УДК 519.865

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ КУПЛИ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА ОСНОВЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕНЫ РИСКОВОГО АКТИВА

У.В. Андреева, Е.Ю. Данилюк, Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, Е.Г. Пахомова*

Томский государственный университет
E-mail: egi@sibmail.com; daniluc_elena@sibmail.com
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Рассматриваются два вида экзотических опционов купли Европейского типа в диффузионной модели (B,S)-финансового рынка, основанных на экстремальных значениях цены рискового актива, по которому выплачиваются дивиденды. Получены формулы, определяющие стоимости опционов, портфели (хеджирующие стратегии) и соответствующие им капиталы. Рассматриваются свойства решения.

Ключевые слова:
Финансовый рынок, опцион, платежная функция, капитал, портфель, хеджирование.
Key words:
Financial market, option, payoff function, capital, portfolio, hedging.

Опцион – это производная ценная бумага, являющаяся контрактом, по которому покупатель опциона приобретает право покупки (call option) или продажи (put option) по оговоренной цене заявленного в контракте базисного актива, а продавец опциона за премию – цену опциона – обязан исполнить требование покупателя в момент исполнения опциона [1–5]. Если платежные обязательства характеризуются только ценой базисного актива в фиксированный момент исполнения опциона S_T (спотовая цена, spot price) и ценой исполнения контракта K (страйковая цена – striking price), то такие опционы являются стандартными опционами Европейского типа. С развитием рынка деривативов стали появляться дополнительные требования к условиям заключения контракта. Возник класс экзотических опционов (exotic options) [6–8]. Одно из дополнительных условий – учет ценовой истории базисного актива от момента заключения контракта t=0 до момента исполнения t=T (path-dependent options, history-dependent options, look forward options, look back options) [4–11]. Важным частным случаем подобных опционов являются опционы, основанные на учете экстремальных значений цены базисного актива на интервале $t\in[0,T]$ (options on extremes). В достаточно подробном и обстоятельном обзоре [8] отмечается, что в настоящее время на рынках используется несколько десятков экзотических опционов, теория которых разработана в незначительной степени, и контракты по которым заключаются, исходя из эвристических соображений и опыта работы брокеров.

В данной работе на основе диффузионной модели (B, S)-финансового рынка с выплатой дивидендов по рисковым активам рассматриваются два вида экзотических опционов, основанных на экстремальных значениях цены рискового актива. В качестве спотовых цен рассматриваются экстремальные значения актива $S_T^{\max}=\max\limits_{0\le t\le T}S_t$ и $S_T^{\min}=\min\limits_{0\le t\le T}S_t$ с фиксированной страйковой ценой K (соответственно fixed strike look back call option и reverse fixed strike look back call option [10]).

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega,F,\mathbf{F}=(F_t)_{t\geq 0},P)$ [1–3]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные безрисковые облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t\in[0,T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ dB_t = rB_t dt, \tag{1.1}$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $S_0>0$, $\mu\in R=(-\infty,+\infty)$, $\sigma>0$, $B_0>0$, $r>0$, решения которых имеют вид

$$S_t(\mu) = S_0\exp\{(\mu-(\sigma^2/2))t+\sigma W_t\},$$
$$B_t = B_0\exp\{rt\}. \tag{1.2}$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде $X_t=\beta_t B_t+\gamma_t S_t$, где $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ – пара F_t-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Аналогично [12] предполагается, что за обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с коэффициентом $0\le\delta<r$, а именно: $dD_t=\delta\gamma_t S_t dt$. Тогда изменение капитала в задаче с дивидендами происходит в виде $dX_t=\beta dB_t+\gamma dS_t+dD_t$. Так как $dX_t=\beta dB_t+\gamma dS_t+B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t$, то $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=dD_t$, что является балансовым соотношением, заменяющим условие самофинансируемости $B_t d\beta_t+S_t d\gamma_t=0$ в стандартной задаче [1–3]. Тогда капитал определяется уравнением $dX_t=rX_t dt+\sigma\gamma_t S_t dW_t^{\mu-\gamma+\delta}$ [12], где процесс $W_t^{\mu-\gamma+\delta}=W_t+((\mu-r+\delta)/\sigma)\,t$ является винеровским относительно меры $P^{\mu-\gamma+\delta}$ такой, что $dP_t^{\mu-\gamma+\delta}=Z_t^{\mu-\gamma+\delta}dP_t$, а

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp\left\{\begin{matrix}-((\mu-r+\delta)/\sigma)W_t -\\ -(1/2)((\mu-r+\delta)/\sigma)^2 t\end{matrix}\right\}.$$

Так как

$$Law(W^{\mu-r+\delta}\,|\,\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(W\,|\,\boldsymbol{P}),$$

то из [1]

$$Law\left(S_0\exp\left\{\begin{matrix}\begin{pmatrix}r-\delta-\\-(\sigma^2/2)\end{pmatrix}t+\\+\sigma W_t^{\mu-r+\delta}\end{matrix}\right\};t\le T\,\Big|\,\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}\right) =$$
$$Law(S_0\exp\{(r-\delta-(\sigma^2/2))t+\sigma W_t\};t\le T\,|\,\boldsymbol{P}).$$

Таким образом,

$$Law(S(\mu,r,\delta)\,|\,\boldsymbol{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(S(r,\delta)\,|\,\boldsymbol{P}),$$

т. е. относительно меры $P^{\mu-\gamma+\delta}$ вероятностные свойства процесса $S(\mu,r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(\mu,r,\delta) = S_t(\mu,r,\delta)((r-\delta)dt+\sigma dW_t^{\mu-r+\delta}),$$

совпадают со свойствами процесса $S(r,\delta)$, определяемого уравнением

$$dS_t(r,\delta) = S_t(r,\delta)((r-\delta)dt+\sigma dW_t),$$

относительно меры P.

Задача: сформировать хеджирующие стратегии (портфели) $\pi_t^C=(\beta_t^C,\gamma_t^C)$, а также соответствующие им капиталы X_t^C таким образом, чтобы выполнить платежные обязательства $X_T=f_T(S_T)$ относительно платежных функций

$$f_T = f_T^{\max}(S) = (\max_{0\le t\le T} S_t - K)^+,$$
$$f_T = f_T^{\min}(S) = (\min_{0\le t\le T} S_t - K)^+, \tag{1.3}$$

а также найти стоимости опционов $C_T=X_0$, где $K>0$, $a^+=\max\{a;0\}$.

