УДК 519.872

МЕТОД МОМЕНТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК ПОТОКА МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

И.А. Синякова, С.П. Моисеева

Томский государственный университет
E-mail: irinka_asf@mail.ru; smoiseeva@mail.ru

Предлагается математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок в виде системы массового обслуживания (СМО) с параллельно функционирующими блоками. Методом моментов найдены основные вероятностные характеристики двумерного процесса, характеризующего число заявок, находящихся на обслуживании.

Ключевые слова:
Параллельное обслуживание, кратные заявки, поток марковского восстановления, метод моментов.
Key words:
Parallel service, multiple demands, stream of Markov restoration, the method of moments.

В настоящее время внимание к теории массового обслуживания в значительной степени стимулировалось необходимостью применения результатов этой теории к важным практическим задачам, возникающим в связи с бурным развитием систем коммуникаций, возникновением информационно-вычислительных систем, появлением и усложнением разнообразных технологических систем, созданием автоматизированных систем управления.

Исследование систем массового обслуживания с групповым поступлением заявок и параллельным обслуживанием является одним из востребованных направлений теории массового обслуживания [1–2].

Исследованию однолинейных систем массового обслуживания с неординарными входящими потоками (пуассоновским и рекуррентным) посвящены работы П.П. Бочарова, А.В. Печинкина и других российских учёных [3–5], в которых рассматриваются системы массового обслуживания с марковским неординарным входящим потоком, несколькими типами заявок, обобщённой дисциплиной преимущественного разделения прибора заявками с минимальной обслуженной длиной, марковским обслуживанием и накопителем бесконечной ёмкости. Кроме того, в статье украинских учёных [6] предлагается исследование подобных систем с двумерным пуассоновским потоком, но предлагаемый авторами метод неприменим для исследования аналогичных систем с произвольным временем обслуживания или непуассоновским входящим потоком.

В настоящей работе предлагается математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок в виде системы массового обслуживания с параллельно функционирующими блоками.

Рассмотрим систему массового обслуживания ($MR^{(2)}|M_2|\infty$) с входящим потоком кратных заявок и двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает поток Марковского восстановления сдвоенных заявок, заданный набором функций распределения длин интервалов $A_1(x),...,A_k(x)$ и матрицей $\mathbf{P}$ – вложенной по моментам наступления событий цепи Маркова [7].

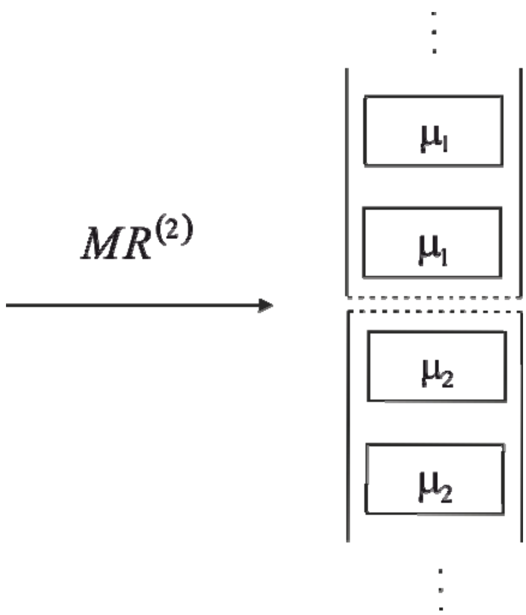

Рисунок. *СМО $MR^{(2)}|M_2|\infty$ с параллельным обслуживанием кратных заявок*

Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы, одинаково распределены в каждом блоке и имеют экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание, заявка покидает систему. Ставится задача исследования двумерного процесса, характеризующего число заявок в каждом блоке.

