

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЛИЧИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ И ИХ ЧАСТОТ В ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛАХ НА ОСНОВЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

В.С. Аврамчук

Томский политехнический университет

E-mail: avs@tpu.ru

Предложен и проверен способ определения наличия гармонических составляющих и их частот в дискретных сигналах на основе расчета частотно-временной автокорреляционной функции. Показано, что данный способ позволяет корректно определить наличие периодических сигналов и их частот в анализируемом сигнале.

Ключевые слова:

Цифровой сигнал, корреляционный анализ, автокорреляция.

Key words:

Digital signal, correlation analysis, autocorrelation.

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) в настоящее время используется практически во всех областях науки и техники: анализ и распознавание речевых сигналов, сейсмология, радиолокация, медицина, биология, химия и т. д. Одними из наиболее часто решаемых задач ЦОС являются спектральный анализ, цифровая фильтрация и выделение полезного сигнала на фоне интенсивных помех. Для решения последней задачи привлекается математический аппарат корреляционного анализа сигналов. Так, например, взаимная корреляционная функция применяется в задачах обнаружения координат утечек в трубопроводах, по максимальному значению которой судят как о факте наличия утечки, так и о расстоянии до нее. По характеру автокорреляционной функции определяют наличие слабого периодического сигнала в смеси и его период. Несколько сложнее обстоит анализ полигармонических сигналов, трактовка автокорреляционной функции которых весьма затруднительна и зависит от параметров гармонических составляющих сигнала. В этом случае для определения частот гармонических составляющих применяются спектральный анализ и фильтрация сигнала. Использование данного подхода затруднено по нескольким причинам: *во-первых*, спектр полезного сигнала чаще всего неизвестен, а мощность полезного сигнала может быть весьма малой по сравнению с мощностью шума, *во-вторых*, спектр полезного сигнала может перекрываться спектром помех. Эти обстоятельства затрудняют использование указанного подхода. Целью данной работы является расширение возможности использования корреляционного метода анализа сигналов при определении наличия гармонических составляющих и их частот в полигармонических сигналах.

Использование математического аппарата корреляционного анализа основано на свойстве периодичности автокорреляционной функции периодического сигнала. Автокорреляционная функция непрерывного сигнала $x(t)$ при интервале наблюдения $T \rightarrow \infty$ выглядит следующим образом [1]:

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t + \tau) dt,$$

где τ – величина задержки. Для расчета автокорреляционной функции конечной длины записи применяется следующая формула [1]

$$K(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt. \quad (1)$$

Для функции случайного процесса, представленного одной гармоникой

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где A , ω – соответственно амплитуда и круговая частота гармоники – известны, а φ , фазовый угол гармоники, является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $[0, 2\pi]$, обладающего свойством эргодичности, автокорреляционная функция выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(\omega \cdot t + \varphi) \cdot A \cos(\omega \cdot t - \omega \cdot \tau + \varphi) dt = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega \cdot \tau) + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2 \cdot T} \int_0^T \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \varphi - \omega \cdot \tau) dt = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega \cdot \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

На основании (3) автокорреляционная функция с ростом τ не стремится к нулю, а её значения меняются с частотой ω – частотой изменения исходного сигнала. Именно этот факт используется для обнаружения и выделения слабого периодического сигнала на фоне интенсивных помех [2, 3], при этом автокорреляционная функция помехи спадает практически до нуля с ростом τ при $\tau > \tau_0$, где τ_0 – интервал корреляции. В случае, когда сигнал представлен суммой независимых между собой составляющих периодического сигнала $x(t)$ и ста-

ционарного шума $n(t)$: $y(t)=x(t)+n(t)$, автокорреляционная функция суммы согласно [2] запишется следующим образом

$$K_y(\tau) = K_x(\tau) + K_n(\tau),$$

причем $K_n(\tau)$ при $\tau > \tau_{0n}$, где τ_{0n} – интервал корреляции шума, приближенно равна нулю. Следовательно, $K_y(\tau)=K_x(\tau)$ при $\tau > \tau_{0n}$. Таким образом, определить наличие или отсутствие в сигнале $y(t)$ периодического сигнала $x(t)$ можно по автокорреляционной функции $K_y(\tau)$. Если при $\tau > \tau_{0n}$ автокорреляционная функция периодична, то в $y(t)$ присутствует гармонический сигнал, частоту которого можно определить. При использовании такого подхода к выявлению периодического сигнала в смеси необходимо отметить некоторые свойства автокорреляционной функции [2]:

