определяя вектор строку

$$\mathbf{P}(z, n, t) = \{P(1, z, n, t), P(2, z, n, t), \dots, P(L, z, n, t)\},$$

последнее уравнение перепишем в матричном виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{P}(z, n, t)}{\partial t} = &\frac{\partial \mathbf{P}(z, n, t)}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{P}(0, n, t)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{P}(0, n-1, t)}{\partial z} (\mathbf{I} + \delta \mathbf{Q}) \mathbf{A}(z). \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначая векторную характеристическую функцию

$$\mathbf{H}(z, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} \mathbf{P}(z, n, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, и применяя уравнение (3), для функции $\mathbf{H}(z, u, t)$ запишем равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t)}{\partial t} = &\frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0, u, t)}{\partial z} \times \\ &\times (e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + \delta e^{ju} \mathbf{Q} \mathbf{A}(z)). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассматривая стационарный SM-поток, будем полагать, что выполнено условие

$$\mathbf{H}(z, u, 0) = \mathbf{R}(z). \quad (5)$$

Функцию $\mathbf{R}(z)$ найдем из уравнения (4), применяя равенство

$$\mathbf{H}(z, u, 0) = \mathbf{R}(z) = \mathbf{H}(z, 0, t), \quad (6)$$

в котором вектор функция $\mathbf{R}(z)$ является стационарным распределением вероятностей

$$\mathbf{R}(z) = P\left\{l(t) = l, z(t) < \frac{z}{N}\right\}$$

двумерного случайного процесса $\{l(t), z(t)\}$.

Подставляя (6) в (4), для распределения $\mathbf{R}(z)$ получим уравнение

$$\mathbf{R}'(z) = \mathbf{R}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z) - \delta \mathbf{Q} \mathbf{A}(z)\}, \quad (7)$$

решение $\mathbf{R}(z)$ которого, удовлетворяющее краевому условию $\mathbf{R}(0) = 0$, имеет вид

$$\mathbf{R}(z) = \int_0^z \mathbf{R}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(x) - \delta \mathbf{Q} \mathbf{A}(x)\} dx. \quad (8)$$

Так как существует маргинальное распределение $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\infty)$ случайного процесса $l(t)$, то в (7) при $z = \infty$ выполняется равенство

$$\mathbf{R}'(0) \mathbf{Q} = 0, \quad (9)$$

а (7) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}'(z) = \mathbf{R}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(z)\}. \quad (10)$$

В (9) матрица $\mathbf{Q}$, в силу равенства (1), обладает всеми свойствами матрицы инфинитезимальных характеристик некоторой эргодической цепи Маркова с непрерывным временем, поэтому решение $\mathbf{R}'(0)$ уравнения (9) имеет вид

$$\mathbf{R}'(0) = \mathbf{C} \mathbf{r}, \quad (11)$$

где $\mathbf{r}$ – стационарное распределение вероятностей значений цепи Маркова, определяемой матрицей $\mathbf{Q}$, то есть распределение $\mathbf{r}$ является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{r} \mathbf{Q} = 0, \mathbf{r} \mathbf{E} = 1, \quad (12)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор столбец.

Значение произвольной постоянной $\mathbf{C}$ в (11) найдем из следующего условия нормировки

$$\begin{aligned} 1 = \mathbf{R} \mathbf{E} = \mathbf{R}(\infty) \mathbf{E} = \\ = \int_0^{\infty} \mathbf{R}'(0) \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(x) - \delta \mathbf{Q} \mathbf{A}(x)\} dx \mathbf{E} = \\ = \mathbf{C} \int_0^{\infty} \mathbf{r} \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(x) - \delta \mathbf{Q} \mathbf{A}(x)\} dx \mathbf{E} = \\ = \mathbf{C} \mathbf{r} \int_0^{\infty} \{\mathbf{I} - \mathbf{A}(x)\} dx \mathbf{E} = \mathbf{C} \mathbf{r} \mathbf{a} \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{a}$ – диагональная матрица математических ожиданий, определяемых функциями распределе-

ния $A(x)$, которые являются диагональными элементами матрицы $A(x)$.

Из (13) следует, что выполняется равенство

$$C = \frac{1}{\mathbf{r}\mathbf{a}\mathbf{E}} = \frac{1}{\sum_{l=1}^L r_l a_l}, \quad (14)$$

где r_l – элементы вектора $\mathbf{r}$.

Подставляя (11) в (8), для $\mathbf{R}(z)$ получим равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z) &= \int_0^z \mathbf{R}'(0) \{ \mathbf{I} - \mathbf{A}(x) - \delta \mathbf{Q}\mathbf{A}(x) \} dx = \\ &= C \int_0^z \mathbf{r} \{ \mathbf{I} - \mathbf{A}(x) \} dx, \end{aligned} \quad (15)$$

в котором вектор $\mathbf{r}$ является решением системы (12), а постоянная C определяется равенством (14).

