

УДК 532.5

ПРОФИЛЬ КОНЦЕНТРАЦИИ ИНЕРЦИОННЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Сиковский Дмитрий Филиппович^{1,2},
dphs@mail.ru

¹ Институт теплофизики СО РАН,
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1.

² Новосибирский государственный университет,
Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

Актуальность работы обусловлена широким распространением турбулентных потоков газа со взвешенными частицами в различных технических устройствах, используемых в добыче полезных ископаемых, технологиях транспортировки природных ресурсов, энергетике и других отраслях промышленности. Примерами могут служить пневмотранспорт порошкообразных материалов, штреки горных выработок, газоходы котельных установок электростанций и металлургических заводов, вентиляционные каналы промышленных предприятий, паропроводы и другие элементы паросиловых установок, работающих на влажном паре и т. д. Важная роль, которую играют турбулентные газодисперсные потоки в природе и промышленности, диктует необходимость исследования закономерностей взаимодействия частиц с ограничивающими поток поверхностями и развития современных моделей турбулентных двухфазных течений.

Цель работы: получение аналитического выражения для профиля концентрации частиц в турбулентном течении в плоском канале между параллельными пластинами на основе асимптотического анализа решений кинетического уравнения для функции плотности вероятности скорости и положения частицы, а также закономерностей турбулентного течения в канале без использования полуэмпирических гипотез замыкания. Анализ влияния размера частиц на их аккумуляцию вблизи стенки.

Методы исследования: асимптотический анализ решений кинетического уравнения для функции плотности вероятности скорости и положения частицы; метод Чепмена–Энскога решения кинетического уравнения; соображения размерности и подобия.

Результаты. Выполнен асимптотический анализ решений кинетического уравнения для функции плотности вероятности скорости частицы в турбулентном течении в плоском канале со взвешенными инерционными частицами. Получены общие выражения для концентрации инерционных частиц в вязком подслое, логарифмическом слое и внешней области потока. Предложен критерий аккумуляции частиц, для которого получено аналитическое выражение, показывающее резкий рост концентрации частиц в вязком подслое на почти 3 порядка величины при росте числа Стокса в диапазоне от 1 до 27, что согласуется с имеющимися данными DNS/лагранжева траекторного моделирования. Показано, что увеличение размера частицы ослабляет эффект аккумуляции и уменьшает пик концентрации на стенке при числах Стокса, превышающих 27. Получено аналитическое выражение, хорошо описывающее профиль концентрации частиц в вязком подслое.

Ключевые слова:

Турбулентность, газодисперсные потоки, аккумуляция частиц, законы подобия, статистическое моделирование.

Введение

Турбулентные течения с взвешенными частицами встречаются во многих задачах энергетики, химической технологии, астрофизики, атмосферной физики и океанографии и имеют большую практическую важность. Зачастую такие течения граничат с твёрдыми поверхностями, взаимодействие частиц с которыми может иметь важные последствия для их эксплуатации, например, образование наносов и агломератов, шлакование, эрозия и др. Моделирование динамики частиц на основе прямого решения уравнений Навье–Стокса с условиями прилипания на поверхности отдельных частиц является слишком сложным в реализации, поэтому для анализа физических механизмов взаимодействия частиц с турбулентностью целесообразно применять упрощенные модели взаимодействия частиц с потоком, наиболее часто используемой из которых является модель точечных частиц [1]. В этой модели, применимой для описания движения частиц размером меньше колмогоровского, частица заменена точкой, расположенной в её центре масс, на которую действуют силы, являющиеся функционалами скорости среды в этой

точке. Для случая тяжелых частиц с большой величиной отношения плотностей частица/среда $\tilde{\rho} = \rho_p / \rho_f \gg 1$ наиболее существенной является сила гидродинамического сопротивления, линейно пропорциональная разности скоростей частицы и среды при малых числах Рейнольдса отбегания частицы. Кроме того, для малых весовых концентраций частиц можно также пренебречь обратным влиянием частиц на турбулентность среды, рассматривая случайное поле скорости в точке нахождения частицы заданным и не зависящим от частиц. Однако даже в такой упрощенной постановке задача взаимодействия инерционных частиц с турбулентностью представляет трудности для теоретического анализа и демонстрирует ряд нетривиальных эффектов [2, 3], из которых одним из наиболее важных является аккумуляция (или сегрегация) частиц вблизи стенки. Аккумуляция частиц из ядра потока по направлению к стенке вызвана турбофорезом [4] – турбулентной миграцией частиц против градиента интенсивности флуктуаций нормальной к стенке компоненты скорости среды, которая вблизи стенки, как известно, затухает до нуля как квадрат расстояния до неё.

Кроме турбофореза имеется другой механизм переноса частиц к стенке – баллистический, когда частицы увлекаются в направлении стенки интенсивными когерентными вихревыми структурами на границе вязкого подслоя [5]. Для достаточно инерционных частиц характерный путь торможения становится сопоставимым с толщиной вязкого подслоя, в результате чего увлечённые вихрями частицы проникают в вязкий подслей по баллистическим траекториям, при этом из-за инерции частицы её скорость при приближении к стенке может существенно превышать локальные скорости среды. В результате вблизи стенки наблюдаются две группы частиц с заметно различающимися скоростями [6–8], что делает статистический режим пульсаций скорости частиц существенно неравновесным. Поскольку большинство известных в настоящее время моделей турбулентных двухфазных течений основано на квазиравновесных приближениях, адекватное моделирование аккумуляции частиц в пристенных турбулентных потоках является проблемой для теории многофазных течений.

В [8, 9] с помощью методов срачиваемых асимптотических разложений было показано, что в неравновесном режиме даже для сильноинерционных частиц в фазовом пространстве скоростей и координат частиц существует внутренний слой, в котором статистика частиц близка к равновесной вследствие того, что их скорости и характерные смещения за времена декорреляции турбулентных пульсаций скорости среды малы. В [8] показано, что частицы внутреннего слоя, называемые диффузионными, вносят основной вклад в сингулярность концентрации, наблюдаемую при аккумуляции. Эти результаты позволяют с хорошей точностью вычислять концентрацию частиц с помощью квазиравновесных методов замыкания, в то время как расчёт статистических моментов скорости частиц второго и более высокого порядков с использованием тех же моделей может в ряде случаев давать неверные результаты [10]. В настоящей работе на основе результатов [8, 9] и классической теории подобия пристенной турбулентности рассматриваются общие закономерности распределения концентрации в турбулентном течении в плоском канале.