Обозначим i_k – число заявок в k-м блоке обслуживания. Так как входящий поток непуассоновский, то двумерный процесс $\{i_1(t),i_2(t)\}$, немарковский, поэтому рассмотрим четырехмерный марковский процесс $\{k(t),z(t),i_1(t),i_2(t)\}$, который является марковским, где $z(t)$ – длина интервала от момента времени t до момента наступления очередного события во входящем MR потоке, а процесс $k(t)$ – вложенная по моментам наступления событий цепь Маркова.

Определим вероятности

$$P(k,z,i_1,i_2,t) = P\left\{ \begin{matrix} k(t)=k, z(t)<z, i_1(t)= \\ = i_1, i_2(t)=i_2 \end{matrix} \right\}.$$

Для распределения $P(k,z,i_1,i_2,t)$ Δt-методом запишем равенства:

$$\begin{gathered} P(k,z-\Delta t,i_1,i_2,t+\Delta t) = \\ = (P(k,z,i_1,i_2,t) - P(k,\Delta t,i_1,i_2,t)) \times \\ \times (1 - i_1\mu_1\Delta t)(1 - i_2\mu_2\Delta t) + \\ + \sum_{\nu} P(\nu,\Delta t,i_1-1,i_2-1,t) P_{\nu k} A_k(z) + \\ + P(k,z,i_1+1,i_2,t)(i_1+1)\mu_1\Delta t + \\ + P(k,z,i_1,i_2+1,t)(i_2+1)\mu_2\Delta t + o(\Delta t), \end{gathered}$$

из которых получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова [8]

$$\begin{gathered} \frac{\partial P(k,z,i_1,i_2,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(k,z,i_1,i_2,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(k,0,i_1,i_2,t)}{\partial z} - \\ - P(k,z,i_1,i_2,t) i_1\mu_1 - P(k,z,i_1,i_2,t) i_2\mu_2 + \\ + P(k,z,i_1+1,i_2,t)(i_1+1)\mu_1 + \\ + P(k,z,i_1,i_2+1,t)(i_2+1)\mu_2 + \\ + \sum_{\nu} \frac{\partial P(\nu,0,i_1-1,i_2-1,t)}{\partial z} P_{\nu k} A_k(z). \end{gathered}$$

Для стационарного распределения вероятностей эту систему перепишем в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial P(k,z,i_1,i_2)}{\partial z} - \frac{\partial P(k,0,i_1,i_2)}{\partial z} - \\ - P(k,z,i_1,i_2) i_1\mu_1 - P(k,z,i_1,i_2) i_2\mu_2 + \\ + P(k,z,i_1+1,i_2)(i_1+1)\mu_1 + \\ + P(k,z,i_1,i_2+1)(i_2+1)\mu_2 + \\ + \sum_{\nu} \frac{\partial P(\nu,0,i_1-1,i_2-1)}{\partial z} P_{\nu k} A_k(z) = 0. \end{gathered} \qquad (1)$$

Введем функции, аналогичные характеристическим [8]

$$H(k,z,u_1,u_2) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P(k,z,i_1,i_2).$$

Тогда из системы уравнений (1), принимая во внимание, что

$$\frac{\partial H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} = j\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_1 e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P(k,z,i_1,i_2),$$

$$\frac{\partial H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_2} = j\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} i_2 e^{ju_1 i_1} e^{ju_2 i_2} P(k,z,i_1,i_2),$$

для функций $H(k,z,u_1,u_2)$ запишем систему дифференциальных уравнений в частных производных [9]

$$\begin{gathered} \frac{\partial H(k,z,u_1,u_2)}{\partial z} - \frac{\partial H(k,0,u_1,u_2)}{\partial z} + \\ + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_2} + \\ + e^{j(u_1+u_2)} \sum_{\nu} \frac{\partial H(\nu,0,u_1,u_2)}{\partial z} P_{\nu k} A_k(z) = 0. \end{gathered} \qquad (2)$$

Обозначив $\mathbf{H}(z,u_1,u_2)=\{H(1,z,u_1,u_2), H(2,z,u_1,u_2)...\}$

$$\mathbf{D}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{A}_k(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix}, \ \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

