

# МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ В ТЕНЗОРАХ

А.В. Морозов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

Широко используемый в современном электроприводе асинхронный двигатель (АД) с короткозамкнутым ротором представляет собой сложный нелинейный объект управления. Вместе с этим, в силу конструктивных особенностей, прямое измерение электромагнитных переменных состояния ротора является практически не реализуемым, а параметры изменяются в процессе работы двигателя. Перечисленные факторы, и, как следствие, качество и процесс регулирования переменных в электроприводе на основе АД напрямую зависит от используемых при проектировании моделей [1].

Общепринятой математической моделью является модель машины переменного тока следующего вида

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{s\alpha\beta} = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_{s\alpha\beta} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_{s\alpha\beta}}{dt}, \\ 0 = \mathbf{R}_r \mathbf{I}_{r\alpha\beta} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_{r\alpha\beta}}{dt}, \\ J \frac{d\Omega}{dt} = M - M_c, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{U}_{s\alpha\beta} = [U_{s\alpha} \quad U_{s\beta}]^T$ ;  $\mathbf{I}_{s\alpha\beta} = [I_{s\alpha} \quad I_{s\beta}]^T$ ;  $\mathbf{I}_{r\alpha\beta} = [I_{r\alpha} \quad I_{r\beta}]^T$ ;  
 $\boldsymbol{\Psi}_{s\alpha\beta} = [\Psi_{s\alpha} \quad \Psi_{s\beta}]^T$ ;  $\boldsymbol{\Psi}_{r\alpha\beta} = [\Psi_{r\alpha} \quad \Psi_{r\beta}]^T$ ;  $\mathbf{R}_s = [R_s \quad R_s]^T$ ;  $\mathbf{R}_r = [R_r \quad R_r]^T$ .

Использование модели (1), как правило, сопровождается рядом допущений, принимаемых для упрощения расчета процессов, протекающих в двигателе. Среди таких допущений можно выделить пренебрежение потерями в стали, насыщением магнитопровода, неравномерностью воздушного зазора, эффектом вытеснения тока, а так же допущение о симметричности трехфазных обмоток статора и ротора [2]. Учет допущений в первую очередь необходим для возможности организации алгоритмов управления в процессе моделирования. Однако указанная идеализация в определенных случаях может приводить к существенным различиям по отношению к реальным процессам, протекающим в двигателе во время его работы. Более детального математического описания АД с короткозамкнутым ротором удастся достичь средствами тензорного анализа [3].

Рассмотрим принцип построения математического описания АД в тензорах на примере элементарного проводника, к концам которого приложено напряжение  $u$ . Необходимо составить выражение, отражающее эффект вытес-

нения тока в проводнике. Для этого разобьем сечение проводника  $S$  на  $N$  элементарных площадей.

Сопротивление одного элементарного проводника будет в  $N$ -раз больше, чем общее сопротивление  $R$ . Учитывая эффект вытеснения величина и фаза тока в проводниках будет меняться. Система уравнений баланса напряжений для всех элементарных проводников будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_1}{dt} + R_1 i_1 = u_1, \\ \frac{d\Psi_2}{dt} + R_2 i_2 = u_2, \\ \dots \\ \frac{d\Psi_N}{dt} + R_N i_N = u_N. \end{cases} \quad (2)$$

Согласно тензорной методологии введем  $N$ -мерное пространство с координатной системой  $x^1, x^2, \dots, x^N$  и системой локальных базисных векторов  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \dots, \vec{e}^N$  [3]. В результате умножения уравнений системы (2) на соответствующие базисные вектора получим

$$\frac{d\Psi_1}{dt} \vec{e}^1 + \dots + \frac{d\Psi_N}{dt} \vec{e}^N + R_1 i_1 \vec{e}^1 + \dots + R_N i_N \vec{e}^N = u_1 \vec{e}^1 + \dots + u_N \vec{e}^N. \quad (3)$$

Или с учетом равенства сопротивлений элементарных проводников

$$\frac{d\Psi_1}{dt} \vec{e}^1 + \dots + \frac{d\Psi_N}{dt} \vec{e}^N + R_\mu \vec{i} = \vec{u}. \quad (4)$$

Далее необходимо преобразовать сумму первых  $N$  слагаемых к векторному виду. Для этого найдем

$$\sum_{\xi=1}^N \frac{d\Psi_\xi}{dt} \vec{e}^\xi = \frac{d\vec{\Psi}}{dt} - \sum_{\nu=1}^N \Psi_\nu \frac{d\vec{e}^\nu}{dt}. \quad (5)$$

Дифференциалы локальных базисных векторов преобразуются как

$$d\vec{e}^\nu = - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \Gamma_{ij}^\nu \vec{e}^i dx^j, \quad (6)$$

где  $\Gamma_{ij}^\nu$ - символы Кристоффеля второго рода, или, другими словами, коэффициенты связности пространства [3].