- $K(\tau)=K(-\tau)$, т. е. функция $K(\tau)$ является чётной;
- максимальное значение соответствует $\tau=0$ и равно квадрату среднеквадратичного отклонения $K(0)=\delta^2$;
- значения автокорреляционной функции большинства случайных процессов убывают с ростом аргумента τ ;
- если $x(t)$ – синусоидальная функция времени, то её автокорреляционная функция представлена косинусоидой той же частоты (1–3);
- если $x(t)$ – периодическая функция, то $K(\tau)$ для неё может быть представлена в виде суммы автокорреляционных функций от постоянной составляющей и от синусоидально изменяющейся составляющей;
- функция $K(\tau)$ не несёт информации о начальных фазовых углах гармонических составляющих;
- автокорреляционная функция и спектр мощности связаны преобразованием Фурье.

На основании приведенных свойств можно определить наличие периодического сигнала в смеси, однако этот подход, как правило, не приемлем для полигармонических сигналов, которые представляют наиболее широко распространенную группу периодических сигналов

$$x(t) = \sum_{i=0}^N A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n),$$

где A_n , ω_n , φ_n – соответственно амплитуда, круговая частота и фазовый угол гармонической составляющей, N – число гармонических составляющих. Это обусловлено сложностью интерпретации графика полученной автокорреляционной функции. Для устранения этого недостатка воспользуемся частотно-временной корреляционной функцией [4, 5] и ранее приведенными особенностями автокорреляционной функции.

Как известно, автокорреляционную функцию можно получить, используя преобразование Фурье по следующему выражению [1]

$$K(\tau) = F^{-1}[F(x_i)F^*(x_i)],$$

где F – прямое дискретное преобразование Фурье сигнала x_i , F^* – комплексно-сопряженное значение

результатов прямого дискретного преобразования, F^{-1} – обратное дискретное преобразование Фурье. Прежде чем подвергнем произведение $F(x_i)F^*(x_i)$ обратному преобразованию Фурье, составим m его копий M^k , $k=0, \dots, m-1$, предварительно обнулив весь спектр, кроме k -й части. В результате обратного преобразования Фурье каждой из этих копий получим автокорреляционную функцию на соответствующих частотах. Совокупность всех результатов обратного дискретного преобразования Фурье дает частотно-временную автокорреляционную функцию. Формульная запись имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} K(f_k, t_i) &= Z_i^k, \\ Z^k &= F^{-1}[M^k], \\ M_j^k &= \begin{cases} P_j, & \frac{k}{m} \leq \frac{j}{2^{n-1}+1} < \frac{k+1}{m}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \\ P_j &= F(x_i)F^*(y_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где x_i – дискретные отсчеты анализируемого сигнала, $i=0, 1, \dots, 2^n-1$, $j=0, 1, \dots, 2^{n-1}+1$, $k=0, 1, \dots, m-1$, $m=1, 2, \dots, 2^{n-1}$, $n=2, 3, \dots$

Блок-схема вычислений, соответствующих условию (4), приведена на рис. 1. Прямое и обратное преобразования Фурье реализованы в форме быстрого преобразования Фурье (БПФ). На входы блоков вычисления прямого преобразования Фурье (БПФ) поступают сигналы x_i и y_i размерностью 2^n .

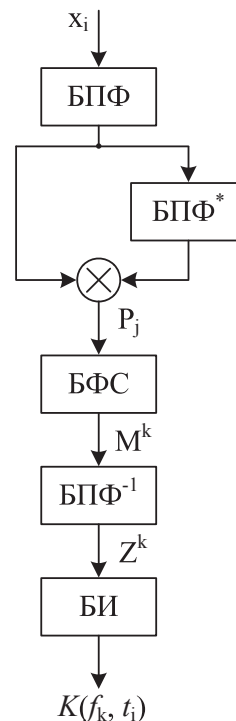


Рис. 1. Блок-схема вычисления частотно-временной автокорреляционной функции: БПФ – блок быстрого преобразования Фурье; БПФ* – блок получения комплексно сопряженных чисел; БФС – блок формирования сигналов; БПФ⁻¹ – блок быстрого обратного преобразования Фурье; БИ – блок интерпретации

