

УДК 681.50

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ MDSLS

С.А. Гайворонский, Т.А. Езангина

Томский политехнический университет

E-mail: saga@tpu.ru, eza-tanya@yandex.ru

Разработан программный продукт для синтеза систем автоматического управления с гарантированными корневыми показателями качества. Алгоритмы реализации основаны на робастном расширении оценки показателя качества системы. Приводятся числовые примеры.

Ключевые слова:

Интервальный полином, синтез регулятора, максимальная степень устойчивости.

Key words:

Interval polynomial, synthesis of controller, maximum degree of stability.

Введение

Система автоматического управления (САУ), предназначенная для управления каким-либо технологическим процессом или агрегатом, должна быть работоспособной, а также обладать свойствами, удерживающими параметры в таких пределах, чтобы не происходило существенных нарушений технологических процессов или работы агрегата.

Важнейшей задачей совершенствования систем управления является повышение качества управления и стабилизации технологических параметров в достаточно узких пределах. Решение задачи обеспечения заданного качества управления является актуальным как при проектировании САУ, так и при их промышленной эксплуатации. Наиболее остро требования качественной настройки регуляторов проявляются на предприятиях, где необходима стабилизация важных для этой отрасли параметров, например, в теплоэнергетической и нефтегазовой отрасли, а также при управлении сложными робототехническими комплексами.

Задача качественной настройки регуляторов усложняется при наличии параметрической неопределенности. Если известны диапазоны возможных значений постоянных параметров или пределы изменения нестабильных параметров, то говорят об их параметрической интервальности. Для оценки работоспособности таких систем желательно определить ее наихудшее качество и сравнить с допустимым. Наихудшее качество называют робастным и определяют при наихудших сочетаниях интервальных коэффициентов интервального характеристического полинома (ИХП) [1].

Для анализа качества интервальных САУ предлагается использовать его оценки, определяемые на основе коэффициентов ИХП. Они наиболее просто и непосредственно связаны с физическими параметрами системы, выбираемыми при ее проектировании. Это обстоятельство является одной из причин интереса к коэффициентным методам оценки устойчивости и качества динамических систем [2].

Большее внимание в настоящее время уделяется решению задач синтеза систем управления с максимальной степенью устойчивости [3–5]. Предложенные там методы основаны на использовании нормированных полиномов и применении к ним достаточных условий оптимальности по степени устойчивости. Однако разработанные подходы приемлемы, как правило, только для САУ низких порядков.

В связи с этим решение поставленной задачи предлагается проводить с применением коэффициентных оценок показателей качества, на основе которых разработаны простые достаточные условия устойчивости и качества САУ произвольного порядка [2].

Очевидно, что для проектировщика САУ желательно иметь удобный и эффективный инструмент, позволяющий проводить синтез САУ с использованием современного программного обеспечения (пакеты Mathcad, MATLAB, Maple, Borland C++). В частности, язык программирования C++ обладает определенными преимуществами перед остальными, имеет простой, но достаточно гибкий входной язык программирования, библиотеки стандартных подпрограмм – функций.

Целью данной работы является разработка на основе коэффициентного метода отдельного модуля для синтеза интервальной системы (ИС) с максимальной степенью устойчивости на языке программирования высокого уровня C++. Такой программный продукт получил название «Максимизация степени устойчивости линейной системы» (MDSLS).

Постановка задачи

Пусть САУ включает объект управления W_{oy} и регулятор W_p . Объект управления описывается передаточной функцией

$$W_{ov}(s) = \frac{b}{A(s)}, \quad A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i,$$

где $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$ ($\underline{a}_i$ – нижний предел; $\bar{a}_i$ – верхний предел) – коэффициенты полинома $A(s)$; b – коэффи-

циент передачи объекта управления; s – оператор Лапласа. Передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_p(s, \bar{k}) = f(s, \bar{k}),$$

где $\bar{k}$ – вектор настраиваемых параметров регулятора. Тогда характеристический полином САУ может быть представлен в виде

$$D(s, \bar{k}) = \sum_{i=0}^m d_i(\bar{k}) s^i. \quad (1)$$

Область возможных значений интервальных параметров системы (многогранник P_n , являющийся прямоугольным гиперпараллелепипедом) отображается на комплексную плоскость корней в виде областей их локализации и отрезков вещественной оси, где локализуются вещественные корни (рис. 1). Необходимо выбрать такие значения параметров вектора $\bar{k}$, которые на основе достаточных условий коэффициентного метода [5] обеспечивают максимизацию степени устойчивости $\eta^*_{\max}$ САУ при заданной добротности D системы по скорости и расположении корней полинома (1) в заданном секторе $\pm\varphi$. Корни полинома при этом должны лежать левее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-\eta^*_{\max}, j0)$, как показано на рис. 1.