Постановка задачи

Ниже будем рассматривать турбулентное течение в плоском канале полушириной δ на участке гидродинамической стабилизации, когда все статистические параметры потока зависят только от расстояния до стенки y . Приведём основные свойства однофазного турбулентного течения в каналах и трубах согласно классической теории пристенной турбулентности [11, 12]. Число Рейнольдса, построенное по полуширине канала, динамической скорости v_* и кинематической вязкости среды ν будем считать большим: $Re_\tau = v_* \delta / \nu \geq 1$. Течение можно разделить на две области с существенно раз-

личающимися характерными масштабами длины. Внешняя область, или ядро потока, в которой $y \sim \delta$, занимает почти всю область потока и характеризуется слабой зависимостью статистического режима пульсаций скорости от молекулярной вязкости (принцип подобия по числу Рейнольдса [13]). Влияние вязкости на процессы переноса существенно в прилегающем к стенке вязком подслое, толщиной порядка вязкого масштаба длины $y \sim \nu v_*^{-1}$. Отношение толщин ядра потока и вязкого подслоя пропорционально числу Рейнольдса и является большой величиной. Граница между ними не является резкой и должна пониматься в смысле метода срачиваемых асимптотических разложений [14], как область перекрытия между внешней и внутренней областью, в которой $\nu v_*^{-1} \ll y \ll \delta$. Область перекрытия также называется логарифмическим слоем, поскольку именно здесь справедлив логарифмический закон для средней скорости [12]. Определяющими масштабами турбулентности в ядре потока являются v_* и δ , а в вязком подслое – νv_* и ν . В области срачивания статистический режим турбулентных пульсаций скорости зависит только от v_* и y . Лагранжев масштаб времени турбулентности в ядре потока $T_{L\delta} \sim \delta v_*^{-1}$ существенно превышает его величину в вязком подслое $T_{Lv} \sim \nu v_*^{-2}$:

$$\frac{T_{L\delta}}{T_{Lv}} \sim Re_\tau \gg 1.$$

В логарифмическом слое лагранжев масштаб времени растёт линейно с удалением от стенки:

$$T_L \sim \frac{y}{v_*}.$$

Рассмотрим динамику взвешенных в рассматриваемом течении частиц малой весовой концентрации с размерами меньше колмогоровского масштаба, который в данном случае по порядку величины сравним с толщиной вязкого подслоя. Для таких частиц уравнение движения может быть записано в виде [2]:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = v_p(t), \quad \frac{dv_p(t)}{dt} = \frac{u(x_p(t), t) - v_p(t)}{\tau}, \quad (1)$$

где x_p , v_p – координата и скорость частицы; $u(x_p(t), t)$ – скорость среды вдоль траектории частицы; τ – время динамической релаксации частицы, в стоковом приближении, равное $\tau = \tilde{\rho} d_p^2 / (18\nu)$, где d_p – диаметр частицы; ν – вязкость среды; $\tilde{\rho} = \rho_p / \rho_f$ – отношение плотностей частицы и среды.

Безразмерный критерий, характеризующий инерционность частиц, в литературе принято называть числом Стокса. Согласно (1), единственным параметром, характеризующим инерционность частиц в вязком подслое, является время релаксации частиц, обезразмеренное с использованием характерных масштабов вязкого подслоя и ν : $St = \tau_+ = \nu_*^2 \tau \nu^{-1}$, где нижний индекс ‘+’ обозначает величину, обезразмеренную в масштабах вязкого подслоя. Именно такой вид числа Стокса для пристенных турбулентных течений встречается в

большинстве исследований [7]. При этом для больших чисел Рейнольдса число Стокса для внешней области $St_\delta = v_*^2 \tau \delta^{-1} = St Re_\tau^{-1}$ будет существенно меньше. Отсюда следует, что имеется достаточно широкий диапазон чисел Стокса $1 \ll St \ll Re_\tau$, в котором частица является одновременно инерционной в вязком подслое и безынерционной во внешней области. При этом, как было показано в [15], условная граница, разделяющая области «инерционности» и «безынерционности», располагается при $y_+ \sim St$. При $y_+ \gg St$ частица ведёт себя как пассивный трасер, поэтому перепады концентрации невелики ввиду интенсивного турбулентного перемешивания во внешней области. Наиболее интересные явления наблюдаются в вязком подслое, в котором ввиду резкого уменьшения нормальной к стенке интенсивности пульсационной скорости, по сравнению с внешней областью, имеет место турбофорез частиц по направлению к стенке, приводящий к аккумуляции частиц у стенки [4, 16]. Согласно имеющимся данным DNS/лагранжева траекторного моделирования [7], эффект аккумуляции наиболее выражен при $St=25$. Для чисел Стокса, близких к этому значению, условная граница, разделяющая области «инерционности» и «безынерционности», находится в районе границы вязкого подслоя. При числах Стокса около 100 и более для частиц с относительной плотностью $\tilde{\rho} \sim 10^3$ диаметр частицы становится сопоставим с толщиной вязкого подслоя и применимость приближения точечных сил и рассматриваемой теории нарушается.

Рассматривая поле скорости среды $u(x, t)$ в (1) как случайное поле с гауссовой статистикой скорости, можно показать [2, 3, 8], что функция плотности вероятности нормальной к стенке компоненты скорости и местоположения частицы (далее – ФПВ) $P(v, y) = \langle \delta(y - y_p(t)) \delta(v - v_p(t)) \rangle$ удовлетворяет кинетическому уравнению [2, 17]:

$$\tau \frac{\partial(vP)}{\partial y} - \frac{\partial(vP)}{\partial v} = \lambda \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \mu \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial y}, \quad (2)$$

в котором диффузионные коэффициенты с хорошей точностью могут быть представлены в следующем виде:

$$\lambda = \tau^{-1} \int_0^\infty \langle R(x, 0; x_p(-t), -t) \rangle_x e^{-t/\tau} dt, \quad (3)$$

$$\mu = \int_0^\infty \langle R(x, 0; x_p(-t), -t) \rangle_x (1 - e^{-t/\tau}) dt, \quad (4)$$

где $R(x, t; x', t') = \langle v(x, t)v(x', t') \rangle$ – корреляционная функция нормальной к стенке компоненты скорости, и осреднение в подынтегральных выражениях проводится по всем траекториям частиц, удовлетворяющим условию $x_p(0) = x$.