В частности, из (15) при $z \rightarrow \infty$ следует равенство

$$R(l) = R(l, \infty) = \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} a_l, \quad (16)$$

которое, обозначив $\lambda_l = \frac{1}{a_l}$, запишем в виде

$$\frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} = \lambda_l R(l). \quad (17)$$

Таким образом, векторная характеристическая функция $\mathbf{H}(z, u, t)$, в силу равенств (4) и (6), является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0, u, t)}{\partial z} \times \\ \times (e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + \delta e^{ju} \mathbf{Q}\mathbf{A}(z)), \\ \mathbf{H}(z, u, 0) = \mathbf{R}(z), \end{cases} \quad (18)$$

где векторная функция $\mathbf{R}(z)$ определяется равенством (15).

Отметим, что функция $\mathbf{R}(z)$, определяющая начальное условие в задаче (18), не зависит от значения параметра δ , но решение $\mathbf{H}(z, u, t)$ задачи (18) зависит от значений этого параметра, поэтому это решение будем обозначать $\mathbf{H}(z, u, t, \delta)$, а задачу (18) перепишем в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t, \delta)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t, \delta)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0, u, t, \delta)}{\partial z} \times \\ \times (e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I} + \delta e^{ju} \mathbf{Q}\mathbf{A}(z)), \\ \mathbf{H}(z, u, 0, \delta) = \mathbf{R}(z). \end{cases} \quad (19)$$

Решение этой задачи выполним применением методов асимптотического анализа в условии предельно редких изменений состояний ($\delta \rightarrow 0$) [2] и неограниченно возрастающей интенсивности ($N \rightarrow \infty$) [3].

Метод асимптотического анализа

в условии предельно редких изменений состояний

Обозначив

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{H}(z, u, t, \delta) = \mathbf{H}(z, u, t),$$

в (19) выполним указанный предельный переход, тогда для векторной функции $\mathbf{H}(z, u, t)$ получим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}(z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0, u, t)}{\partial z} (e^{ju} \mathbf{A}(z) - \mathbf{I}), \\ \mathbf{H}(z, u, 0) = \mathbf{R}(z), \end{cases}$$

для системы L дифференциальных уравнений, которая в силу диагональности матриц $A(x)$ и $\mathbf{I}$ распадается на L независимых задач Коши.

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial H(l, z, u, t)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial H(l, z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(l, 0, u, t)}{\partial z} \times \\ \times (e^{ju} A_l(z) - 1), \\ H(l, z, u, 0) = R(l, z), \end{cases} \quad (20)$$

для элементов $H(l, z, u, t)$ векторной функции $\mathbf{H}(z, u, t)$.

Маргинальное распределение вероятностей числа событий, наступивших за время t в рассматриваемом потоке, определяется характеристической функцией.

$$h(u, t) = M e^{ju n(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju n} P\{n(t) = n\},$$

которую, при достаточно малых значений параметра δ , можно аппроксимировать решением $H(l, z, u, t)$ задачи (20)

$$h(u, t) = \sum_{l=1}^L H(l, \infty, u, t). \quad (21)$$

Решение задачи (20) найдем, применяя метод асимптотического анализа в условии неограниченно растущей интенсивности в предельном условии $N \rightarrow \infty$.

Метод асимптотического анализа в условии неограниченно растущей интенсивности

В задаче (20) выполним замену

$$H(l, z, u, t) = H_2(l, z, u, t) \exp\{ju \lambda_l N t\}, \quad (22)$$

где, как указано выше,

$$\lambda_l = \frac{1}{a_l} = 1 \int_0^{\infty} (1 - A_l(z)) dz.$$

Тогда для функции $H_2(l, z, u, t)$ получим задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial H_2(l, z, u, t)}{\partial t} + H_2(l, z, u, t) ju \lambda_l = \\ = \frac{\partial H_2(l, z, u, t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2(l, 0, u, t)}{\partial z} \times \\ \times (e^{ju} A_l(z) - 1), \\ H(l, z, u, 0) = R(l, z). \end{cases} \quad (23)$$

В полученной задаче (23), обозначив $\varepsilon^2 = 1/N$, выполним замены

$$u = \varepsilon w, \quad H_2(l, z, u, t) = F(l, z, w, t, \varepsilon), \quad (24)$$