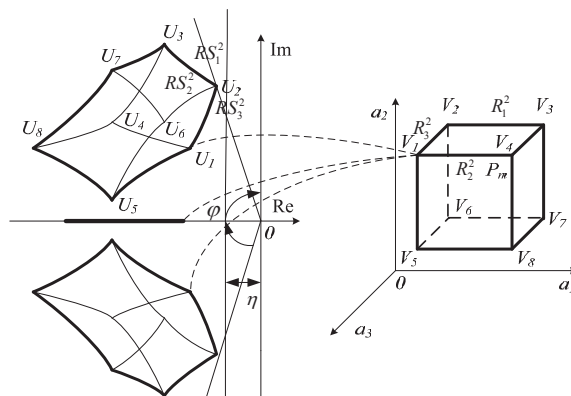


Рис. 1. Отображение параметрического многогранника САУ

Условия обеспечения желаемых показателей качества и точности интервальной системы

Для определения точности системы в установившемся режиме необходимо воспользоваться выражением установившейся ошибки САУ [1]

$$\varepsilon_{ув}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{dA(s)}{s(A(s) + k_p b)} = \frac{d}{k_p},$$

где $k_p = D_w$ – передаточный коэффициент разомкнутой системы, называемый добротность по скорости.

Тогда для заданной передаточной функции объекта управления $W_{об}(s)$ и функции регулятора $W_p(s)$ величина добротности по скорости будет определяться выражением

$$D = \frac{k_0 b}{d_0}.$$

Введём в рассмотрение основные коэффициенты показатели качества и на их основе найдем выражения для определения максимальной степени устойчивости и соответствующих ей параметров регулятора. Склонность системы к колебаниям проявляется при наличии в решении ее характеристического уравнения комплексных корней вида $-\alpha + j\beta$. Если имеются корни характеристического уравнения, то легко определить связанный с колебательностью системы угловой сектор $\pm\varphi$, в пределах которого расположены все его корни. Однако эту характеристику системы желательно получить непосредственно по коэффициентам характеристического полинома. Согласно [2], для анализа колебательности стационарной системы на основе коэффициентного метода используют параметры:

$$\delta_i = \frac{d_i^2}{(d_{i-1} d_{i+1})} \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Эти параметры являются безразмерными и называются показателями колебательности [5]. В [5] на основе δ_i приведено достаточное условие заданной колебательности: для расположения корней характеристического полинома САУ в заданном секторе $\pm\varphi$ достаточно выполнения условий:

$$\delta_i \geq \delta_\varphi(n, \varphi), \quad \forall i = \overline{1, n-1},$$

где δ_φ – допустимый показатель колебательности, определяемый из таблицы.

Таблица. Зависимость δ_φ от порядка системы и размера сектора

n	φ					
	65°	70°	75°	80°	85°	90°
3	1,846	1,684	1,518	1,348	1,175	1
4		1,75	1,696	1,609	1,515	$\sqrt{2}$
5					1,52	1,465

На основе данного условия авторами сформулировано следующее утверждение.

Утверждение 1. Для того чтобы корни интервального полинома (1) лежали в заданном угловом секторе, необходимо выполнение условий

$$\delta_i = \frac{d_i^2}{d_{i-1} d_{i+1}} > \delta_\varphi, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где d_i – нижний предел; $\bar{d}_i$ – верхний предел.

Доказательство. Пусть $d_i^2 = m$, а $n = d_{i-1} d_{i+1}$. Согласно [5], для оценки колебательности системы с переменными параметрами желательно определить ее наихудшее качество в наихудшем режиме. В данном случае система обладает наихудшим качеством, если

$$\delta_i \rightarrow \min. \quad (2)$$

Для выполнения условия (2) необходимо, чтобы

$$m \rightarrow \min, \quad n \rightarrow \max. \quad (3)$$

Очевидно, что (3) достигается при выборе следующих пределов: $m = \underline{d}_i$, а коэффициента $n = \overline{d}_{i-1} \overline{d}_{i+1}$. Если условия (3) выполняются для указанных пределов интервальных коэффициентов, то они выполняются и для всех других их значений из заданных интервалов.