Из полученного произведения P_j в блоке формирования сигналов БФС формируются m сигналов M^k , где $j=0,1,\dots,2^{n-1}+1; m=1,2,\dots,2^{n-1}; k=0,1,\dots,m-1$. Полученные сигналы M^k подвергаются обратному преобразованию Фурье $Z^k=F^{-1}[M^k]$. По результатам обратного преобразования Фурье в блоке интерпретации определяется частотно-временная корреляционная функция

$$K(f_k, t_i) = Z_i^k,$$

где

$$t_i \in [t_{\min}, t_{\max}]; f_k \in [f_{\min}, f_{\max}]; t_i = i \cdot \frac{1}{f_d};$$

$$f_k = \frac{k \cdot f_{\max}}{m-1}; t_{\min} = -\frac{2^{n-1}}{f_d}; t_{\max} = \frac{2^{n-1}-1}{f_d};$$

$$f_{\min} = \frac{f_d}{2^n}; f_{\max} = \frac{f_d}{2};$$

f_d – частота дискретизации сигнала. По полученным результатам можно построить график частотно-временной автокорреляционной функции $K(f,t)$, который визуально иллюстрирует корреляцию гармонических составляющих исследуемого сигнала x_i на различных частотах.

Таблица. Исходные данные и результаты расчета тестовых примеров

№ примера	Частоты гармонических составляющих, кГц	Расчетное значение частоты, Гц
1	5	5000,6250
	6	6004,6875
	7	7008,7500
	8	7993,1250
	9	8997,1875
	10	10001,2500
2	5	5000,6250
	6	6004,6875
	7	7008,7500
	8	7993,1250
	17	17010,0000
	18	17994,3750
3	19	18998,4375
	20	20002,5000
	1	1004,0625
	2	1988,4375
	3	2992,5000
	9	8997,1875
	10	10001,2500
	11	11005,3125
18	17994,3750	
19	18998,4375	
20	20002,5000	

Для демонстрации работоспособности и корректности получаемых данных воспользуемся предложенным способом для расчета частотно-временной автокорреляционной функции $K(f,t)$.

Для этого сформируем несколько тестовых примеров, представленных в таблице. Частота дискретизации тестовых сигналов равна $f_d=44100$ Гц, что соответствует стандартному и широко используемому значению в современных аналого-цифровых преобразователях (АЦП), в частности АЦП звуковых карт персональных ЭВМ. Размер выборки $2^n=2^{14}=16384$ отсчета, количество формируемых сигналов $m=1121$. Амплитуды гармонических составляющих в тестовых примерах приняты равными единице. Результаты анализа тестовых примеров представлены в таблице и приведены на рис. 2.

Полученные частотно-временные автокорреляционные функции ярко выражены на частотах близких к заданным в тестовых примерах, что свидетельствует о наличии в анализируемом сигнале гармонических составляющих и работоспособности предложенного способа определения наличия гармонических составляющих и корректности получаемых данных. Расчетные значения частотно-временной автокорреляционной функции $K(f,t)$ представлены цветом: максимальное значение отображено черным цветом, минимальное – белым, а промежуточные значения – в уровнях серого цвета.

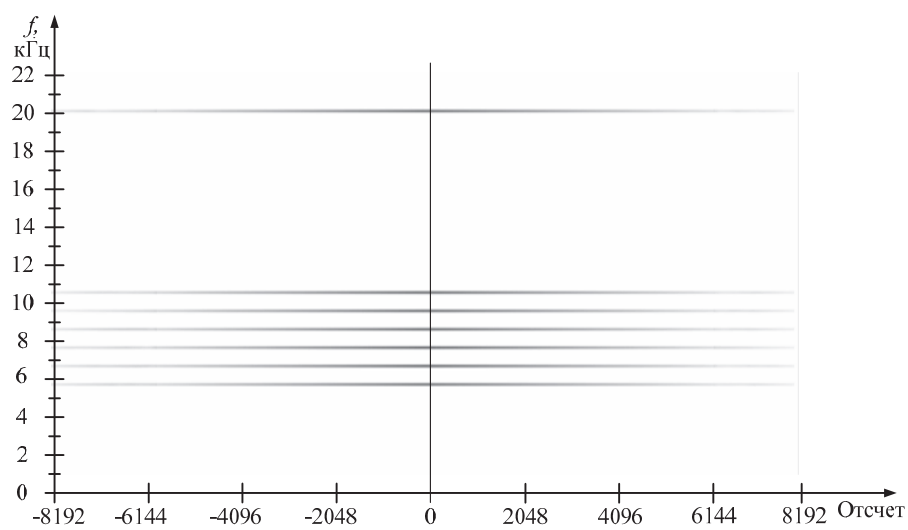
Необходимо отметить, что выбор оптимального значения m осуществляется экспериментальным путем при решении конкретных задач и необходимой точности определения частот гармонических составляющих. Для уточнения частоты гармонической составляющей можно воспользоваться разработанными способами гармонического анализа [6–8] в интересующем интервале частот, при этом точность определения частоты гармоники будет зависеть от выбранного шага перебора по частоте.