получим основное уравнение для исследования системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z} \{e^{j(u_1+u_2)} \mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}\} + \\ + j\mu_1(1 - e^{-ju_1}) \frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1} + \\ + j\mu_2(1 - e^{-ju_2}) \frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_2} = 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Решение $\mathbf{H}(z,u_1,u_2)$ дифференциально-матричного уравнения, удовлетворяющее условию $\mathbf{H}(z,0,0)=\mathbf{R}(z)$, определяет характеристические функции процессов $\{i_1(t)\},\{i_2(t)\}$, описывающих число приборов, занятых в стационарном режиме в системе $MR^{(2)}|M_2|\infty$, равенствами

$$h(u_1) = Me^{ju_1 i_1(t)} = \mathbf{H}(\infty,u_1,0)\mathbf{E},$$

$$h(u_2) = Me^{ju_2 i_2(t)} = \mathbf{H}(\infty,u_2,0)\mathbf{E}.$$

Здесь $\mathbf{R}(z)$ – вектор-функция стационарного распределения вероятностей значений двумерного марковского процесса $\{k(t),z(t)\}$.

Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных (2) возможно найти только численными или асимптотическими [10] методами, но все вероятностные характеристики рассматриваемых процессов можно определить методом моментов [8].

Моменты первого порядка

Учитывая свойства характеристических функций [8]:

$$\left. \frac{\partial H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} \right|_{\substack{u_1=0 \\ u_2=0}} = jm_1^{(1)}(k,z),$$

$$\left. \frac{\partial H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_1} \right|_{\substack{u_1=0 \\ u_2=0}} = jm_1^{(1)}(k,z),$$

Для векторных функций имеем:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = j\mathbf{m}_1^{(1)}(z) =$$

$$j[m_1^{(1)}(1,z), m_1^{(1)}(2,z), \ldots],$$

$$\left.\frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = j\mathbf{m}_2^{(1)}(z) =$$

$$j[m_2^{(1)}(1,z), m_2^{(1)}(2,z), \ldots].$$

Дифференцируя уравнение (3) по u_1, получаем

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial z \partial u_1} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z u_1}\{e^{j(u_1+u_2)}\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}\} +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z} e^{ju_2} j e^{ju_1}\mathbf{PD}(z) -$$

$$- - j\mu_1(-j)e^{-ju_1}\frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1} -$$

$$-j\mu_1(e^{-ju_1}-1)\frac{\partial^2 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2} -$$

$$-j\mu_2(e^{-ju_2}-1)\frac{\partial^2 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 0. \qquad (4)$$

Положив u_1=0, u_2=0, получим систему дифференциальных уравнений для вектор-функции $\mathbf{m}^{(1)}(z)=\{m_1^{(1)}(1,z), m_1^{(1)}(2,z),...\}$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}) +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}(z) - \mu_1 \mathbf{m}_1^{(1)}(z) = 0. \qquad (5)$$

Эту систему дифференциальных уравнений будем решать с помощью преобразования Лапласа–Стилтьеса [8]

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{m}_1^{(1)}(z), \quad \mathbf{D}^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d\mathbf{D}(z).$$

Выполнив в (5) преобразование Лапласа–Стилтьеса, получим

$$\phi_1(\alpha) + \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\frac{1}{\alpha}(\mathbf{PD}^*(\alpha) - \mathbf{I}) +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\frac{1}{\alpha}\mathbf{PD}^*(\alpha) - \frac{\mu_1}{\alpha}\phi_1(\alpha) = 0$$

или

$$(\mu_1 - \alpha)\phi_1(\alpha) = \frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}^*(\alpha) - \mathbf{I}) +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}^*(\alpha). \qquad (6)$$

Отсюда

$$\phi_1(\alpha) = \frac{1}{(\mu_1 - \alpha)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}^*(\alpha) - \mathbf{I}) + \\ +\dfrac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}^*(\alpha)\end{array}\right].$$