Ниже для удобства будем считать все величины безразмерными с использованием характерных масштабов вязкого подслоя v_* и v . В этих единицах полуширина канала равна числу Рейнольдса Re_τ , а число Стокса равно τ .

Умножение (2) на v и интегрирование по скоростям приводит к полезному соотношению, связывающему концентрацию частиц $\Phi(y) = \int_{-\infty}^\infty P(v, y) dv$,

поток частиц на стенку $J_w = - \int_{-\infty}^\infty vP(v, y) dv$ и вто-

рой момент скорости $\langle v^2 \rangle \Phi = \int_{-\infty}^\infty v^2 P(v, y) dv$:

$$J_w = \tau \Phi \frac{d\langle v^2 \rangle}{dy} + (\langle v^2 \rangle \tau + \mu) \frac{d\Phi}{dy} = 0. \quad (5)$$

Согласно (5), поток частиц складывается из потока, вызванного турбулентной диффузией частиц (второй член в правой части (5)) и турбофорезом (первый член). Для рассматриваемого случая упругого отскока частиц от стенки результирующий поток частиц на стенку равен нулю, что также учтено в (5).

Асимптотика коэффициентов кинетического уравнения

Рассмотрим поведение диффузионных коэффициентов (3), (4) в различных подобластях пристенного турбулентного потока. Согласно классической теории подобия пристенной турбулентности, в вязком подслое и внешней области течения в канале должны выполняться соотношения:

$$\langle R(x, 0; x_p(-t), -t) \rangle_x = F_v(y, t, \tau), \quad y = O(1), \quad (6)$$

$$\langle R(x, 0; x_p(-t), -t) \rangle_x = F_o(y Re_\tau^{-1}, t Re_\tau^{-1}), \quad y = O(Re_\tau), \quad (7)$$

где F_v, F_o – универсальная функция своих аргументов, и предполагается, что число Стокса удовлетворяет условию $\tau \ll Re_\tau$, при котором, как уже упоминалось в предыдущем пункте, частица во внешней области ведёт себя как пассивный трасер, вследствие чего в выражении (7) нет явной зависимости от τ .

В логарифмическом слое, как области перекрытия между вязким подслоем и внешней областью, должны быть справедливы оба выражения – (6), (7) – одновременно, откуда следует

$$\langle R(x, 0; x_p(-t), -t) \rangle_x = F_{\log}(t / y), \quad 1 \ll y \ll Re_\tau, \quad (8)$$

Выражение (8) имеет простой смысл: характерный масштаб времени в логарифмическом слое линейно растёт с увеличением расстояния до стенки.

Важную роль в дальнейшем изложении играет асимптотика выражения (6) для малых расстояний от стенки:

$$F_v(y, t, \tau) \rightarrow y^4 f(t, \tau), \quad y \rightarrow 0, \quad (9)$$

где $f(t, \tau)$ – некоторая универсальная функция, а множитель y^4 связан с квадратичным убыванием нормальной к стенке компоненты скорости с уменьшением расстояния от стенки [8].

В соответствии с (6)–(9) диффузионные коэффициенты (3), (4) имеют следующее поведение:

$$\lambda \rightarrow A_\lambda(\tau)y^4, \quad \mu \rightarrow A_\mu(\tau)y^4, \quad y \rightarrow 0, \quad (10)$$

$$\lambda \rightarrow y\tau^{-1}B_\lambda(y/\tau), \quad \mu \rightarrow yB_\mu(y/\tau),$$

$$1 \ll y \ll \text{Re}_\tau, \quad (11)$$

где

$$A_\lambda(\tau) = \tau^{-1} \int_0^\infty f(t, \tau) e^{-t/\tau} dt,$$

$$A_\mu(\tau) = \int_0^\infty f(t, \tau) (1 - e^{-t/\tau}) dt,$$

$$B_\lambda(\eta) = \int_0^\infty F_{\log}(s) e^{-s\eta} ds, \quad B_\mu(\eta) = \int_0^\infty F_{\log}(s) (1 - e^{-s\eta}) ds.$$

Функции B_λ, B_μ имеют следующие асимптотики при больших значениях аргумента:

$$B_\lambda(\eta) \rightarrow K = \int_0^\infty F_{\log}(s) ds,$$

$$B_\mu(\eta) \rightarrow \eta \int_0^\infty s F_{\log}(s) ds, \quad \eta \rightarrow 0,$$

$$B_\lambda(\eta) \rightarrow F_{\log}(0) \eta^{-1},$$

$$B_\mu(\eta) \rightarrow K - F_{\log}(0) \eta^{-1}, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Асимптотика решений кинетического уравнения

Рассмотрим решение кинетического уравнения (2) для случая турбулентного течения в плоском канале и упругого отскока частиц, соответствующего граничному условию на стенке для ФПВ скорости и положения частицы:

$$P(v, 0) = P(-v, 0).$$

Асимптотика решения вблизи стенки определяется уравнением, следующим из (2), после подстановки в него (10):

$$\tau \frac{\partial(vP)}{\partial y} - \frac{\partial(vP)}{\partial v} = y^4 \left(A_\lambda \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + A_\mu \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial y} \right). \quad (13)$$

Как показано в [8], решение (13) имеет характер внутреннего слоя вдоль линии нулевых скоростей в фазовом пространстве (v, y) с характерной толщиной $\sigma(y) = A_\lambda^{1/2} y^2$ и может быть определено с помощью метода Чепмена–Энскога, детали которого применительно к данной задаче описаны в [8, 9, 18]. Решение в главном приближении имеет вид гауссова распределения:

$$P = \frac{\Phi(y)}{\sqrt{2\pi\sigma(y)}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2(y)}\right] \quad (14)$$

и описывает так называемые диффузионные частицы, находящиеся в статистическом равновесии с турбулентностью несущей среды. Величина $\Phi(y)$ в (14) есть главное приближение для концентрации частиц, а $\sigma(y)$ – для среднеквадратичной пульсации скорости частиц внутреннего слоя:

$\langle v^2 \rangle \approx \sigma^2(y) = A_\lambda y^4$. Подставляя последнее выражение в (5), получим уравнение для главного приближения концентрации частиц вблизи стенки:

$$(A_\mu + \tau A_\lambda) y^4 \frac{d\Phi}{dy} + 4\tau A_\lambda y^3 \Phi = 0. \quad (15)$$

Решением (15) является степенная сингулярность концентрации частиц [8, 19]:

$$\Phi(y) = Ay^{-\alpha},$$

$$\alpha(\tau) = \frac{4\tau A_\lambda}{A_\mu + \tau A_\lambda} = 4 \frac{\int_0^\infty f(t, \tau) e^{-t/\tau} dt}{\int_0^\infty f(t, \tau) dt}, \quad (16)$$

где A – коэффициент, который будет определен позже.