В тензорной форме получим

$$\frac{d\Psi_\mu}{dt} + \Gamma_{\mu j}^k \Psi_k \frac{dx^j}{dt} + R_\mu i_\mu = u_\mu. \quad (7)$$

Распространяя указанный пример на обмотки АД с короткозамкнутым ротором, не трудно показать, что уравнение равновесия напряжений в АД будет иметь схожий с (7) вид. В результате разложения (7) на статорную и роторную составляющие получим следующую систему тензорных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_s}{dt} + R_1 I_s = u_s & (\overline{s=1, 2}), \\ \frac{d\Psi_r}{dt} + \sum_{k=1}^2 \omega_r^k \Psi_k + R_2' I_r = 0 & (\overline{r=3, 4}), \end{cases} \quad (8)$$

при  $\sum_{k=1}^2 \omega_r^k \Psi_k = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \Gamma_{rj}^k \Psi_k \frac{dx^j}{dt}$ ,  $R_1 I_\mu = (R_1 I_s, R_2' I_r)$  в четырехмерном

подпространстве с координатной системой  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4$ .

Рассмотренный принцип получения тензорных уравнений можно применить и к остальным переменным состояния АД [3]. Тогда тензорная модель АД с короткозамкнутым ротором будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{d\Psi_s}{dt} + R_1 I_s = u_s & (\overline{s=1, 2}), \\ \frac{d\Psi_r}{dt} + \sum_{k=1}^2 \omega_r^k \Psi_k + R_2' I_r = 0 & (\overline{r=3, 4}), \\ \Psi_s = L_1 I_s + \sum_{r=3}^4 L_m \Omega_s^r I_r & (\overline{s=1, 2}), \\ \Psi_r = L_2' I_r + \sum_{s=1}^2 L_m \Omega_r^s I_s & (\overline{r=3, 4}), \end{cases} \quad (9)$$

где  $\Omega_s^r, \Omega_r^s$  - тензоры вращения, необходимые для суммирования векторов тока статора и ротора[3].

Из системы уравнений (9) после преобразования в форму Коши составлена тензорная модель трехфазного АД с короткозамкнутым ротором в САПР MatlabSimulink (см. рис. 1).

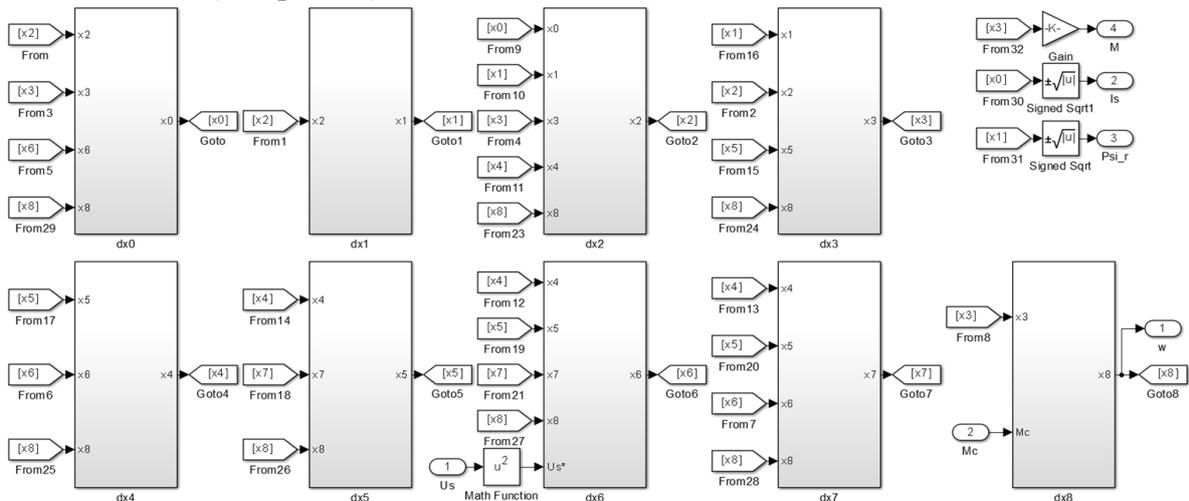


Рис. 1. Тензорная модель АД

Результаты моделирования АД 75 кВт представлены на рис. 2.