Положив в (6) $\alpha=\mu_1$, имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}^*(\mu_1) - \mathbf{I}) + \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}^*(\mu_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}^*(\mu_1)(\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_1))^{-1}.$$

Тогда

$$\mathbf{m}_1^{(1)}(\infty) = \phi_1(0) =$$

$$= \frac{1}{\mu_1}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\times \\ \times \mathbf{PD}^*(\mu_1)(\mathbf{I} - \mathbf{PD}^*(\mu_1))^{-1}(\mathbf{PD}^*(0) - \mathbf{I}) + \\ +\dfrac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}^*\end{array}\right].$$

Для момента первого порядка числа занятых приборов в первом блоке системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$ можно записать

$$\overline{m}_1^{(1)}(\infty) = \mathbf{m}_1^{(1)}(\infty)\mathbf{E} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{E} = \frac{\lambda}{\mu_1}.$$

Аналогично, для момента первого порядка числа занятых приборов во втором блоке системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$, получим равенство

$$\overline{m}_2^{(1)}(\infty) = \mathbf{m}_2^{(1)}(\infty)\mathbf{E} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{E} = \frac{\lambda}{\mu_2}.$$

Моменты второго порядка

Найдём момент второго порядка числа занятых приборов в первом блоке системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$.

Продифференцируем по u_1 уравнение (4):

$$\frac{\partial^3 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial z \partial u_1^2} + \frac{\partial^3 \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z u_1^2}\{e^{j(u_1+u_2)}\mathbf{PD}(z) - \mathbf{I}\} +$$

$$+\frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z \partial u_1} e^{ju_2} j e^{ju_1}\mathbf{PD}(z) +$$

$$+\frac{\partial^2 \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z \partial u_1} e^{ju_2} j e^{ju_1}\mathbf{PD}(z) +$$

$$+\frac{\partial \mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z} e^{ju_2} j^2 e^{ju_1}\mathbf{PD}(z) -$$

$$-\mu_1(-je^{-ju_1})\frac{\partial \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1} - \mu_1 e^{-ju_1}\frac{\partial^2 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2} -$$

$$-j\mu_1(-je^{-ju_1})\frac{\partial^2 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2} -$$

$$-j\mu_1(-je^{-ju_1}-1)\frac{\partial^3 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1^3} -$$

$$- - j\mu_2(-je^{-ju_2}-1)\frac{\partial^3 \mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_2 \partial u_1^2} = 0. \qquad (7)$$

Учитывая свойства характеристических функций:

$$\left.\frac{\partial^2 H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = j^2 m_1^{(2)}(k,z),$$

$$\left.\frac{\partial^2 H(k,z,u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = j^2 m_2^{(2)}(k,z).$$

Тогда для векторных функций имеем:

$$\left.\frac{\partial^2\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = j^2\mathbf{m}_1^{(2)}(z) =$$

$$= j^2[m_1^{(2)}(1,z), m_1^{(2)}(2,z),\ldots],$$

$$\left.\frac{\partial^2\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = j^2\mathbf{m}_2^{(2)}(z) =$$

$$= j^2[m_2^{(2)}(1,z), m_2^{(2)}(2,z),\ldots].$$

Положив в (7) $u_1=0$, $u_2=0$, получим систему дифференциальных уравнений:

$$j^2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(z)}{\partial z} + j^2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}) +$$

$$+2j^2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}(z) + j^2\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{PD}(z) +$$

$$+\mu_1 j^2\mathbf{m}_1^{(1)}(z) - 2\mu_1 j^2\mathbf{m}_2^{(2)}(z) = 0$$

или

$$\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(z)}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}\big(\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}\big) +$$

$$+\left(2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right)\mathbf{PD}(z) +$$

$$+\mu_1\mathbf{m}_1^{(1)}(z) - 2\mu_1\mathbf{m}_2^{(2)}(z) = 0, \qquad (8)$$

решать которую будем также с помощью преобразования Лапласа–Стилтьеса.