Введем вспомогательные параметры λ_i , образуемые четверками рядом стоящих коэффициентов характеристического полинома

$$\lambda_i = \frac{\underline{d}_{i-1} \overline{d}_{i+2}}{(\underline{d}_i \overline{d}_{i+1})} \quad i = \overline{1, n-2}.$$

Параметры λ_i называют показателями устойчивости [5]. На основе λ_i в [5] разработано достаточное условие устойчивости стационарной системы: для устойчивости системы с заданным характеристическим полиномом достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\lambda_i < \lambda^* \approx 0,465 \quad \forall i = \overline{1, n-2}.$$

На основе этого условия авторами сформулировано следующее утверждение.

Утверждение 2. Чтобы все корни интервального полинома (1) лежали левее вертикальной прямой, проходящей через точку $(-\eta, j0)$, $0 \leq \eta < \infty$, достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{\overline{d}_{i-1} \overline{d}_{i+2}}{(\underline{d}_i - \underline{d}_{i+1})(n-i-1)\eta(\overline{d}_{i+1} - \overline{d}_{i+2}(n-i-2)\eta)} < \\ < 0,465 \quad i = \overline{1, n-2} \\ \underline{d}_i \leq \overline{d}_{i+1}(n-i-1)\eta \\ \underline{d}_0 - \overline{d}_1\eta + 2\underline{d}_2 \frac{\eta^2}{3} \geq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно [2] для оценки степени устойчивости ИС с интервальными параметрами желательно определить ее наихудшее качество, а именно максимальные значения ее показателей устойчивости, то есть