Как показано в [8], вследствие наличия сингулярности концентрации (16) вклад диффузионных частиц (14) в общее решение при $y \rightarrow 0$ является доминирующим над вкладом баллистических частиц, который вследствие этого можно не учитывать в первом приближении. При удалении от стенки в области вязкого подслоя $y = O(1)$ вклады диффузионных и баллистических частиц становятся сопоставимыми.

Рассмотрим теперь решения уравнения (2) в логарифмическом слое $1 \ll y \ll \text{Re}_\tau$, для чего подставим асимптотики (11) в (4) и запишем кинетическое уравнение в виде:

$$\tau \frac{\partial(vP)}{\partial y} - \frac{\partial(vP)}{\partial v} = \frac{y}{\tau} B_\lambda(y/\tau) \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + y B_\mu(y/\tau) \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial y}.$$

Введя новую координату $\eta = y/\tau$, это уравнение можно переписать в универсальном виде, не зависящем явно от числа Стокса:

$$\frac{\partial(vP)}{\partial \eta} - \frac{\partial(vP)}{\partial v} = \eta B_\lambda(\eta) \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \eta B_\mu(\eta) \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial \eta}, \quad (17)$$

откуда следует универсальный вид для ФПВ $P = P(v, \eta)$ в этой области, и, как следствие, для концентрации и моментов скорости частиц $\Phi = \Phi(\eta)$, $\langle v^2 \rangle = \sigma_{2p}(\eta)$.

Число Стокса τ , как известно, является характерным безразмерным путём торможения частицы – аналогом длины свободного пробега в кинетической теории газов. Вблизи стенки при малых η частицы становятся баллистическими и беспрепятственно достигают вязкого подслоя, откуда следует ненулевое значение второго момента скорости частиц $\sigma_{2p}(y)$ в интервале расстояний $1 \ll y \ll \tau$. Конечная скорость частиц препятствует формированию каких-либо особенностей концентрации частиц при малых η , несмотря на обращение в нуль при $\eta = 0$ диффузионных коэффициентов уравнения (17). Это можно также показать на основе аналога соотношения (5) для логарифмического слоя:

$$\Phi \frac{d\langle v^2 \rangle}{d\eta} + (\langle v^2 \rangle + \eta B_\mu(\eta)) \frac{d\Phi}{d\eta} = 0, \quad (18)$$

из которого при $\eta \rightarrow 0$ следует $\frac{d\langle v^2 \rangle \Phi}{d\eta} \rightarrow 0$ и следовательно (также [20]):

$$\Phi \sim \langle v^2 \rangle^{-1}.$$

С учётом (12) для больших значений координаты η уравнение (17) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial(vP)}{\partial\eta} - (K\eta - F_{\log}(0)) \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial \eta} = \\ = F_{\log}(0) \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{\partial(vP)}{\partial v}, \end{aligned} \quad (19)$$

решение которого, как нетрудно убедиться, близко к равновесному решению, определяемому балансом двух членов в правой части (19). Оно имеет вид гауссова распределения (14), в котором $\sigma^2(y) = F_{\log}(0)$. Это означает, что интенсивность пульсаций скорости частиц в логарифмическом слое при $y \gg \tau$ равна интенсивности пульсаций скорости среды, поскольку, как уже упоминалось выше, на таких расстояниях от стенки частица ведёт себя как пассивная примесь. Подставляя $\langle v^2 \rangle = F_{\log}(0)$ и (12) в (18) полу-

чаем $K\eta \frac{d\Phi}{d\eta} = 0$, откуда следует, что вне логариф-

мического слоя концентрация в главном приближении постоянна и равна концентрации в центре канала $\Phi = \Phi_c$. В этом также можно убедиться непосредственно из балансного соотношения (5), из которого следует, что во внешней области $y = O(\text{Re}_\tau)$ изменения концентрации частиц по сечению канала $\Delta\Phi/\Phi_c \sim \tau \text{Re}_\tau^{-1} \ll 1$. Это позволяет определить предельный вид полученной выше универсальной функции концентрации в логарифмическом слое $\Phi = \Phi(\eta)$ и записать её в следующем виде:

$$\Phi = \Phi_c [1 + f(y/\tau)], \quad y \gg 1, \quad (20)$$

где f – универсальная функция, удовлетворяющая условию $f(\eta) \rightarrow 0$.

Аккумуляция частиц в вязком подслое

Согласно результатам предыдущего пункта, концентрация частиц имеет степенную особенность (16) вблизи стенки. При удалении от стенки концентрация уменьшается до величин, сопоставимых с концентрацией в центре канала Φ_c , и становится практически постоянной в области $\tau \ll y \ll \text{Re}_\tau$, которая занимает большую часть потока в канале. Тогда концентрация частиц $\Phi(y_0) = Ay_0^{-\alpha}$ на расстоянии $y_0 = O(1)$, соответствующем примерной границе применимости асимптотики (16), должна иметь порядок концентрации в центре канала Φ_c , причём коэффициент пропорциональности здесь может зависеть только от единственного параметра задачи в области вязкого подслоя – числа Стокса, откуда следует:

$$\Phi_c = B(\tau) Ay_0^{-\alpha}, \quad (21)$$

где $B(\tau)$ – некоторая универсальная функция.

