ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЭТАПНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕПРЕРЫВНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Шерстобитова А. О.
Научный руководитель: к.ф. – м.н. Емельянова Т. В.
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск. Пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: annaivashchenko06@gmail.com

В теоретических и прикладных исследованиях, связанных с задачами обработки временных рядов и их спектральным анализом, задачами автоматического управления и регулирования, идентификации и фильтрации, в физике и финансовой инженерии широко используются динамические системы, описываемые стохастическими дифференциальными и стохастическими разностными уравнениями. В настоящее время существует достаточно много исследований, посвященных задачам асимптотического оценивания [1]. Однако, для практических задач типична неасимптотическая проблема оценивания, когда требуется определить длину реализации, при которой оценки достигают заданной точности [2]. В практических задачах объем доступных данных всегда конечен и желательно иметь представление о качестве оценок, вычисленных по наблюдениям на ограниченном временном интервале. Одним из подходов к задачам оценивания в неасимптотической постановке является подход с позиции последовательного анализа, который характеризуется тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее и определяется специальными правилами остановки.

Целью работы является исследование асимптотического распределения оценок параметра, полученных с помощью одноэтапной последовательной процедуры, предложенной в работе [3].

Пусть наблюдаемый p-мерный процесс $X_t = (X_1(t),..., X_p(t))'$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t,$$

в которой A и B – квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p\times p$, W_t – стандартный p-мерный процесс броуновского движения.

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \left\| a_{ij} \right\|$ по наблюдениям процесса X_t. К этой задаче сводится задача оценивания параметров стационарного гауссовского процесса авторегрессии p-го порядка $(AP(p))$, описываемого уравнением

$$dx_t^{p-1} = (\theta_1 x_t^{p-1} + ... + \theta_p x_t)dt + \sigma dw_t \qquad (1)$$

с рациональной спектральной плотностью, имеющей вид $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2}{\left|Q(i\lambda)\right|^2}$.

Предположим, что процесс авторегрессии (1) устойчив, т. е. все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - \dots - \theta_p$ лежат в единичном круге. Пусть $H > 0$.

Асимптотическое распределение последовательных оценок устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть задан процесс вида (1), где A и B – квадратные матрицы размера $p\times p$, $\mathrm{W_t}$ – стандартный p-мерный процесс броуновского движения

Пусть неизвестные параметры θ_i, $i = \overline{1, p}$, таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - ... - \theta_p$ лежат в единичном круге. Последовательный план $(\tau_H, \theta^*(H))$ задается формулами

$$\tau = \tau(H) = \inf\{t > 0 : \left\| M_T^{-2} \right\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{H}\}, \tag{2}$$

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \int_0^{\tau(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p, \tag{3}$$

где $H > 0$ – пороговое значение.

Тогда вектор $\frac{1}{\sqrt{H}}(\theta^*(H) - \theta)$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0, F^{-1})$.

Результат теоремы может быть использован для построения доверительных интервалов для параметров модели авторегрессии, а также для исследования оптимальности одноэтапной последовательной процедуры оценивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998. – Т.1. – 512 с.
2. Холево А. С. Оценка параметра сноса диффузионного процесса методом стохастической аппроксимации// Исследование по теории самонастраивающихся систем. – 1967. – с. 179-200.
3. Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии//Вестник Томского государственного университета: Математика и механика. №5(25). Томск, 2013. – с. 12-25.