$$\lambda_i \rightarrow \max. \quad (4)$$

Введем обозначения

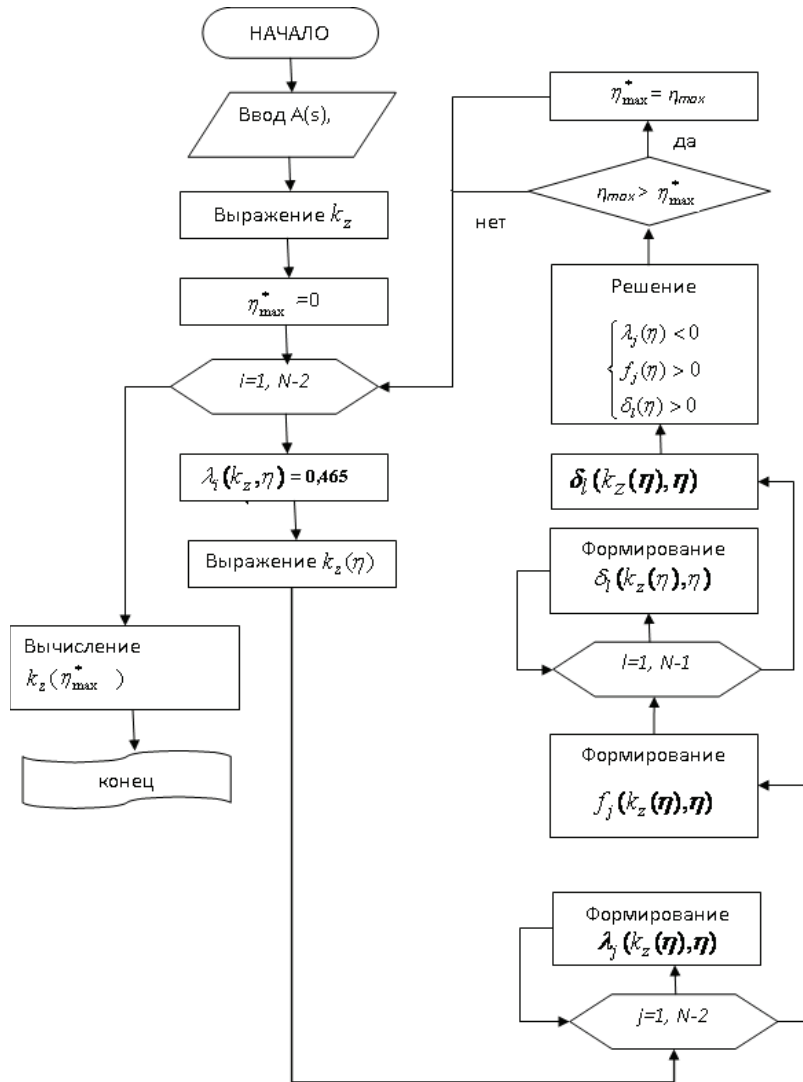


Рис. 2. Алгоритм синтеза линейных регуляторов интервальной САУ

$$\begin{aligned} d_{i-1} d_{i+2} &= m(d_i - d_{i+1}(n-i-1)\eta) \times \\ &\times (d_{i+1} - d_{i+2}(n-i-2)\eta) = \\ n \varepsilon_{uv}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon_u(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{dA(s)}{s(sA(s) + k_p b)} = \frac{d}{k_p}, \end{aligned}$$

Очевидно, что условие (4) выполняется при

$$m \rightarrow \max \text{ и } n \rightarrow \min. \quad (5)$$

На основе интервального анализа условия (5) выполняются при $\overline{d_{i-1} d_{i+2}}$ и

$$n = (\overline{d_i} - \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta)(\overline{d_{i+1}} - \overline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta).$$

Если условия (4) выполняются для указанных пределов интервальных коэффициентов, то они выполняются и для всех других их значений из заданных интервалов. Данное утверждение позволяет оценить робастную степень устойчивости ИС. Для его применения к ИС с целью определения максимальной робастной степени устойчивости сформулировано следующее утверждение.

Утверждение 3. Для определения максимальной робастной степени устойчивости ИС необходимо для всех вариантов сочетаний интервальных коэффициентов выбором параметров регулятора обеспечить максимальное значение $\eta_{\max}$ в $(n-2)$ системах

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\overline{d_{i-1}} \overline{d_{i+2}}}{(\overline{d_i} - \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta)(\overline{d_{i+1}} - \overline{d_{i+2}}(n-i-2)\eta)} = \\ &= 0,465, i = 1, n-2 \\ \lambda_j &< 0,465, j = 1, n-2, j \neq i \\ \overline{d_i} &\leq \overline{d_{i+1}}(n-i-1)\eta \\ \overline{d_0} - \overline{d_1}\eta + 2\overline{d_2} \frac{\eta^2}{3} &\geq 0. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Доказательство. Увеличивать значение η в системе (6), меняя параметры регулятора, можно до тех пор, пока $\lambda_i = 0,465 \forall i = 1, n-2$. При $\lambda_i = 0,465$ получаем максимальное значение показателя устойчивости λ_i , соответствующее наибольшей степени устойчивости системы. При этом интервалы коэффициентов полинома выбираются в соответствии с утверждением 2.

Алгоритм синтеза линейных регуляторов интервальной САУ

Для параметрического синтеза линейных регуляторов интервальных САУ разработан алгоритм, схема которого приведена на рис. 2.

Описание программного продукта

На основе составленного алгоритма разработан программный продукт MDSLS (создан в программном пакете Borland C++). Интерфейс модуля предполагает выбор типа регулятора и заданных ограничений (требуемой добротности САУ и допустимого показателя колебательности), а также возможность задавать значения коэффициентов объекта управления. На рис. 3 приведено главное окно ПП MDSLS.

Приведем ниже назначение, входные и выходные параметры функций ПП MDSLS:

- double functionobject (double *d₁, double *d₂) формирует интервальный характеристический полином D(s).
- double functionkd (double k₀) возвращает вычисленное значение параметра k₀ при ограничении на добротность.
- double functionq (double *q) формирует массив значений, состоящий из показателей колебательности.
- double functionkq (double k₁) вычисляет значение параметра k₁ при заданном ограничении на показатель колебательности.