Обозначив

$$\phi_1(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}d\mathbf{m}_1^{(1)}(z),\ \phi_2(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}d\mathbf{m}_1^{(2)}(z),$$

$$\mathbf{D}^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}d\mathbf{D}(z)$$

для (8) получаем:

$$\phi_2(\alpha) + \frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}\frac{1}{\alpha}(\mathbf{PD}^*(\alpha)-\mathbf{I}) +$$

$$+\left(2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right)\frac{1}{\alpha}\mathbf{PD}^*(\alpha) +$$

$$+\frac{\mu_1}{\alpha}\varphi_1(\alpha) - \frac{2\mu_1}{\alpha}\phi_2(\alpha) = 0,$$

$$(2\mu_1-\alpha)\phi_2(\alpha) = \frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}^*(\alpha)-\mathbf{I}) +$$

$$+\left(2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right)\mathbf{PD}^*(\alpha) + \mu_1\phi_1(\alpha),$$

$$\phi_2(\alpha) = \frac{1}{2\mu_1-\alpha}\times$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}^*(\alpha)-\mathbf{I}) + \\ +\left(2\dfrac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} + \dfrac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right)\mathbf{PD}^*(\alpha) + \mu_1\phi_1(\alpha)\end{array}\right\}.$$

Положив в $\alpha=2\mu_1$, определим неизвестный вектор $\dfrac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}$:

$$\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z} =$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\mu_1\phi_1(2\mu_1) + \\ +\left(2\dfrac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} + \dfrac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right)\mathbf{PD}^*(2\mu_1)\end{array}\right\}\times$$

$$\times(\mathbf{I}-\mathbf{PD}^*(2\mu_1))^{-1}.$$

Тогда, учитывая, что

$$A_k^*(0) = \int_0^\infty dA_k(z) = A(\infty) - A(0) = 1,$$

$$\mathbf{D}^*(0) = \mathbf{I},$$

$$\phi_1(0)\mathbf{E} = \mathbf{m}_1^{(1)}(\infty)\mathbf{E} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\mathbf{E} = \frac{\lambda}{\mu_1},$$

для момента второго порядка числа занятых приборов в первом блоке системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$ можно записать

$$\bar{m}_1^{(2)}(\infty) = \mathbf{m}_1^{(2)}(\infty)\mathbf{E} = \phi_2(0)\mathbf{E} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_1}\left\{2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z} + \frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z} + \mu_1\phi_1(0)\right\}\mathbf{E} =$$

$$== \frac{1}{2\mu_1}\left\{2\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{E} + \lambda + \lambda\right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{E} + \lambda\right\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu_1}[(\mathbf{I}-\mathbf{PD}^*(\mu_1))^{-1}\mathbf{PD}^*(\mu_1)\mathbf{E}+1].$$

Повторив все выкладки, аналогично получаем выражение для момента второго порядка числа занятых приборов во втором блоке системы $MR^{(2)}|M_2|\infty$:

$$\bar{\mathbf{m}}_2^{(2)}(\infty) = \frac{\lambda}{\mu_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{PD}^*(\mu_2))^{-1}\mathbf{PD}^*(\mu_2)\mathbf{E}+1].$$

Аналогично можно найти моменты более высокого порядка для числа приборов, занятых в системе $MR^{(2)}|M_2|\infty$.