Поскольку осаждение частиц отсутствует, общая масса частиц в канале сохраняется в различных сечениях вдоль потока, что может быть записано в виде соотношения:

$$\int_r^{\text{Re}_\tau} \Phi(y) dy = \Phi_m \text{Re}_\tau, \quad (22)$$

где Φ_m – средняя концентрация частиц в канале, и учтено то, что частица не может подойти к стенке ближе, чем её радиус r , который для сферических частиц следующим образом выражается через число Стокса и относительную плотность частиц:

$$r = (4,5\tau\tilde{\rho}^{-1})^{1/2}. \quad (23)$$

Руководствуясь результатами предыдущего пункта, пределы интегрирования в (22) можно разбить на два интервала, в каждом из которых основной вклад будет вносить соответствующие асимптотики (16) или (20):

$$\int_r^{\text{Re}_\tau} \Phi(y) dy = \int_r^{y_0} \Phi(y) dy + \int_{y_0}^{\text{Re}_\tau} \Phi(y) dy. \quad (24)$$

Первое и второе слагаемые в правой части представляют собой характерную массу частиц в вязком подслое и во внешней области, соответственно. Первый интеграл в правой части (24) можно оценить следующим образом:

$$\int_r^{y_0} \Phi(y) dy \approx \int_r^{y_0} Ay^{-\alpha} dy = A \frac{r^{-(\alpha-1)} - y_0^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1}. \quad (25)$$

Учитывая асимптотическую оценку при $\text{Re}_\tau \gg \tau$:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{\text{Re}_\tau} [1 + f(y/\tau)] dy = \text{Re}_\tau - y_0 + \tau \int_{y_0/\tau}^{\text{Re}_\tau/\tau} f(\eta) d\eta = \\ = \text{Re}_\tau + O(1) + O(\tau) \approx \text{Re}_\tau, \end{aligned}$$

для второго интеграла в правой части (24) с учётом (21) можно записать:

$$\int_{y_0}^{\text{Re}_\tau} \Phi(y) dy \approx \Phi_c \text{Re}_\tau = B(\tau) Ay_0^{-\alpha} \text{Re}_\tau. \quad (26)$$

Можно ввести критерий степени аккумуляции частиц в вязком подслое, характеризующий отношение средних концентраций частиц в вязком подслое $r < y < y_0$ и внешней области $y_0 < y < \text{Re}_\tau$, которое, как следует из (25), (26), может быть выражено следующим образом:

$$\frac{\text{Re}_\tau - y_0}{y_0 - r} \frac{\int_r^{y_0} \Phi(y) dy}{\int_{y_0}^{\text{Re}_\tau} \Phi(y) dy} \sim \Omega = \frac{\Delta^{1-\alpha} - 1}{(1-\Delta)(\alpha-1)}, \quad (27)$$

где малый параметр Δ равен отношению размера частицы к условной толщине вязкого подслоя:

$$\Delta = \frac{r}{y_0} = \sqrt{\frac{9\tau}{2y_0^2\tilde{\rho}}}.$$

Величина Ω будет ниже называться параметром аккумуляции.

Для исследования зависимости параметра аккумуляции (27) от числа Стокса используем следующую аппроксимацию для показателя степени α [8]:

$$\alpha(\tau) = \frac{4\tau}{\tau + T_L}, \quad (28)$$

где $T_L \approx 7$ – лагранжев масштаб времени для нормальной к стенке компоненты скорости среды.

На рис. 1 изображена зависимость параметра аккумуляции (27) от числа Стокса для отношения плотностей $\tilde{\rho} = 770$, используемого в большинстве исследований [7], и для значения параметра $y_0 = 3$, соответствующего примерной границе асимптотики (16). Для малоинерционных частиц величина показателя α мала и параметр Ω , как видно из рис. 1, близок к единице, что свидетельствует о близком к равномерному распределению частиц по сечению канала. При числах Стокса порядка двух начинается резкий рост параметра аккумуляции, который достигает максимума при $\tau = 27$. Этот результат согласуется с упомянутыми выше результатами DNS/лагранжева траекторного моделирования [7], согласно которым эффект аккумуляции наиболее выражен при $\tau = 25$. С дальнейшим увеличением числа Стокса, как видно из рис. 1, параметр аккумуляции уменьшается. Это уменьшение связано с влиянием размера частиц, который, согласно (23), растёт с увеличением числа Стокса. В связи с ростом интенсивности турбулентности среды при удалении от стенки увеличение радиуса частицы подвергает её более сильным флуктуациям скорости среды, что ослабляет эффект аккумуляции.

Весьма интересным является поведение параметра инерционности при стремлении к нулю радиуса частицы, что при фиксированном числе Стокса может быть реализовано за счёт неограниченного роста плотности частиц $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$. В этом случае $\Delta \rightarrow 0$ и параметр аккумуляции (27) стремится к выражению

$$\Omega_\infty = \frac{1}{1 - \alpha(\tau)} = \frac{T_L + \tau}{3T_L - \tau}, \quad (29)$$

где использовано (28).

Как видно из (29), существует критическое значение числа Стокса $\tau_{cr} = T_L/3 \approx 2,33$, при котором параметр аккумуляции обращается в бесконечность. Это означает, что при числе Стокса, превышающем критическое, все частицы переходят из ядра потока в вязкий подслей. Это явление получило название перехода «локализация–делокализация» и было предсказано в работах [19, 21]. В этих работах, однако, не анализировался эффект ненулевого размера частиц [22], который, согласно (27), делает переход «локализация–делокализация» более плавным.

Соотношения (22), (24)–(26) позволяют выразить коэффициент A через среднюю концентрацию частиц:

$$A = \Phi_m \left[\frac{r^{-(\alpha-1)} - y_0^{-(\alpha-1)}}{(\alpha-1) \text{Re}_\tau} + B(\tau) y_0^{-\alpha} \right]^{-1}. \quad (30)$$

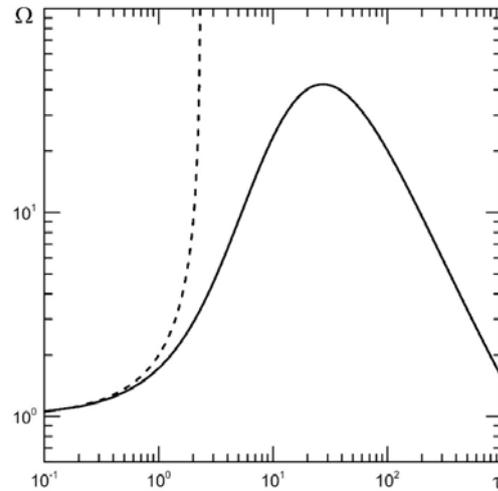


Рис. 1. Зависимость параметра аккумуляции от числа Стокса для частиц с относительной плотностью $\tilde{\rho} = 770$ (сплошная линия) и частиц с очень большой плотностью $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$ (пунктир)