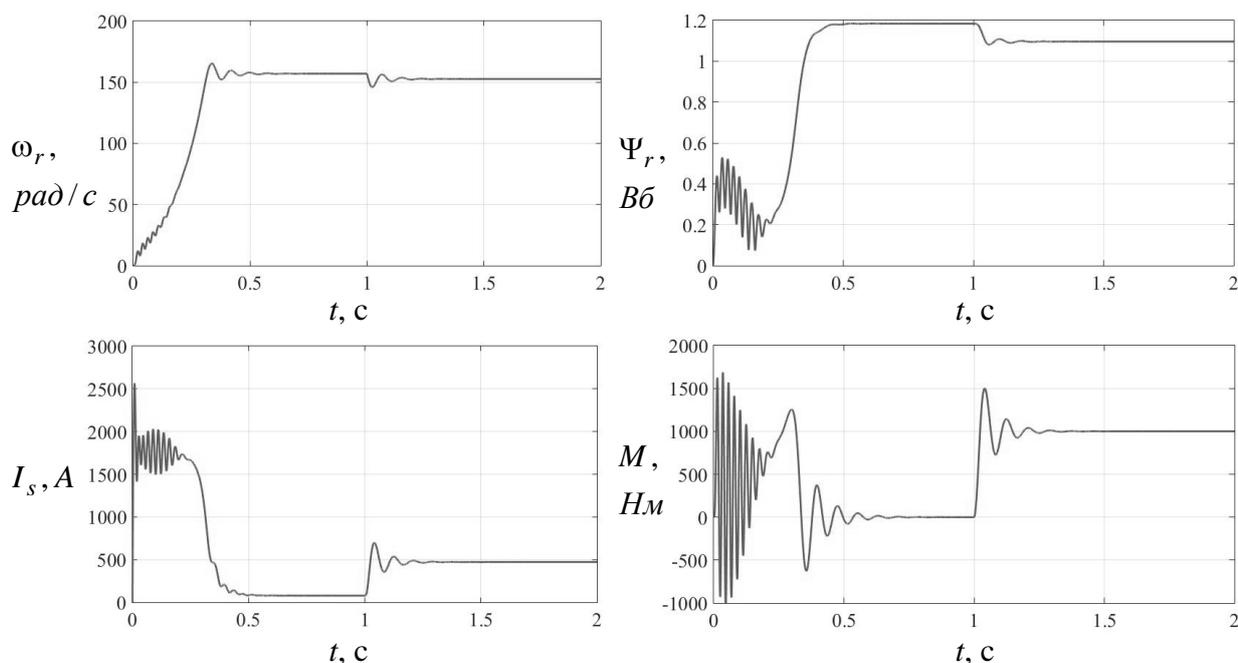


Рис. 2. Переходные процессы в АД

Дифференциальное уравнение, учитывающее механическую составляющую работы двигателя, не отличается от соответствующего уравнения в системе (1). На рис. 2 показано моделирование прямого пуска АД и наброс нагрузки 1 кНм в момент времени 1 секунда. Как можно заметить, графики переходных процессов, полученные в результате моделирования тензорной модели АД, соответствуют общепринятым представлениям.

Представленную тензорную математическую модель АД вида (9) так же называют бескоординатной. К преимуществам такого описания стоит отнести возможность учета различных физических эффектов, возникающих в обмотках АД в процессе его работы.

Следующим этапом в использовании тензорного аппарата применимо к нелинейным электромеханическим системам может стать разработка соответствующих алгоритмов управления и наблюдателей состояния для представленной модели АД.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152с
2. Виноградов А.Б. Векторное управление электроприводами переменного тока // ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет В. И. Ленина». – Иваново, 2008. – 297 с
3. Курнышев Б.С. Тензорная методология в теории электротехнических систем: учебное пособие // Б.С. Курнышев, С.П. Данилов. - ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет В. И. Ленина». – Иваново, 2002.- 173 с

Научный руководитель: Б. В. Бруслиновский, к.т.н., доцент кафедры САУ, СПбГЭТУ.