Используемые обозначения: $P\{\cdot\}$ – вероятность события; $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{a;b\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и b; $I[A]$ – индикаторная функция события A; интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R=(-\infty,+\infty)$;

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy,\ \varphi(y) = [1/\sqrt{2\pi}]\exp\{-(y^2/2)\}.$$

Замечание. Дополнительные условия, вносимые в платежные обязательства экзотических опционов, могут быть как в пользу покупателя, так и в пользу продавца опциона, что в первом случае должно приводить к увеличению, а во втором – к уменьшению цены опциона относительно стандартного опциона купли с платежной функцией $f_T(S_T)=(S_T-K)^+$. Так как $\max_{0\le t\le T} S_t \ge S_T$ и $\min_{0\le t\le T} S_t \le S_T$, то опционы с платежной функцией $f_T^{\max}(S)$ соответствуют платежному обязательству в пользу покупателя опциона, поскольку относительно стандартного опциона увеличивается вероятность исполнения опциона, а с $f_T^{\min}(S)$ – в пользу продавца опциона, так как вероятность исполнения опциона уменьшается.

Утверждение. Если

$$J = [1/\sqrt{2\pi d}]\int\exp\{cx\}\exp\{-(x-a)^2/2d\}dx, \tag{1.4}$$

то

$$J = \exp\{ca+(c^2d/2)\}[1/\sqrt{2\pi d}]\times$$
$$\times\int\exp\{-[(x-(a+cd)^2)/2d]\}dx. \tag{1.5}$$

Пусть $X\to N\{a;b\}$. Тогда

$$E\{\exp\{cX\}I[X\le d]\} =$$
$$= \exp\{ca+(c^2d/2)\}\Phi((b-(a+cd))/\sqrt{d}), \tag{1.6}$$

$$E\{\exp\{cX\}I[X\ge d]\} =$$
$$= \exp\{ca+(c^2d/2)\}\Phi(-(b-(a+cd)/\sqrt{d})), \tag{1.7}$$

$$E\{\exp\{cX\}I[b_1\le X\le b_2]\} = \exp\{ca+(c^2d/2)\}\times$$
$$\times[\Phi((b_2-(a+cd))/\sqrt{d})-\Phi((b_1-(a+cd))/\sqrt{d})]. \tag{1.8}$$

Представление (1.5) для J следует из (1.4) в результате элементарных преобразований, (1.6) следует непосредственно из (1.4) и (1.5), (1.7) – из (1.6) с учетом того, что $1-\Phi(z)=\Phi(-z)$, а (1.8) – из (1.6).

2. Основные результаты

Согласно (1.1), (1.2), (1.5)

$$S_t(r,\delta) = S_0\exp\{\sigma\xi_t\},\ \xi_t = W_t+(h/a)t,$$
$$h = r-\delta-(\sigma^2/2). \tag{2.1}$$

Лемма 1. Пусть $M_t=\max_{0\le\tau\le t}\sigma\xi_\tau=\max_{0\le\tau\le t}(\sigma W_\tau+h\tau)$ для $t\le T$. Тогда для $x\ge 0$ и $h\in R$ функция распределения $P\{M_t\le x\}$ и плотность вероятности $p^M(t,x)=\partial P\{Mt\le x\}/\partial x$ имеют вид

$$P\{M_t\le x\}=\Phi((x-ht)/\sigma\sqrt{t})-\\ -\exp\{(2h/\sigma^2)x\}\Phi(-(x+ht)/\sigma\sqrt{t}),\qquad(2.2)$$

$$p^M(t,x)=[1/\sigma\sqrt{2\pi t}]\exp\{-(x-ht)^2/2\sigma^2 t\}-\\ -(2h/\sigma^2)\exp\{(2h/\sigma^2)x\}\Phi(-(x+ht)/\sigma\sqrt{t})+\\ +[1/\sigma\sqrt{2\pi t}]\exp\{(2h/\sigma^2)x\}\exp\{-(x+ht)^2/2\sigma^2 t\}.\ (2.3)$$

Вывод формулы (2.2) проводится аналогично выводу формулы (5.9) в [1] и поэтому не приводится. Формула (2.3) – результат дифференцирования (2.2) по x.

Пусть

$$d_1(t)=\left(\frac{r-\delta}{\sigma}+\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t},$$

$$d_2(t)=\left(\frac{r-\delta}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{T-t},\quad \alpha=2\frac{r-\delta}{\sigma^2},\qquad(2.4)$$

$$\begin{cases} y_1(t)=\dfrac{[\ln(K/S_t)-(r-\delta+(\sigma^2/2))(T-t)]}{[\sigma\sqrt{T-t}]},\\ y_2(t)=\dfrac{[\ln(K/S_t)+(r-\delta-(\sigma^2/2))(T-t)]}{[\sigma\sqrt{T-t}]},\\ y_3(t)=\dfrac{[\ln(K/S_t)-(r-\delta-(\sigma^2/2))(T-t)]}{[\sigma\sqrt{T-t}]},\end{cases}\qquad(2.5)$$

а d_1, d_2, y_1, y_2, y_3 определяются формулами (2.4), (2.5) при $t=0$.