Fig. 1. Accumulation parameter as a function of Stokes number for particles with the density ratio $\tilde{\rho} = 770$ (solid line) and very high density $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$ (dashed line)

Для чисел Стокса выше критического, когда $\alpha > 1$, и малых радиусов частиц $r \ll \text{Re}_\tau^{-1/\alpha}$ членами, содержащими y_0 в квадратных скобках в правой части (30), можно пренебречь, и выражение (30) перестаёт зависеть от каких-либо эмпирических коэффициентов, что с учётом (16) позволяет записать следующее выражение для профиля концентрации частиц в вязком подслое:

$$\frac{\Phi}{\Phi_m} \rightarrow (\alpha - 1) \frac{\text{Re}_\tau}{r} \left(\frac{r}{y} \right)^\alpha. \quad (31)$$

Сравнение с данными DNS/лагранжева моделирования

Выражение (31) можно сравнить с имеющимися данными DNS/лагранжева трекингового моделирования турбулентного течения в плоском канале со взвешенными инерционными частицами с упругим отскоком от стенки [23, 24]. Параметры моделирования были следующие: плотность частиц $\tilde{\rho} = 770$, полуширина канала $h = \text{Re}_\tau = 150 - 155$, числа Стокса были равны $\tau = 1, 5, 10, 25$. Для этих параметров зависимость радиуса частицы от числа Стокса имеет вид $r = 0,076 \tau^{0,5}$, и для диапазона $\tau = 1 - 25$ радиус частиц меняется от 0.076 до 0.38, что находится в пределах области применимости рассматриваемой теории $y < 3$ [8]. В начале численных расчётов [22, 23] задавалась равномерная начальная концентрация частиц $\Phi_0 = \Phi_m$.

Для проверки теоретической зависимости (31) использовалась аппроксимация (28) с $T_L = 7$. На рис. 2, а–в изображены профили концентрации частиц, отнесенные к начальной средней концентрации Φ_0 , в сравнении с зависимостью (31).

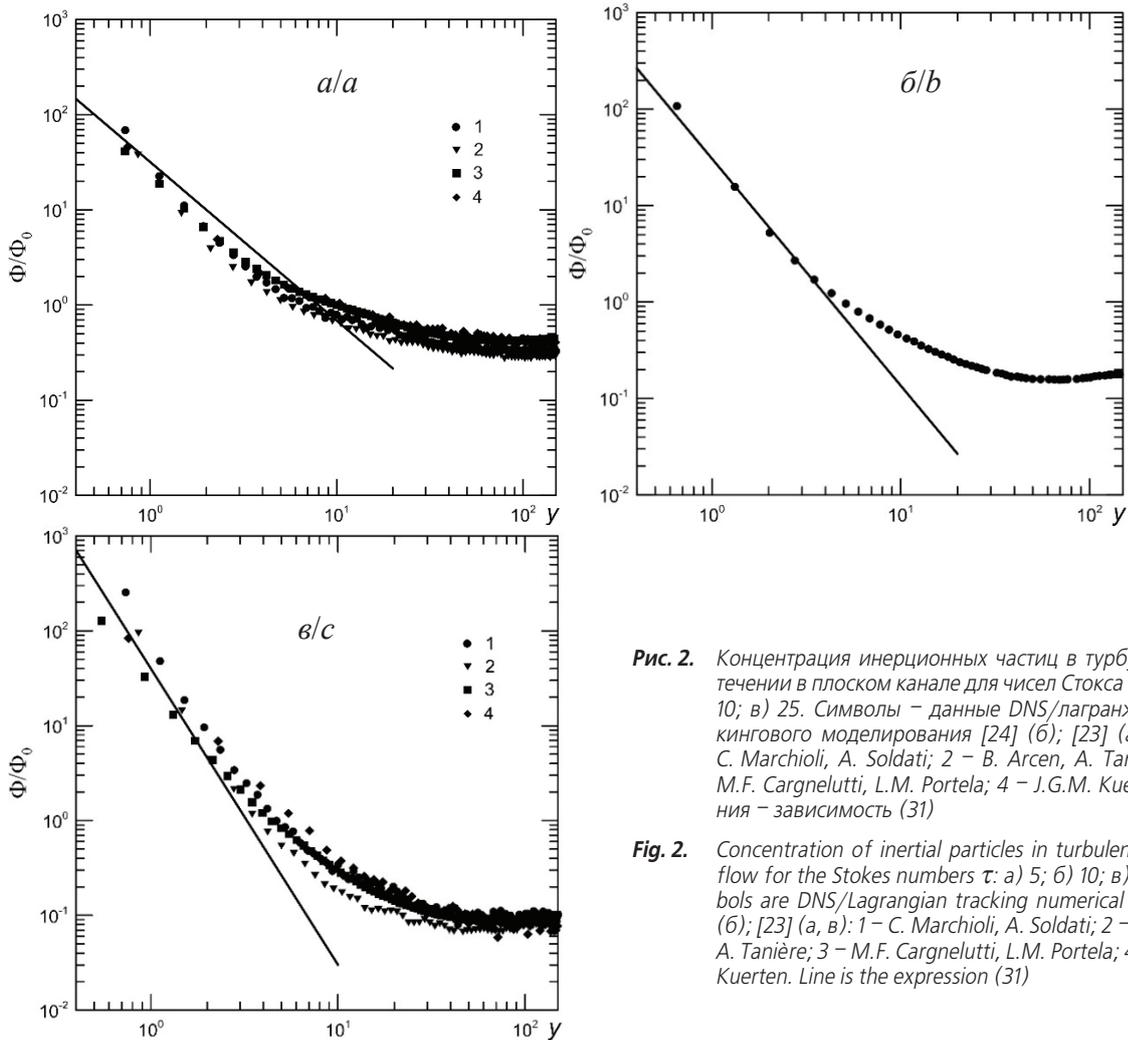


Рис. 2. Концентрация инерционных частиц в турбулентном течении в плоском канале для чисел Стокса τ : а) 5; б) 10; в) 25. Символы – данные DNS/лагранжева трекингового моделирования [24] (б); [23] (а, в): 1 – С. Marchioli, A. Soldati; 2 – В. Arcen, A. Tanière; 3 – М.Ф. Cargnelutti, L.M. Portela; 4 – J.G.M. Kuerten. Линия – зависимость (31)