для $F(l, z, w, t, \varepsilon)$ запишем задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial F(l, z, w, t, \varepsilon)}{\partial t} + F(l, z, w, t, \varepsilon) j \varepsilon w \lambda_l = \\ = \frac{\partial F(l, z, w, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F(l, 0, w, t, \varepsilon)}{\partial z} \times \\ \times (e^{j \varepsilon w} A_l(z) - 1), \\ F(l, z, w, 0, \varepsilon) = R(l, z). \end{cases} \quad (25)$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$ значение $F(l, z, w, t)$ решения $F(l, z, w, t, \varepsilon)$ задачи (25) имеет вид произведения*

$$F(l, z, w, t) = \Phi(l, w, t) R(l, z), \quad (26)$$

в котором функция $\Phi(l, w, t)$ имеет вид

$$\Phi(l, w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda_l + \kappa_l) t \right\}, \quad (27)$$

где $\kappa_l = \lambda_l^3 (\sigma_l^2 - a_l^2)$. (28)

Здесь λ_l – величина, обратная к среднему a_l ; σ_l^2 – дисперсия, определяемая функцией распределения $A_l(z)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы выполним в три этапа.

Этап 1. Обозначив

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(l, z, w, t, \varepsilon) = F(l, z, w, t),$$

в задаче (25) выполним указанный предельный переход, для функции $F(l, z, w, t)$ получим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial F(l, z, w, t)}{\partial z} + \frac{\partial F(l, 0, w, t)}{\partial z} (A_l(z) - 1) = 0, \\ F(l, z, w, 0) = R(l, z), \end{cases} \quad (29)$$

совпадающую с ее матричной формой (10), поэтому решение $F(l, z, w, t)$ задачи (29) имеет вид произведения (26), а функция $\Phi(l, w, t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\Phi(l, w, 0) = 1.$$

Этап 2. Уравнение задачи (25) перепишем в виде

$$O(\varepsilon^2) + F(l, z, w, t, \varepsilon) j \varepsilon w \lambda_l = \frac{\partial F(l, z, w, t, \varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F(l, 0, w, t, \varepsilon)}{\partial z} (A_l(z) - 1 + j \varepsilon w A_l(z)), \quad (30)$$

а его решение $F(l, z, w, t, \varepsilon)$ запишем в виде разложения

$$F(l, z, w, t, \varepsilon) = \Phi(l, w, t) \{R(l, z) + j \varepsilon w f(l, z)\} + O(\varepsilon^2), \quad (31)$$

подставляя которое в (30), получим равенство

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) + R(l, z) j \varepsilon w \lambda_l &= \frac{\partial R(l, z)}{\partial z} + j \varepsilon w \frac{\partial f(l, z)}{\partial z} + \\ + \left\{ \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} + j \varepsilon w \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} \right\} &(A_l(z) - 1 + j \varepsilon w A_l(z)) = \\ = \frac{\partial R(l, z)}{\partial z} + j \varepsilon w \frac{\partial f(l, z)}{\partial z} + \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} &(A_l(z) - 1) + \\ + j \varepsilon w \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} (A_l(z) - 1) + j \varepsilon w \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} &A_l(z), \end{aligned}$$

которое, в силу равенств (10) и (17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(l, z)}{\partial z} + \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} (A_l(z) - 1) &= \lambda_l R(l, z) - \\ - \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} A_l(z) &= \lambda_l (R(l, z) - R(l) A_l(z)). \end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по z в интервале $[0, \infty)$, получим выражение

$$f(l, \infty) - \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} a_l = \lambda_l \int_0^\infty (R(l, z) - R(l) A_l(z)) dz,$$

которое перепишем в виде

$$\lambda_l f(l, \infty) - \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} = \lambda_l^2 \int_0^\infty (R(l, z) - R(l) A_l(z)) dz.$$

Применяя (15)–(17), нетрудно показать, что выполняется равенство

$$\lambda_l f(l, \infty) - \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} = \lambda_l^3 R(l) \frac{1}{2} (a_l^2 - \sigma_l^2), \quad (32)$$

где a_l и σ_l^2 – среднее и дисперсия, определяемые функцией распределения $A_l(z)$.