Теорема 1. Цена опциона с платежной функцией $f_T^{\max}(S)$ задается формулами:

$$C_T^{\overline{\max}}=S_0\begin{bmatrix}(1+\alpha^{-1})e^{-\delta T}\Phi(d_1)+\\ +(1-\alpha^{-1})e^{-rT}\Phi(-d_2)\end{bmatrix}-Ke^{-rT},$$

если $\quad S_0\ge K;\qquad(2.6)$

$$C_T^{\max}=S_0\begin{bmatrix}(1+\alpha^{-1})e^{-\delta T}\Phi(-y_1)-\\ -\alpha^{-1}e^{-rT}\left(\dfrac{K}{S_0}\right)^{\alpha}\Phi(-y_2)\end{bmatrix}-Ke^{-rT}\Phi(-y_3),$$

если $\quad S_0<K.\qquad(2.7)$

Доказательство: поскольку платежная функция $f_T^{\max}(S)$ является естественной [1, 2], то

$$C_T^{\max}=\exp\{-rT\}E\{f_T^{\max}(S(r,\delta))\}.$$

Тогда из (1.3), (2.1), (2.3) следует

$$C_T^{\max}=e^{-rT}E\{f_T^{\max}(S(r,\delta))\}=\\ =e^{-rT}E\{(S_0\exp\{M_T\}-K)^+\}=e^{-rT}F_T(S_0),\qquad(2.8)$$

$$F_T(S_0)=E\{(S_0\exp\{M_T\}-K)^+\}=\\ =\int_0^\infty(S_0\exp\{x\}-K)^+p^M(T,x)dx.\qquad(2.9)$$

а) Случай $S_0\ge K$. Учет (2.3) в (2.9) и условие нормировки для $p^M(T,x)$ дают

$$F_T(S_0)=S_0\int_0^\infty\exp\{x\}p^M(T,x)dx-K=\\ =S_0(J_1-J_2+J_3)-K,\qquad(2.10)$$

$$J_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_0^\infty\exp\{x\}\exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx,\qquad(2.11)$$

$$J_2=\frac{2h}{\sigma^2}\int_0^\infty\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\}\Phi\left(-\frac{(x+hT)}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx=\\ =\frac{2h}{\sigma^2}J_2',\qquad(2.12)$$

$$J_3=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\times\\ \times\int_0^\infty\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\}\exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx.\qquad(2.13)$$

В (2.11) согласно Утверждению для $X\to N\{hT;\sigma^2T\}$ имеем, что c=1, b=0. Тогда применение (1.7) к (2.11) дает, что

$$J_1=E\{\exp\{X\}I[X\ge 0]\}=\\ =\exp\{hT+(\sigma^2T/2)\}\Phi((hT+\sigma^2T)/\sigma\sqrt{T}).\qquad(2.14)$$

Используя (2.1), (2.4) в (2.14), получаем $J_1=\exp\{(r-\delta)T\}\Phi(d_1)$. В (2.13) по Утверждению $X\to N\{-hT;\sigma^2T\}$ имеем, что $c=1+[2h/\sigma^2]$, b=0. Тогда применение (1.7) к (2.13) дает, что

$$J_3=E\{\exp\{(1+(2h/\sigma^2))X\}I[X\ge 0]\}=\\ \exp\begin{Bmatrix}-hT(1+(2h/\sigma^2))+\\ +(1/2)(1+(2h/\sigma^2))^2\sigma^2T\end{Bmatrix}\times\\ \times\Phi((-hT+(1+(2h/\sigma^2))\sigma^2T)/\sigma\sqrt{T}).\qquad(2.15)$$

Использование (2.1), (2.4) в (2.15) приводит к тому, что

$$J_3=J_1=\exp\{(r-\delta)T\}\Phi(d_1).\qquad(2.16)$$

Интегрирование по частям в (2.12) с учетом (2.13) дает, что

$$J_2'=[\sigma^2/(\sigma^2+2h)][J_3-\Phi(-(h/\sigma)\sqrt{T})].\qquad(2.17)$$

Подстановка (2.17) в (2.12) с использованием (2.1), (2.4) приводит к

$$J_2=(1-\alpha^{-1})[J_3-\Phi(-d_2)].\qquad(2.18)$$

Тогда из (2.16), (2.18) следует, что

$$J_1-J_2+J_3=(1+\alpha^{-1})J_3+(1-\alpha^{-1})\Phi(-d_2).\qquad(2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.10), получаем

$$F_T(S_0)=S_0\begin{bmatrix}(1+\alpha^{-1})\exp\{(r-\delta)\}\Phi(d_1)+\\ +(1-\alpha^{-1})\Phi(-d_2)\end{bmatrix}-K.\qquad(2.20)$$

Тогда (2.6) следует из (2.8), (2.20).

б) Случай $S_0<K$ Из (2.9) следует

$$F_T(S_0)=F_T^1-F_T^2,\qquad(2.21)$$

$$F_T^1 = S_0 \int_0^\infty \exp\{x\} p^M(T,x)dx,$$

$$F_T^2 = K \int_0^\infty p^M(T,x)dx, \quad b = \ln(K/S_0). \qquad (2.22)$$

При вычислении F_T^1 пусть

$$J_1 - J_2 + J_3 = \int_0^\infty \exp\{x\} p^M(T,x)dx. \qquad (2.23)$$

Использование (2.3) в (2.23) дает, что J_1, J_2, J_3 определяются формулами вида (2.11)–(2.13), интегралы в которых нижним пределом имеют величину b вида (2.22). Таким образом, аналогично (2.14), (2.15)

$$J_1 = E\{\exp\{X\} I[X \ge b]\} =$$
$$= \exp\{hT + (\sigma^2 T/2)\} \times$$
$$\times \Phi(-(b - (hT + \sigma^2 T))/\sigma\sqrt{T}), \qquad (2.24)$$

$$J_3 = E\{\exp\{(1 + (2h/\sigma^2))X\} I[X \ge b]\} =$$
$$= \exp\left\{-hT\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)^2 \sigma^2 T\right\} \times$$
$$\times \Phi\left(-\left(b - \left(-hT + \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)\sigma^2 T\right)\right)\Big/\sigma\sqrt{T}\right). \qquad (2.25)$$

Использование (2.1), (2.5), (2.22) в (2.24), (2.25), интегрирование аналогично (2.18) дает

$$J_3 = J_1 = \exp\{(r - \delta)T\}\Phi(-y_1),$$
$$J_2 = (1 - \alpha^{-1})[J_3 - (K/S_0)^\alpha \Phi(-y_2)]. \qquad (2.26)$$

Тогда из (2.23), (2.26) следует

$$J_1 - J_2 + J_3 =$$
$$= (1 + \alpha^{-1})J_3 + (1 - \alpha^{-1})(K/S_0)^\alpha \Phi(-y_2). \qquad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в (2.22), получаем с учетом (2.23), (2.26), что

$$F_T^1 = S_0 \begin{bmatrix} (1 + \alpha^{-1})\exp((r - \delta)T)\Phi(-y_1) + \\ +(1 + \alpha^{-1})(K/S_0)^\alpha \Phi(-y_2) \end{bmatrix}. \qquad (2.28)$$