Fig. 2. Concentration of inertial particles in turbulent channel flow for the Stokes numbers τ : а) 5; б) 10; в) 25. Symbols are DNS/Lagrangian tracking numerical data [24] (б); [23] (а, в): 1 – С. Marchioli, A. Soldati; 2 – В. Arcen, A. Tanière; 3 – М.Ф. Cargnelutti, L.M. Portela; 4 – J.G.M. Kuerten. Line is the expression (31)

В целом, с учётом разброса данных DNS различных авторов, можно отметить хорошее согласие между данными DNS и зависимостью (31) в диапазоне $0 < y < 3$ для чисел Стокса, превышающих 10. Наблюдаемое расхождение для числа Стокса $\tau=5$ объясняется тем, что в (30) уже нельзя пренебречь членами с y_0 в квадратных скобках в правой части. При $\tau=1$ показатель степени сингулярности становится меньше единицы $\alpha < 1$ и выражение (31) неприменимо, поэтому соответствующее сравнение не приводится.

Заключение

Асимптотический анализ решений кинетического уравнения для ФПВ скорости частицы в турбулентном течении в плоском канале позволил получить общие выражения для концентрации инерционных частиц в вязком подслое, логарифмическом слое и внешней области. Показано, что вследствие явления аккумуляции частиц под дей-

ствием турбофореза при больших значениях числа Стокса основная масса частиц сосредотачивается вблизи стенки в вязком подслое. Предложен критерий аккумуляции частиц, для которого получено аналитическое выражение, показывающее резкий рост концентрации частиц в вязком подслое на почти 3 порядка величины при росте числа Стокса от 1 до 27, что согласуется с имеющимися данными DNS/Лагранжева траекторного моделирования. Проанализировано влияние размера частицы на явление аккумуляции. Показано, что увеличение радиуса частицы ослабляет эффект аккумуляции и уменьшает пик концентрации на стенке. Получено аналитическое выражение, хорошо описывающее профиль концентрации частиц в вязком подслое в диапазоне расстояний от стенки $0 < y < 3$ для чисел Стокса, превышающих 10.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-01685)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li Z., Wei J., Yu B. Analysis of interphase forces and investigation of their effect on particle transverse motion in particle-laden channel turbulence // *Int. J. Multiphase Flow.* – 2017. – V. 88. – P. 11–29.
2. Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости. – М.: Физматлит, 2007. – 312 с.
3. Reeks M.W. Transport, mixing and agglomeration of particles in turbulent flows // *Flow Turb. Comb.* – 2014. – V. 92. – P. 3–25.
4. Transfer of particles in nonisotropic air turbulence / M. Caporali, F. Tampieri, F. Trombetti, O. Vittori // *J. Atmos. Sci.* – 1975. – V. 32. – P. 565–568.
5. Friedlander S.K., Johnstone H.F. Deposition of suspended particles from turbulent gas streams // *Ind. Eng. Chem.* – 1957. – V. 49. – P. 1151–1156.
6. Mechanism of the particle deposition in a fully developed turbulent open channel flow / C. Narayanan, D. Lakehal, L. Botto, A. Soldati // *Phys. Fluids.* – 2003. – V. 15. – P. 763–775.
7. Soldati A., Marchioli C. Physics and modelling of turbulent particle deposition and entrainment: Review of a systematic study // *Int. J. Multiphase Flow.* – 2009. – V. 35. – P. 827–839.
8. Sikovsky D.Ph. Singularity of inertial particle concentration in the viscous sublayer of wall-bounded turbulent flows // *Flow Turb. Combust.* – 2014. – V. 92. – P. 41–64.
9. Sikovsky D.Ph. Stochastic Lagrangian Simulation of Particle Deposition in Turbulent Channel Flows // *Flow Turb. Combust.* – 2015. – V. 95. – P. 561–582.
10. Сиковский Д.Ф. Осаждение инерционных частиц из турбулентного потока в каналах при больших числах Рейнольдса // *Теплофизика и аэромеханика.* – 2011. – Т. 18. – № 2. – С. 245–264.
11. Мониин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. Теория турбулентности. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. – 694 с.
12. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues / I. Marusic, B.J. McKeon, P.A. Monkewitz, H.M. Nagib, A.J. Smits, K.R. Sreenivasan // *Phys. Fluids.* – 2010. – V. 22. – P. 065103–1–24.
13. Townsend A.A. The structure of turbulent shear flow. 2nd ed. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1976. – 428 p.
14. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 312 с.
15. Сиковский Д.Ф. Закономерности осаждения частиц из турбулентного газодисперсного потока в каналах // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2010. – № 1. – С. 84–95.
16. Marchioli C., Soldati A. Mechanisms for particle transfer and segregation in turbulent boundary layer // *J. Fluid Mech.* – 2002. – V. 468. – P. 283–315.
17. Swailes D.C., Darbyshire K.F.F. A generalized Fokker–Planck equation for particle transport in random media // *Physica A.* – 1997. – V. 242. – P. 38–48.
18. Swailes D.C., Sergeev Y.A., Parker A. Chapman–Enskog closure approximation in the kinetic theory of dilute turbulent gas-particle suspensions // *Physica A.* – 1998. – V. 254. – P. 517–547.
19. Belan S. Concentration of diffusional particles in viscous boundary sublayer of turbulent flow // *Physica A.* – 2016. – V. 443. – P. 128–136.
20. Inelastic collapse and near-wall localization of randomly accelerated particles / S. Belan, A. Chernykh, V. Lebedev, G. Falkovich // *Phys. Rev. E.* – 2016. – V. 93. – P. 052206–1–6.
21. Belan S., Fouxon I., Falkovich G. Localization-delocalization transitions in turbophoresis of inertial particles // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – V. 112. – P. 234502.
22. The effect of particle density in turbulent channel flow laden with finite size particles in semi-dilute conditions / W. Fornari, A. Formenti, F. Picano, L. Brandt // *Phys. Fluids.* – 2016. – V. 28. – P. 033301–1–19.
23. Statistics of particle dispersion in direct numerical simulations of wallbounded turbulence: Results of an international collaborative benchmark test / C. Marchioli, A. Soldati, J.G.M. Kuerten, B. Arcen, A. Taniere, G. Goldensohn, K.D. Squires, M.F. Cargnelli, L.M. Portela // *Int. J. Multiphase Flow.* – 2008. – V. 34. – P. 879–893.
24. Pallares J., Vernet A., Grau F.X. Effect of the instantaneous turbulent flow structures on the particle distribution near the wall of a channel // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* – 2014. – V. 46. – P. 144–153.