Корреляционный момент

Дифференцируя уравнение (4) по u_2, получаем

$$\frac{\partial^3\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_1\partial u_2} + \frac{\partial^3\mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z u_1\partial u_2}(e^{j(u_1+u_2)}\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I}) +$$

$$+\frac{\partial^2\mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2}e^{ju_1}je^{ju_2}\mathbf{PD}(z) +$$

$$+\frac{\partial^2\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial z\partial u_2}e^{ju_2}je^{ju_1}\mathbf{PD}(z) +$$

$$+\frac{\partial\mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial z}je^{ju_2}je^{ju_1}\mathbf{PD}(z) -$$

$$-j\mu_1(-j)e^{-ju_1}\frac{\partial^2\mathbf{H}(0,u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}-$$
$$-j\mu_1(e^{-ju_1}-1)\frac{\partial^3\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1^2\partial u_2}-$$
$$-j\mu_2(-j)e^{-ju_2}\frac{\partial^2\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}-$$
$$-j\mu_2(e^{-ju_2}-1)\frac{\partial^3\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2^2}=0.$$

Учитывая свойства характеристических функций, имеем:

$$\left.\frac{\partial\mathbf{H}(z,u_1,u_2)}{\partial u_1\partial u_2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}}=j\mathbf{m}_{12}(z)=j[m(1,z),m(2,z),\ldots].$$

Тогда, положив u_1=0, u_2=0, получим систему дифференциальных уравнений для нахождения корреляционного момента:

$$\frac{\partial\mathbf{m}_{12}(z)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{m}_{12}(0)}{\partial z}(\mathbf{PD}(z)-\mathbf{I})+$$
$$+\left(\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right)\times$$
$$\times\mathbf{PD}(z)-(\mu_1+\mu_2)\mathbf{m}_{12}(z)=0.$$

Используя аналогичные преобразования, можно записать корреляционный момент процессов $\{i_1(t)\},\{i_2(t)\}$

$$\bar{\mathbf{m}}_{12}(\infty)=\mathbf{m}_{12}(\infty)\mathbf{E}=\phi_{12}(0)\mathbf{E}=$$
$$=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left\{\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}+\frac{\partial\mathbf{R}(0)}{\partial z}\right\}\mathbf{E}=$$
$$=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left\{\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(1)}(0)}{\partial z}\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{m}_1^{(2)}(0)}{\partial z}\mathbf{E}+\lambda\right\}=$$
$$=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{PD}^*(\mu_1+\mu_2))^{-1}\mathbf{PD}^*(\mu_1+\mu_2)\mathbf{E}+1].$$

Таким образом, в работе рассмотрена математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок в виде системы массового обслуживания с параллельно функционирующими блоками. Методом введения дополнительных компонент проведена марковизация исследуемого процесса, что позволило получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для характеристических функций. Методом моментов найдены основные вероятностные характеристики двумерного процесса, характеризующего число заявок, находящихся на обслуживании в каждом блоке, а именно моменты первого и второго порядка. Используемый метод позволяет найти точные характеристики любого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таташев А.Г. Система массового обслуживания с групповым поступлением и инверсионной дисциплиной // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 6. – С. 163–165.
2. Таташев А.Г. Одна инверсионная дисциплина обслуживания в одноканальной системе с разнотипными заявками // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 7. – С. 177–181.
3. Печинкин А.В. Инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом в системе обслуживания с неординарным входящим потоком // Случайные процессы и их приложения. Математические исследования. – Кишинёв: Штиинца, 1989. – Вып. 109. – ххх с.
4. Печинкин А.В. Об одной инвариантной системе массового обслуживания // Math. Operationsforsch. und Statist. Ser. Optimization. – 1983. – V. 14. – № 3. – P. 433–444.
5. Бочаров П.П., Д'Апиче Ч., Мандзо Р., Фонг Н.Х. Об обслуживании многомерного пуассоновского потока на одном приборе с конечным накопителем и повторными заявками // Проблемы передач информации. – 2001. – Т. 37. – № 4. – С. 130–140.
6. Чечельницкий А.А., Кучеренко О.В. Стационарные характеристики параллельно функционирующих систем обслуживания с двумерным входным потоком // Сборник научных статей. – Минск, 2009. – Вып. 2. – С. 262–268.
7. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск, Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
8. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. – Томск, Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
9. Эльцгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
10. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск, Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.

Поступила 19.11.2012 г.