При вычислении F_T^2 аналогично имеем

$$J_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty \exp\{x\} \exp\left\{-\frac{(x - hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx, \qquad (2.29)$$

$$J_2 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2} x\right\} \Phi\left(-\frac{(x + hT)}{\sigma\sqrt{T}}\right) dx = \frac{2h}{\sigma^2} J_2', \qquad (2.30)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2} x\right\} \exp\left\{-\frac{(x + hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx. \qquad (2.31)$$

Из сравнения (2.29)–(2.31) с (2.11)–(2.13) следует, что вычисления по нахождению J_1, J_2, J_3 будут аналогичны вычислениям при получении формул (2.26), только при применении (1.7) величина c будет принимать значения соответственно c=0 и $c=2h/\sigma^2$. В результате получим

$$J_1 = J_3 = \Phi(-y_3), \quad J_2 = J_3 - (K/S_0)^{\alpha - 1}\Phi(-y_2). \qquad (2.32)$$

Подстановка (2.32) в (2.22) дает, что

$$F_T^2 = K[\Phi(-y_3) + (K/S_0)^{\alpha - 1}\Phi(-y_2)] =$$
$$= K\Phi(-y_3) + S_0 (K/S_0)^\alpha \Phi(-y_2). \qquad (2.33)$$

Используя (2.28), (2.33) в (2.21), получаем

$$F_T(S_0) = S_0 \begin{bmatrix} (1 + \alpha^{-1})\exp\{(r - \delta)\}\Phi(-y_1) - \\ -\alpha^{-1}(K/S_0)^\alpha \Phi(-y_2) \end{bmatrix} -$$
$$-K\Phi(-y_3). \qquad (2.34)$$

Тогда (2.7) следует из (2.8), (2.34). Теорема доказана.

Теорема 2. Капитал и портфель в случае платежной функции $f_T^{\max}(S)$ определяются формулами:

$$X_t^{\overline{\max}} = S_t \begin{bmatrix} (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta(T - t)}\Phi(d_1(t)) + \\ +(1 - \alpha^{-1})e^{-r(T - t)}\Phi(-d_2(t)) \end{bmatrix} -$$
$$-Ke^{-r(T - t)}, \qquad (2.35)$$

$$\gamma_t^{\overline{\max}} = (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta(T - t)}\Phi(d_1(t)) +$$
$$+(1 - \alpha^{-1})e^{-r(T - t)}\Phi(-d_2(t)), \qquad (2.36)$$

$$\beta_t^{\overline{\max}} = -(K/B_t)e^{-r(T - t)}, \qquad (2.37)$$

если $S_t \ge K$;

$$X_t^{\max} = S_t \begin{bmatrix} (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta(T - t)}\Phi(-y_1(t)) - \\ -\alpha^{-1}e^{-r(T - t)}\left(\dfrac{K}{S_t}\right)^\alpha \Phi(-y_2(t)) \end{bmatrix} -$$
$$-Ke^{-r(T - t)}\Phi(-y_3(t)), \qquad (2.38)$$

$$\gamma_t^{\max} = (1 + \alpha^{-1})e^{-\delta(T - t)}\Phi(-y_1(t)) +$$
$$+(1 - \alpha^{-1})e^{-r(T - t)}(K/S_t)^\alpha \Phi(-y_2(t)), \qquad (2.39)$$

$$\beta_t^{\max} = -(1/B_t)e^{-r(T - t)} \begin{bmatrix} K\Phi(-y_3(t)) + \\ +S_t(K/S_t)^\alpha \Phi(-y_2(t)) \end{bmatrix}, \qquad (2.40)$$

если $S_t < K$.

Доказательство: согласно [1, 2] для платежной функции $f_T^{\max}(S)$

$$X_t^{\max} = e^{-r(T - t)} E\{f_T^{\max}(S(r,\delta)) | S_t\} =$$
$$= e^{-r(T - t)} F_{T - t}(S_t) = X_t^{\max}(S_t), \qquad (2.41)$$

$$F_{T - t}(S_t) = E\{f_T^{\max}(S(r,\delta)) | S_t\}.$$

Формулы (2.35), (2.38) с учетом (2.41) следуют из (2.6), (2.7) с заменами $S_0 \to S_t$, $T \to (T - t)$.

Согласно [1, 2]

$$\gamma_t^{\max} = (\partial X_t^{\max}(s)/\partial s)\big|_{s = S_t},$$

$$\beta_t^{\max} = (X_t^{\max}(s) - \gamma_t^{\max} S_t)/B_t. \qquad (2.42)$$

Использование (2.35) в (2.42) приводит к (2.36), а (2.37) следует из (2.35), (2.36), (2.42).

Из определения $\Phi(x)$ вытекает

$$\frac{\partial\Phi(a(s))}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}a^2(s)\right\}\frac{\partial a(s)}{\partial s},$$
$$\frac{\partial\Phi(-a(s))}{\partial s}=-\frac{\partial\Phi(a(s))}{\partial s}. \qquad (2.43)$$

Тогда из (2.38), (2.43) следует

$$\partial X_t^{\max}(s)/\partial s=(1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}\Phi(-y_1(t))+$$
$$+(1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}(K/s)^{\alpha}\Phi(-y_2(t))+\text{Щ} \qquad (2.44)$$

$$\Psi=\Psi_1+s\alpha^{-1}\Psi_2, \qquad (2.45)$$

$$\Psi_1=Ke^{-r(T-t)}[\partial\Phi(y_3(t))/\partial s]-$$
$$-se^{-\delta(T-t)}[\partial\Phi(y_1(t))/\partial s], \qquad (2.46)$$

$$\Psi_2=e^{-r(T-t)}(K/s)^{\alpha}[\partial\Phi(y_2(t))/\partial s]-$$
$$-e^{-\delta(T-t)}[\partial\Phi(y_1(t))/\partial s]. \qquad (2.47)$$

Согласно (2.5)

$$y_1(t)=y_3(t)-\sigma\sqrt{T-t},$$
$$y_1(t)=y_2(t)-2((r-\delta)/\sigma)\sqrt{T-t}. \qquad (2.48)$$