Этап 3. Обозначив

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(l, z, w, t, \varepsilon) = F(l, w, t, \varepsilon),$$

в уравнении задачи (25) выполним указанный предельный переход, для функции $F(l, w, t, \varepsilon)$ получим равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial F(l, w, t, \varepsilon)}{\partial t} + F(l, w, t, \varepsilon) j \varepsilon w \lambda_l &= \\ = \frac{\partial F(l, 0, w, t, \varepsilon)}{\partial z} &(e^{j \varepsilon w} - 1), \end{aligned}$$

в которое подставим разложение (31), запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(l, w, t)}{\partial t} R(l) + \Phi(l, w, t) \times \\ \times \{R(l) + j \varepsilon w f(l, \infty)\} j \varepsilon w \lambda_l &= \\ = \Phi(l, w, t) \left\{ \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} + j \varepsilon w \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} \right\} \times \\ \times \left(j \varepsilon w + \frac{(j \varepsilon w)^2}{2} \right) + O(\varepsilon^3) &= \Phi(l, w, t) \times \\ \times \left\{ j \varepsilon w \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} + \right. & \\ \left. + (j \varepsilon w)^2 \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} + \frac{(j \varepsilon w)^2}{2} \frac{\partial R(l, 0)}{\partial z} \right\} &+ O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

В силу (17) это равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(l, w, t)}{\partial t} R(l) &= \frac{(jw)^2}{2} \Phi(l, w, t) \times \\ \times \left\{ \lambda_l R(l) - 2 \left(\lambda_l f(l, \infty) - \frac{\partial f(l, 0)}{\partial z} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Применяя здесь равенства (17) и (32), получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi(l, w, t)}{\partial t} = \frac{(jw)^2}{2} \Phi(l, w, t) \{ \lambda_l + \lambda_l^3 (\sigma_l^2 - a_l^2) \},$$

относительно функции $\Phi(l, w, t)$.

Решение $\Phi(l, w, t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\Phi(l, w, 0) = 1$, в силу обозначения (28), можно записать в виде

$$\Phi(l, w, t) = \exp \left\{ \frac{(jw)^2}{2} (\lambda_l + \kappa_l) t \right\},$$

совпадающем с (27). Теорема доказана.

Многомодальность распределения вероятностей числа событий, наступивших за единицу времени высокоинтенсивного полумарковского потока в условии предельно редких изменений его состояний

Применяя в (27) замену

$$w = \frac{u}{\varepsilon} = u\sqrt{N}$$

из (24), также равенство (26)

$$\begin{aligned} H_2(l, z, u, t) &= F(l, z, w, t) = \\ &= R(l, z) \exp \left\{ \frac{(ju)^2}{2} (\lambda_l + \kappa_l) Nt \right\} \end{aligned}$$

и замену (22), можно записать асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} H_2(l, z, u, t) &= \\ &= R(l, z) \exp \left\{ ju\lambda_l Nt + \frac{(ju)^2}{2} (\lambda_l + \kappa_l) Nt \right\}. \end{aligned}$$

Для маргинальной характеристической функции $h(u, t)$ из (21) получим аппроксимацию

$$h(u, t) = \sum_{l=1}^L R(l) \exp \left\{ ju\lambda_l Nt + \frac{(ju)^2}{2} (\lambda_l + \kappa_l) Nt \right\} \quad (33)$$

распределения вероятностей числа событий, наступивших за времена t в высокоинтенсивном по-

лумарковском потоке в условии предельно редких изменений его состояний в виде смеси с весами $R(l)$ гауссовских распределений с параметрами $\lambda_l Nt$ и $(\lambda_l + \kappa_l) Nt$. Здесь κ_l определяется равенством (28) и распределение вероятностей $R(l)$, как следует из (15), имеет вид

$$R(l) = Cr_l a_l = r_l a_l / \sum_{l=1}^L r_l a_l,$$

где $r_l, l = \overline{1, L}$ является решением системы (12).

Отметим, что распределение вероятностей, определяемое равенством (33), при соответствующих значениях параметров является многомодальным с количеством локальных максимумов не более L . А его локальные параметры среднего и дисперсии линейно зависят от времени t наблюдения за рассматриваемым потоком.

Заключение

В работе выполнено исследование высокоинтенсивного полумарковского потока в условии предельно редких изменений его состояний. Показано, что распределение вероятностей числа его событий, наступивших за время t является взвешенной, с весами $R(l)$, суммой гауссовских распределений с параметрами $\lambda_l Nt$ и $(\lambda_l + \kappa_l) Nt$, которые линейно зависят от времени t наблюдения за потоком, что позволяет такой поток рассматривать в качестве математической модели телекоммуникационных потоков с многомодальными гистограммами числа событий.

Можно показать, что аналогичные результаты имеют место и для других специальных [4], коррелированных [5] потоков, таких как MMPP, MAP, а так же их неординарных аналогов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Королюк В.С. Стохастические модели систем. – Киев: Наукова думка, 1989. – 203 с.
2. Горбатенко А.Е. Исследование систем массового обслуживания с коррелированными потоками в специальных предельных условиях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2010. – 156 с.
3. Лопухова С.В. Асимптотические и численные методы исследования специальных потоков однородных событий: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 167 с.

4. Гнеденко Б.В. Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
5. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Минск: БГУ, 2000. – 175 с.

Поступила 17.09.2012 г.