Выводы

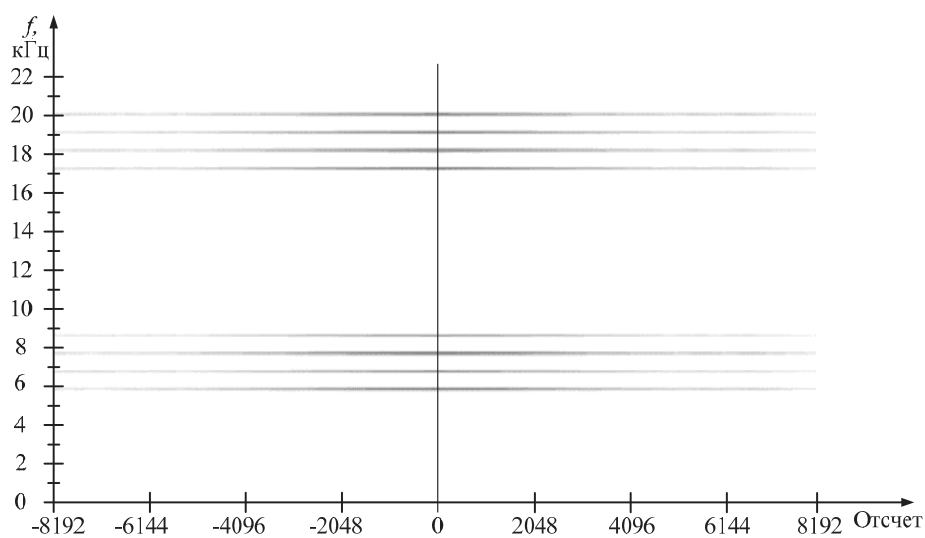
Показано, что использование предложенного способа расчета частотно-временной автокорреляционной функции позволяет определить наличие гармонических составляющих в сигнале и значения их частот на ограниченной по размеру выборке дискретного сигнала.

Наличие гармонических составляющих в анализируемом сигнале определяется по полученной частотно-временной автокорреляционной функции и сводится к выделению на графике горизонтальных линий и выделению частот, соответствующих им. Таким образом, использование приведенного способа расчета частотно-временной автокорреляционной функции расширяет возможности корреляционного анализа при исследовании полигармонических сигналов и непосредственно упрощает процесс их анализа.

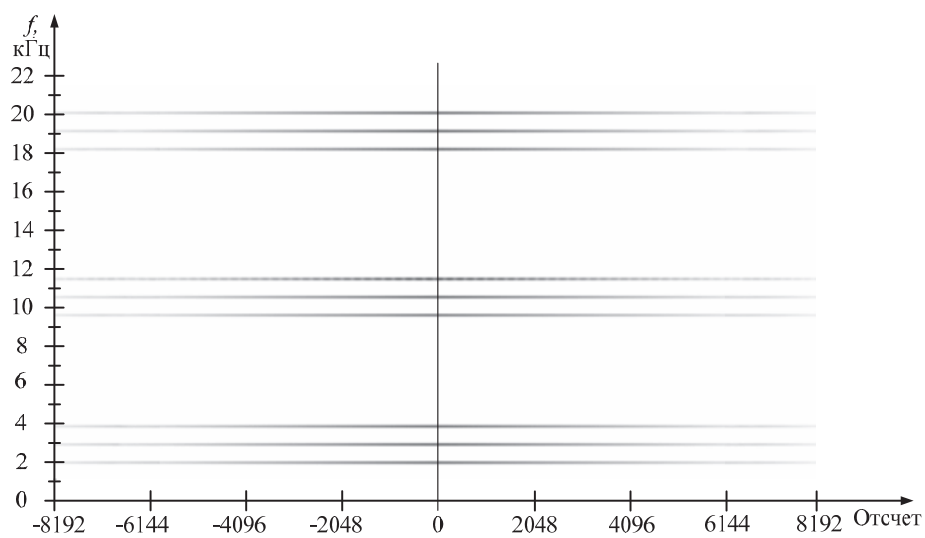
Разработанный способ расчета частотно-временной корреляционной функции может быть использован при решении задач обнаружения утечек, вибродиагностики, обнаружения и анализа слабых периодических сигналов.