Из (2.43), (2.5) следует, что

$$\begin{cases}\partial\Phi(y_3(t))/\partial s=\\ =-[1/s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}]\exp\{-y_3^2(t)/2\},\\ \partial\Phi(y_2(t))/\partial s=\\ =-[1/s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}]\exp\{-y_2^2(t)/2\}.\end{cases} \qquad (2.49)$$

Тогда из (2.48), (2.49), (2.5) следует

$$\partial\Phi(y_1(t))/\partial s=$$
$$=-\left[\frac{(K\exp\{-(r-\delta)(T-t)\})}{(s^2\sigma\sqrt{2\pi(T-t)})}\right]\exp\{-y_3^2(t)/2\}, \qquad (2.50)$$

$$\partial\Phi(y_1(t))/\partial s=$$
$$=-\left[\frac{(\exp\{-(r-\delta)(T-t)\})}{(s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)})}\right](K/s)^{\alpha}\times$$
$$\times\exp\{-y_2^2(t)/2\}. \qquad (2.51)$$

Использование (2.49), (2.50) в (2.46) и (2.49), (2.51) в (2.47) дает, что $\Psi_1=0$, $\Psi_2=0$. Тогда, согласно (2.45), $\Psi=0$, и (2.39) следует из (2.42), (2.44), а (2.40) следует из (2.42), (2.38), (2.39). Теорема доказана.

Теорема 3. Цена опциона с платежной функцией $f_T^{\min}(S)$ задается формулами

$$C_T^{\min}=S_0\begin{bmatrix}(1+\alpha^{-1})e^{-\delta T}[\Phi(-d_1)-\Phi(y_1)]+\\ +(1-\alpha^{-1})e^{-rT}\Phi(d_2)+\\ +\alpha^{-1}e^{-rT}(K/S_0)^{\alpha}\Phi(y_2)\end{bmatrix}-$$
$$-Ke^{-rT}\Phi(-y_3), \qquad (2.52)$$

если $S_0>K$, и $C_T^{\min}=0$, если $S_0\le K$.

Доказательство: из (1.3), (2.1), (2.4) аналогично (2.8), (2.9) следует, что

$$C_T^{\min}=e^{-rT}E\{f_T^{\min}(S(r,\delta))\}=$$
$$=e^{-rT}E\{(S_0\exp\{m_T\}-K)^+\}=e^{-rT}F_T(S_0), \qquad (2.53)$$

$$F_T(S_0)=E\{(S_0\exp\{m_T\}-K)^+\}=$$
$$=\int_{-\infty}^{0}(S_0\exp\{x\}-K)^+p^m(T,x)dx. \qquad (2.54)$$

Выражение под знаком интеграла в (2.54) больше нуля, если $S_0\exp\{x\}-K>0$, т. е. если $x>b$, где b имеет вид (2.22). Так как $x\le 0$, то условие $x>b$ может выполняться только для отрицательного b, когда $S_0>K$. Таким образом, утверждение теоремы $C_T^{\min}=0$, если $S_0\le K$, очевидно, и из (2.54) следует

$$F_T(S_0)=S_0\int_{-\infty}^{0}\exp\{x\}p^m(T,x)dx-$$
$$-K\int_{-\infty}^{0}p^m(T,x)dx=S_0J-K\bar{J}. \qquad (2.55)$$

Использование (2.3) в (2.55) дает, что

$$J=J_1+J_2+J_3, \qquad (2.56)$$

$$J_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_b^0\exp\{x\}\exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2T}\right\}dx, \qquad (2.57)$$

$$J_2=\frac{2h}{\sigma^2}\int_b^0\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\}\Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx=$$
$$=\frac{2h}{\sigma^2}J_2', \qquad (2.58)$$

$$J_3=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\times$$
$$\times\int_b^0\exp\left\{\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\}\exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2T}\right\}dx. \qquad (2.59)$$

В (2.57) согласно Утверждению для $X\to N\{hT;\sigma^2T\}$ имеем, что $b_1=b$, $b_2=0$, $c=1$, $a=hT$, $d=\sigma^2T$. Тогда применение (1.8) к (2.57) дает, что

$$J_1=E\{\exp\{X\}I[b\le X\le 0]\}=$$
$$=\exp\{hT+(\sigma^2T)/2\}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}\Phi(-(hT+\sigma^2T)/\sigma\sqrt{T})-\\ -\Phi((b-(hT+\sigma^2T))/\sigma\sqrt{T})\end{bmatrix}. \qquad (2.60)$$

Использование (2.1), (2.4), (2.5) в (2.60) приводит к тому, что $J_1=\exp\{(r-\delta)T\}[\Phi(-d_1)-\Phi(y_1)]$. В (2.59) согласно Утверждению для $X\to N\{-hT;\sigma^2T\}$ имеем, что $b_1=b$, $b_2=0$, $c=1+[2h/\sigma^2]$, $a=-hT$, $d=\sigma^2T$. Тогда применение (1.8) к (2.59) дает, что

$$J_3=E\{\exp\{(1+(2h/\sigma^2))X\}I[b\le X\le 0]\}=$$
$$=\exp\left\{-hT\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)+\left(1+\frac{2h}{\sigma^2}\right)\frac{\sigma^2T}{2}\right\}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}\Phi\left(-\dfrac{-hT+(1+(2h/\sigma^2))\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\\ -\Phi\left(\dfrac{b-(-hT+(1+(2h/\sigma^2))\sigma^2T)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\end{bmatrix}. \qquad (2.61)$$

Использование (2.1), (2.4), (2.5) в (2.61) приводит к тому, что

$$J_3=\exp\{(r-\delta)T\}[\Phi(-d_1)-\Phi(y_1)]=J_1. \qquad (2.62)$$

Интегрирование по частям в (2.58) с учетом (2.59) дает, что

$$J_2' = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+2h}\begin{bmatrix}\Phi\left(\dfrac{h\sqrt{T}}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{b+hT}{\sigma}\right)\times \\ \times\exp\left\{\left(1+\dfrac{2h}{\sigma^2}\right)b\right\}-J_3\end{bmatrix}. \qquad (2.63)$$