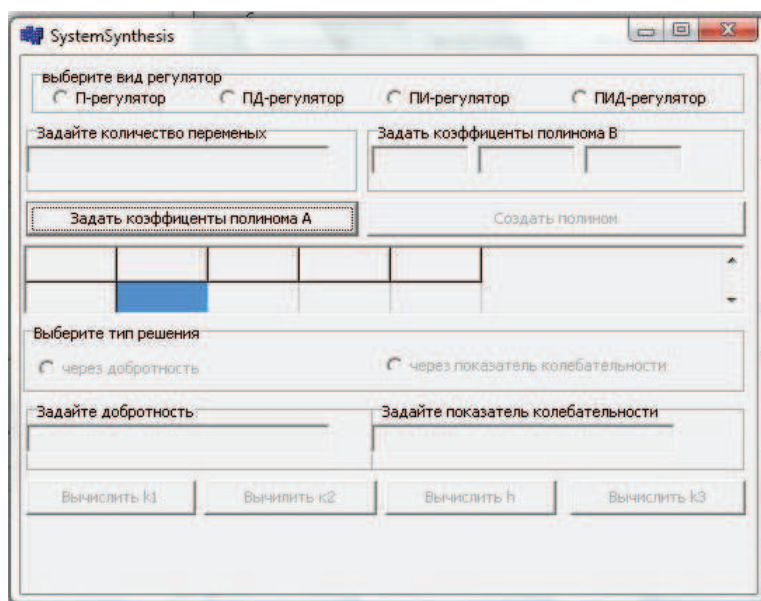


Рис. 3. Главное окно ПП MDSLS

SystemSynthesis

выберите вид регулятора
☐ П-регулятор ☐ ПД-регулятор ☐ ПИ-регулятор ☒ ПИД-регулятор

Задать количество переменных: 4

Задать коэффициенты полинома В: 1

Задать коэффициенты полинома А: [0.5, 2.6, 0.8, 0.05]

Создать полином

Выберите тип решения
☐ через добротность ☐ через показатель колебательности

Задать добротность: 10

Задать показатель колебательности: 1.6

Вычислить k1: 10 Вычислить k2: 11.1 Вычислить h: 0.73 Вычислить k3: 1

Рис. 4. Результаты синтеза регулятора в системе MDSLS

- double functionalpha (double *a1) необходима для получения уравнения $\lambda_i=0,465$.
- double functionh (double h) возвращает значение максимальной робастной степени устойчивости.
- double functionaf (double *f) формирует дополнительные функции $f(\eta)$ для системы неравенств (6).
- double functionk0h (double k_1 , h) находит значение параметра k_0 при известном значении максимальной степени устойчивости.
- double functionk1h (double k_1) вычисляет значение параметра k_1 при известном значении максимальной степени устойчивости.

Численный пример параметрического синтеза регулятора

Пусть коэффициенты интервального объекта управления принимают следующие значения $a_3 \in [0,05;0,1]$, $a_2 \in [0,8;0,9]$, $a_1 \in [2,6;3]$, $a_0 \in [0,5;1]$, $b=1$.

Требуется обеспечить в САУ максимальную степень устойчивости при заданной добротности по скорости $D=10$ и ограничении степени колебательности величиной, равной 1,6.

На основе приведенной выше методики найдем решение поставленной задачи с помощью ПИД-регулятора. Используя пакет MDSLS, рассчитаны