Пример 1



Пример 2



Пример 3

Рис. 2. Частотно-временные автокорреляционные функции результатов расчета тестовых примеров

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход. 2-е изд. – М.: Вильямс, 2008. – 992 с.
2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.
3. Lee Y.W. Statistical Theory of Communication. – New-York: John Wiley & Sons, Inc., 1960. – 288 p.
4. Способ частотно-временного корреляционного анализа цифровых сигналов: пат. 2405163 Рос. Федерация. № 2009118627/28; заявл. 18.05.09; опубл. 27.11.09, Бюл. № 33. – 10 с.
5. Аврамчук В.С., Чан Вьет Тъяу. Частотно-временной корреляционный анализ цифровых сигналов // Известия Томского политехнического университета. – 2009. –Т. 315. – № 5. – С. 112–115.
6. Аврамчук В.С., Яковлева Е.М. Применение решетчатых периодических функций в спектральном анализе узкополосных периодических сигналов // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 40–44.
7. Способ спектрального анализа многочастотных периодических сигналов, представленных цифровыми отсчетами: пат. 2229140 Рос. Федерация. № 2003108753/28; заявл. 28.03.03; опубл. 20.05.04, Бюл. № 14. – 6 с.
8. Способ спектрального анализа сложных несинусоидальных периодических сигналов представленных цифровыми отсчетами: пат. 2229139 Рос. Федерация. № 2002133542/28; заявл. 10.12.02; опубл. 20.05.04, Бюл. № 14. – 9 с.

Поступила 17.09.2012 г.

УДК 519.87

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ОЦЕНКЕ СОСТОЯНИЯ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МЕДИЦИНСКИХ СИСТЕМ

О.М. Геррет, В.А. Кочегуров

Томский политехнический университет

E-mail: Olgagerget@mail.ru

Обсуждается проблема использования энергетических и информационных показателей для оценки состояния здоровья биообъекта. Изучена динамическая биосистема, которая характеризуется входом, выходом и вектором состояния, изменение которого обеспечивается обменными энергетическими процессами, происходящими внутри и поддерживаемыми поступлением энергии извне. Рассмотрены методы, позволяющие осуществить индивидуализированный подход к принятию решения в задачах практической медицины.

Ключевые слова:

Математические методы, доказательная медицина, энергетические показатели, энтропия, здравоохранение.

Key words:

Mathematical methods, evidence-based medicine, energy indicators, entropy, health service.

Введение

В настоящее время широко обсуждаемыми в научной общественности проблемами в области медицины являются: доказательная медицина и медицина будущего.

В каждой из перечисленных выше проблем можно выделить по два направления. В первой – выявление закономерностей развития в исследуемых объектах и индивидуализированная оценка состояния каждого объекта [1]. Решения задач доказательной медицины могут быть получены только с использованием математических методов. Для выявления закономерностей развития, как правило, широко используются статистические методы, позволяющие определить траекторию функционирования однородных объектов. Однако в большинстве случаев они не дают возможности выявить причинно-следственные связи, которые очень важны в доказательном подходе. Во второй – создание современного инструментария для профилактики здоровья и соответствующих средств лечебно-восстановительной терапии [2].

Обе проблемы и их направления важны и требуют дополнительного исследования. В данной статье более подробно остановимся на направлении создания современного инструментария для профилактики здоровья и оценке состояния здоровья детей в раннем неонатальном периоде с использованием энергетических и информационных показателей.

Энергетические показатели в оценке состояния функционирования биосистемы

В настоящей работе будем рассматривать организм ребенка как некоторую сложную динамическую биосистему. Сложные системы могут качественно отличаться друг от друга – быть физической, экономической, физиологической, социальной и др. природы, однако все они подчиняются законам термодинамики и представляют собой целостный объект с взаимосвязанной структурой, который взаимодействует с окружающей средой. Для того чтобы биосистема существовала, она должна обмениваться с внешней средой информаци-