Подстановка (2.63) в (2.58) с последующим использованием (2.1), (2.4), (2.5), (2.22), (2.62) приводит к тому, что

$$J_2 = (1-\alpha^{-1})\begin{bmatrix}\Phi(d_2)-(K/S_0)^{\alpha}\Phi(y_2)- \\ -\exp\{(r-\delta)T\}\times \\ \times[\Phi(-d_1)-\Phi(y_1)]\end{bmatrix}. \qquad (2.64)$$

Тогда из (2.56), (2.62), (2.64) следует, что

$$J = (1+\alpha^{-1})\exp\{(r-\delta)T\}[\Phi(-d_1)-\Phi(y_1)]+$$
$$+(1-\alpha^{-1})[\Phi(d_2)-(K/S_0)^{\alpha}\Phi(y_2)]. \qquad (2.65)$$

Использование (2.3) в (2.55) дает, что

$$\bar{J} = \bar{J}_1+\bar{J}_2+\bar{J}_3, \qquad (2.66)$$

$$\bar{J}_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_b^0 \exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx, \qquad (2.67)$$

$$\bar{J}_2 = \frac{2h}{\sigma^2}\int_b^0 \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\Phi\left(\frac{x+hT}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx = \frac{2h}{\sigma^2}\bar{J}_2', \qquad (2.68)$$

$$\bar{J}_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_b^0 \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\}\exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\}dx. \qquad (2.69)$$

Вычисление $\bar{J}_1$ из (2.67) проводится аналогично вычислению J_1 при c=0. Получаем

$$\bar{J}_1 = \Phi(-h\sqrt{T}/\sigma)-\Phi((b-h\sqrt{T})/\sigma\sqrt{T}). \qquad (2.70)$$

Использование (2.4), (2.5), (2.22) в (2.70) дает, что $\bar{J}_1=\Phi(-d_1)-\Phi(y_3)$. Вычисление $\bar{J}_3$ в (2.68) проводится аналогично вычислению J_3 при $c=[2h/\sigma^2]$, (2.69) аналогично J_2:

$$\bar{J}_3 = \Phi(-d_1)-\Phi(y_3) = \bar{J}_1,$$
$$\bar{J}_2 = \Phi(d_2)-(K/S_0)^{\alpha}\Phi(y_2)-\Phi(-d_2)+\Phi(y_3). \qquad (2.71)$$

Использование (2.71) в (2.66) дает, что

$$\bar{J} = \Phi(-y_3)-(K/S_0)^{\alpha-1}\Phi(y_2) =$$
$$=\Phi(-y_3)-(S_0/K)(K/S_0)^{\alpha}\Phi(y_2). \qquad (2.72)$$

Подстановка (2.65), (2.72) в (2.55), а затем в (2.53) приводит к (2.52). Теорема доказана.

Теорема 4. Капитал и портфель в случае платежной функции $f_T^{\min}(S)$ определяются формулами:

$$X_T^{\min} =$$
$$\times S_t\begin{bmatrix}(1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}[\Phi(-d_1(t))-\Phi(y_1(t))]+ \\ (1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}\Phi(d_2(t))+ \\ +\alpha^{-1}e^{-r(T-t)}(K/S_t)^{\alpha}\Phi(y_2(t))\end{bmatrix}-$$
$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi(-y_3(t)), \qquad (2.73)$$

$$\gamma_t^{\min} = (1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}[\Phi(-d_1(t))-\Phi(y_1(t))]+$$
$$+(1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}[\Phi(d_2(t))-(K/S_t)^{\alpha}\Phi(y_2(t))], \qquad (2.74)$$

$$\beta_t^{\min} = -(1/B_t)e^{-r(T-t)}\times$$
$$\times[K\Phi(-y_3(t))-S_t(K/S_t)^{\alpha}\Phi(y_2(t))], \qquad (2.75)$$

если $S_t>K$, и $X_t^{\min}=0$, $\gamma_t^{\min}=0$, $\beta_t^{\min}=0$, если $S_t\le K$.

Доказательство: формула (2.73) следует из (2.52) аналогично тому, как формулы (2.35), (2.38) следовали из (2.6), (2.7). Аналогично (2.42)

$$\gamma_t^{\min} = (\partial X_t^{\min}(s)/\partial s)\Big|_{s=S_t},$$
$$\beta_t^{\min} = (X_t^{\min}(s)-\gamma_t^{\min}S_t)/B_t. \qquad (2.76)$$

Из (2.73) с учетом (2.74) следует, что

$$\partial X_t^{\min}(s)/\partial s = (1+\alpha^{-1})e^{-\delta(T-t)}\times$$
$$\times[\Phi(-d_1(t))-\Phi(y_1(t))]+$$
$$+(1-\alpha^{-1})e^{-r(T-t)}\times$$
$$\times[\Phi(d_2(t))-(K/s)^{\alpha}\Phi(y_2(t))]-\Psi, \qquad (2.77)$$

где Ψ определяется формулами (2.45)–(2.47). Поскольку, как было доказано, Ψ=0, то (2.74) следует из (2.76), (2.77), а (2.75) – из (2.73), (2.74), (2.76). Теорема доказана.

3. Обсуждение результатов

I. Пусть $S_t^{\max} = \max\limits_{0\le\tau\le t} S_\tau$, $S_t^{\min} = \min\limits_{0\le\tau\le t} S_\tau$. На рис. 1–6 приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие свойство цен опционов, как зависимостей от волатильности σ, начальной цены S_0 и цены исполнения K. Аргумент на всех графиках – σ, а параметр семейства кривых – S_0 (рис. 1, 3, 5) и K (рис. 2, 4, 6).