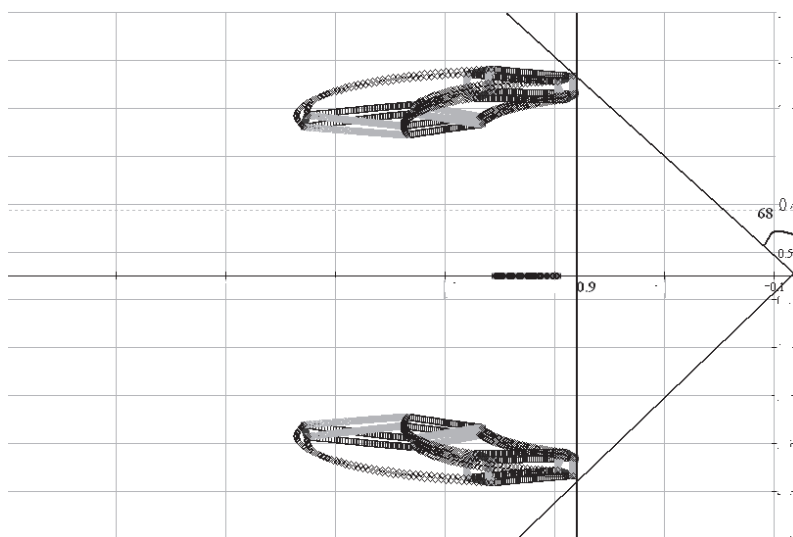


Рис. 5. Области локализации корней с найденными настройками ПИД-регулятора

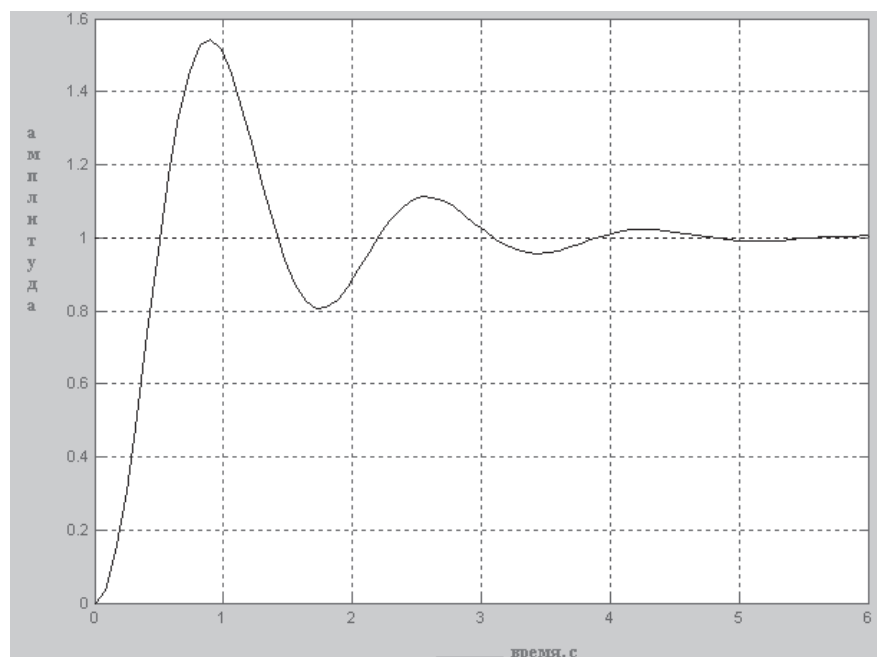


Рис. 6. Переходные характеристики системы

настройки ПИД-регулятора, обеспечивающие ограничение на степень колебательности величины, равной 1,6. Значения параметров ПИД-регулятора приведены на рис. 4.

Из рис. 4 видно, что степень устойчивости $\eta=0,73$, параметры регулятора $k_0=0$, $k_1=11,1$, $k_2=1$.

На рис. 5 приведена область локализации корней характеристического полинома ИС при найденных настройках ПИД-регулятора.

Из рис. 5 видно, что САУ имеет реальную максимальную степень устойчивости $\eta=-0,9$. При этом выполняются предъявленные к системе требования: добротность по скорости соответствует заданной величине, и степень колебательности интервальной САУ не превышает $\mu=\text{tg}(68^\circ)=1,6$.

Переходные характеристики системы с синтезированным ПИД-регулятором изображены на рис. 6. Из рис. 6 можно сделать вывод, что время переходного процесса $t_n=4,2$ с, что соответствует найденной степени устойчивости ИС.

Заключение

1. Разработанный алгоритм синтеза линейного регулятора использует коэффициентные оценки показателей качества системы, на основе которых формируются упрощенные алгебраические соотношения между оценкой снизу степени устойчивости системы и коэффициентами характеристического полинома.
2. Робастная устойчивость системы автоматического управления достигается путем расположения областей локализации ее полюсов левее максимальной оценки снизу степени устойчивости системы, что обеспечивает максимальное быстродействие и снижает колебательность.
3. Разработан программный модуль на языке C++, позволяющий на ПЭВМ определять настройки линейного регулятора, обеспечивающего максимальную степень устойчивости при заданных ограничениях.
4. Работоспособность разработанного алгоритма проверена на числовом примере при расчете настроек ПИД-регулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
2. Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. и др. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами: Инженерные методы анализа и синтеза. — М.: Машиностроение, 1986. — 256 с.
3. Шубладзе А.М. Способы синтеза систем управления максимальной степенью устойчивости // АиТ. — 1980. — № 1. — С. 28–37.
4. Ким Д.П. Синтез регулятора максимальной степени устойчивости // Приводная техника. — 2003. — № 4. — С. 52–57.
5. Волков А.Н., Загашвили Ю.В. Метод синтеза систем автоматического управления с максимальной степенью устойчивости при наличии ограничений // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 12–19.

Поступила 25.06.2012 г.