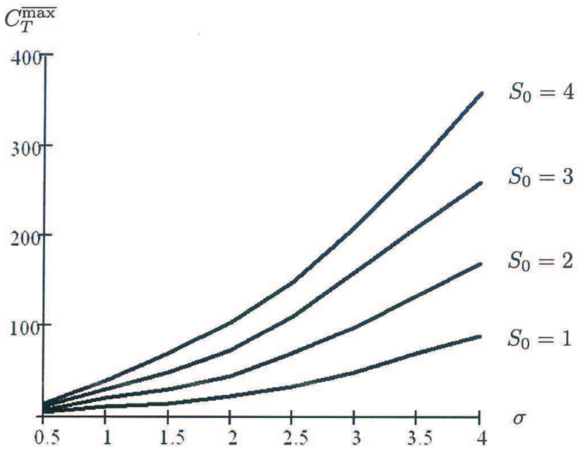

Рис. 1. *Зависимости $C_T^{\overline{\max}}$ от σ и S_0*

При возрастании σ увеличивается степень хаотичности траекторий S_t, что приводит к возрастанию выбросов вверх $S_t^{\max}$ и вниз $S_t^{\text{mшт}}$. В результате этого вероятность предъявления к исполнению опционов с платежной функцией $f_T^{\max}(S)$ увеличивается, с платежной функцией $f_T^{\min}(S)$ – уменьшается. Поскольку за уменьшение риска следует платить больше, а за его увеличение – меньше, то стоимость опционов на основе $f_T^{max}(S)$ должна быть возрастающей функцией σ, а на основе $f_T^{min}(S)$ – убывающей. Эти свойства отражены соответственно на рис. 1–4 и рис. 5, 6.

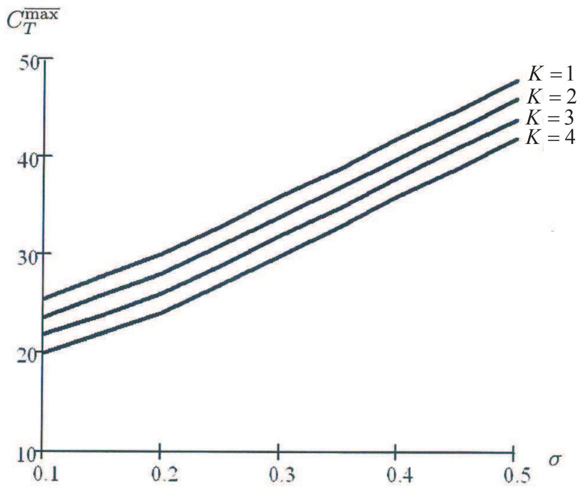

Рис. 2. *Зависимости C_T^{max} от σ и K (S_0=10)*

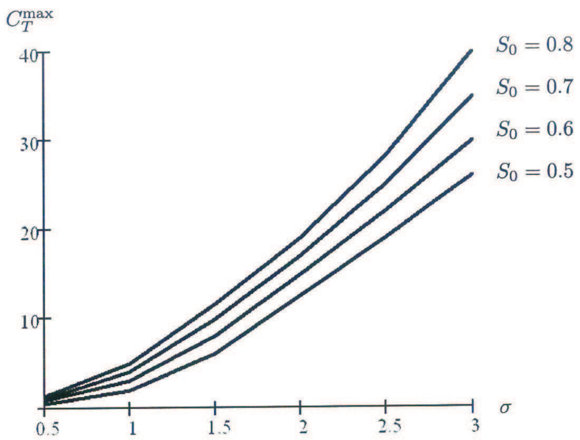

Рис. 3. *Зависимости C_T^{max} от σ и S_0 (K=1)*

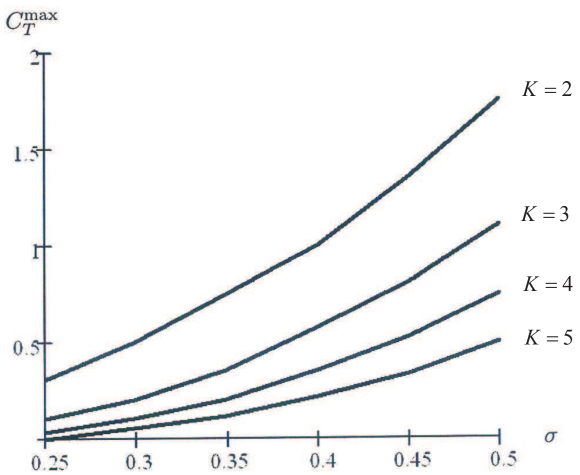

Рис. 4. *Зависимости C_T^{max} от σ и K (S_0=1)*

Возрастание S_0 влечет возрастание в среднем S_t^{max} и $S_t^{mшт}$, что увеличивает вероятности исполнения опционов с платежными функциями $f_T^{max}(S)$ и $f_T^{min}(S)$. Стоимости опционов должны быть возрастающими функциями S_0 (кривые должны подниматься вверх с ростом S_0). Эти свойства отражены на рис. 1, 3, 5.

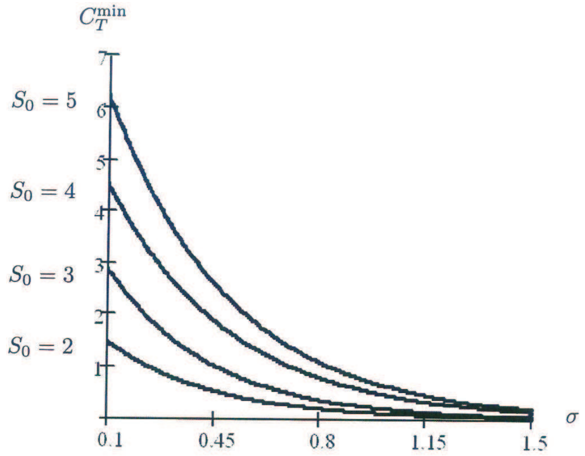

Рис. 5. *Зависимости C_T^{min} от σ и S_0 (K=1)*

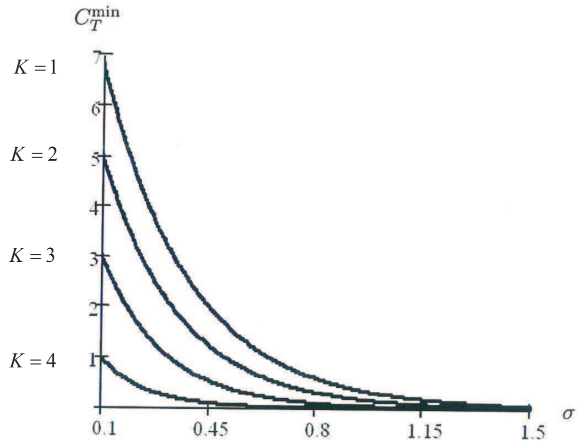

Рис. 6. *Зависимости C_T^{min} от σ и K (S_0=5)*

Возрастание K приводит к уменьшению вероятности предъявления к исполнению опционов с платежными функциями $f_T^{max}(S)$ и $f_T^{min}(S)$. Следовательно, стоимости опционов должны быть убывающими функциями K (кривые должны опускаться вниз с ростом K). Эти свойства отражены на рис. 2, 4.

II. Существенным параметром, определяющим стоимости рассматриваемых опционов, является параметр $\eta_0=K/S_0$, равный отношению цены исполнения к начальной цене рискового актива (Теоремы 1, 3), и существенным параметром, определяющим структуру портфеля и капитала, является параметр $\eta_t=K/S_t$, равный отношению цены исполнения к текущей цене рискового актива (Теоремы 2, 4). Так как $S_t^{min}\leq S_t$, то обнуление капитала X_t^{min} при условии $S_t\leq K$ объясняется тем, что опционы с платежной функцией $f_T^{min}(S)$ не будут предъявлены к исполнению и нет необходимости формировать капитал для исполнения платежных обязательств.

III. Проведенные по формулам из Теоремы 1 и 3 вычисления показывают, что в достаточно широком диапазоне значений параметров выполняются свойства $C_T^{\overline{\max}} > C_T^{\underline{\max}} > C_T^{\min}$, что подтверждается соответствующими значениями функций на приведенных рисунках. Эти свойства свидетельствуют, что покупатель опциона платит за тот тип опциона, вероятность предъявления которого к исполнению выше и по платежному обязательству которого он может получить больший доход. Проведенные вычисления стоимостей стандартных опционов C_T с платежной функцией $f_T(S_T)=(S_T-K)^+$ показывают выполнение свойств $C_T^{\overline{\max}} > C_T^{\underline{\max}} > \tilde{C}_T > C_T^{\min}$. В случае $K=S_0$ для величин $C_T^{\overline{\max}}$ и $\tilde{C}_T$ может быть проведено аналитическое сравнение. Действительно, согласно [1–3] с учетом (2.5)

$$\tilde{C}_T = S_0 e^{-\delta T}\Phi(-y_1) - Ke^{-rT}\Phi(-y_3). \qquad (3.1)$$

Так как $y_1=-d_1$, $y_3=-d_2$ при $K=S_0$, то из (2.6), (3.1) следует, что

$$C_T^{\overline{\max}} = \tilde{C}_T + S_0\alpha^{-1}[e^{-\delta T}\Phi(d_1) - e^{-rT}\Phi(-d_2)] = \\ = \tilde{C}_T + \text{Д}C_T^{\overline{\max}}. \qquad (3.2)$$

Так как $0<\delta<r$, $d_1>-d_2$, то из (3.2) следует, что $\Delta C_T^{\overline{\max}}>0$, т. е. величина $\Delta C_T^{\overline{\max}}$ характеризует величину превышения стоимости опциона с платежной функцией $f_T^{\max}(S)$ над стоимостью стандартного опциона при цене исполнения (страйковой цене), равной начальной цене акции.

Заключение

В соответствии с поставленной задачей приведено решение, заключающее в себе формулы для цен опционов, хеджирующих стратегий и отвечающих им капиталов. Дана графическая демонстрация свойств решения задачи с последующей интерпретацией результатов. На величину цены опциона влияют колебания цен базисных активов, при этом дериватив на основе функции выплат $f_T^{\max}(S)$ будет дорожать с увеличением хаотичности траектории цены актива. Стоимость опциона с платежным обязательством $f_T^{\min}(S)$ будет выше в условиях стабильного и незначительного изменения цены рисковой бумаги. При прочих равных условиях высокую цену рассматриваемых опционов обуславливает высокая начальная цена базисного актива и низкий страйк опционного контракта.

Выделен параметр, определяющий стоимость изучаемых опционов, и параметр, определяющий структуру портфеля и капитала. Последний параметр выступает в качестве показателя необходимости формировать капитал для исполнения платежных обязательств и дает информацию в любой момент до экспирации о том, будет ли предъявлен опцион к исполнению или нет.

Исследована связь между ценами одного из рассматриваемых экзотических и стандартного опционов, а также приведено соотношение цен ванильного и заявленных в статье опционов. С позиции покупателя самым надежным, а значит, и самым дорогим, является опцион на максимум цены базисного актива, начальная цена которого превышает договорную цену исполнения. Данный тип деривативa имеет смысл приобретать в расчете на значительные колебания стоимости основной ценной бумаги, и может ожидаемого «скачка» не произойти. В самом худшем случае все значения актива окажутся ниже страйка, тогда в роли максимального выступит начальное значение цены актива, тем самым опцион будет предъявлен к исполнению, а покупатель получит прибыль. Меньший риск и соответственно стоимость связаны с опционом на максимум цены актива при условии большей цены исполнения, чем начальная стоимость базисной бумаги. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что стоимость ванильного опциона превосходит стоимость опциона на минимум цены актива, но меньше стоимости опционов на максимум цены актива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 80–129.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: Фазис, 1998. – 544 с.
3. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.
4. Wilmott P. Derivatives: the theory and practice of financial engineering. – New-York: John Willey & Sons, 2000. – 768 p.
5. Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2007. – 1056 с.
6. Rubinstein M. Exotic options // Finance working paper. Berkeley: Inst. of Business and Economic Research. – 1991. – № 220. – P. 3–45.
7. Zang P.G. An introduction to exotic options // European Financial Management. – 1995. – V. 1. – № 1. – P. 87–95.
8. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – Т. I. – № 15. – С. 53–57.
9. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – Т. II. – № 16. – С. 61–64.
10. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – Т. III. – № 17. – С. 68–73.
11. Conze A., Viswanathan V. Path dependent options: the case of lookback options // Journal of Finance. – 1991. – V. 46. – № 5. – P. 1893–1907.
12. Buchen P., Konstandatos O. A new method of pricing lookback options // Mathematical Finance. – 2005. – V. 15. – № 2. – P. 245–259.
13. Инглис-Тейлор Э. Производные финансовые инструменты. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 224 с.
14. Шепп Л.А., Ширяев А.Н. Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – Вып. 1. – С. 130–148.
15. Котлобовский И.Б., Тутубалин В.Н., Угер Е.Г. Оценка возможности внедрения «Русского опциона» на американском фондовом рынке // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2005. – Т. 12. – № 1. – С. 78–98.

Поступила 05.02.2012 г.