Поступила 29.11.2017 г.

Информация об авторах

Сиковский Д.Ф., кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физических основ энергетических технологий Института теплофизики СО РАН; доцент кафедры физики неравновесных процессов Физического факультета Новосибирского государственного университета.

UDC 532.5

PROFILE OF INERTIAL PARTICLES CONCENTRATION IN TURBULENT CHANNEL FLOW

Dmitrii Ph. Sikovsky^{1,2},
dphs@mail.ru

¹ Kutateladze Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
1, Acad. Lavryentiev Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia.

² Novosibirsk State University,
2, Pirogov street, Novosibirsk, 630090, Russia.

The relevance of the discussed issue is caused by the wide spread of turbulent particle-laden flows in different technical equipment and facilities used in extraction of mineral resources, transportation technologies, energy engineering and other branches of industry. The examples are the pneumatic transport systems for powders, tunnels of underground excavations, gas pipes of boiler houses and metallurgy plants, ventilation channels of plants, steam pipelines and other elements of steam power plants etc. The important role of particle-laden flows in nature and human activities dictates the necessity of the study of key mechanisms of the particle-wall interaction and the development of the advanced engineering turbulence models for two-phase flows.

The main aim of the study is to obtain the analytical expression for particle concentration in turbulent channel flow between two plates from the asymptotic analysis of the kinetic equation for probability density function of particle velocity and position and the classical scaling theory of wall turbulence; analysis of finite particle size effect on accumulation of particles in viscous sublayer of wall turbulence.

The methods: the asymptotic analysis of kinetic equation for probability density function of particle velocity and position; Chapman-Enskog method for finding a solution of the kinetic equation; scaling and dimensional arguments.

The results. The authors have carried out the asymptotic analysis of the kinetic equation for probability density function of particle velocity and position for turbulent particle-laden flow in a plane channel. General forms of the expressions for concentrations of particles are obtained for viscous sublayer, logarithmic and outer layer. The authors proposed a new particle accumulation criterion. The analytical expression was obtained for this criterion. The expression shows the drastic increase of particle concentration in the viscous sublayer when increasing the Stokes number from 1 to 27, which is in good agreement with the data of DNS/Lagrangian tracking simulations. It is shown that the increase of particle size attenuates the particle accumulation. The analytical expression for concentration of particles in the viscous sublayer is derived. It is in good agreement with the data of DNS/Lagrangian tracking simulations.

Key words:

Turbulence, particle-laden flows, particle accumulation, scaling laws, statistical modeling.

The research was carried out on the account of the Russian Science Foundation Grant (project no. 14–19–01685).

REFERENCES

- Li Z., Wei J., Yu B. Analysis of interphase forces and investigation of their effect on particle transverse motion in particle-laden channel turbulence. *Int. J. Multiphase Flow*, 2017, vol. 88, pp. 11–29.
- Zaichik L.I., Alipchenkov V.M., Sinaiski E.G. *Particles in turbulent flows*. Germany, Wiley-VCH Verlag, 2008. 297 p.
- Reeks M.W. Transport, mixing and agglomeration of particles in turbulent flows. *Flow Turb. Comb.*, 2014, vol. 92, pp. 3–25.
- Caporaloni M., Tampieri F., Trombetti F., Vittori O. Transfer of particles in nonisotropic air turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 1975, vol. 32, pp. 565–568.
- Friedlander S.K., Johnstone H.F. Deposition of suspended particles from turbulent gas streams. *Ind. Eng. Chem.*, 1957, vol. 49, pp. 1151–1156.
- Narayanan C., Lakehal D., Botto L., Soldati A. Mechanism of the particle deposition in a fully developed turbulent open channel flow. *Phys. Fluids*, 2003, vol. 15, pp. 763–775.
- Soldati A., Marchioli C. Physics and modelling of turbulent particle deposition and entrainment: Review of a systematic study. *Int. J. Multiphase Flow*, 2009, vol. 35, pp. 827–839.
- Sikovsky D.Ph. Singularity of inertial particle concentration in the viscous sublayer of wall-bounded turbulent flows. *Flow Turb. Combust.*, 2014, vol. 92, pp. 41–64.
- Sikovsky D.Ph. Stochastic Lagrangian Simulation of Particle Deposition in Turbulent Channel Flows. *Flow Turb. Combust.*, 2015, vol. 95, pp. 561–582.
- Sikovsky D.Ph. Deposition of inertial particles from turbulent flow in channels at high Reynolds numbers. *Thermophysics and aeromechanics*, 2011, vol. 18, no. 2, pp. 235–254.
- Monin A.S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence*. New York, Dover, 2007. Vol. 1, 689 p.
- Marusic I., McKeon B.J., Monkewitz P.A., Nagib H.M., Smits A.J., Sreenivasan K.R. Wall-bounded turbulent flows at high Reynolds numbers: Recent advances and key issues. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, pp. 065103–1–24.
- Townsend A.A. *The structure of turbulent shear flow*. 2nd. ed. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1976. 428 p.
- Van Dyke. M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. New York, Academic Press, 1964. 229 p.
- Sikovskii D.F. Relations for Particle Deposition in Turbulent Gas-Particle Channel Flows. *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, pp. 74–84.
- Marchioli C., Soldati A. Mechanisms for particle transfer and segregation in turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech*, 2002, vol. 468, pp. 283–315.
- Swales D.C., Darbyshire K.F.F. A generalized Fokker-Planck equation for particle transport in random media. *Physica A*, 1997, vol. 242, pp. 38–48.
- Swales D.C., Sergeev Y.A., Parker A. Chapman-Enskog closure approximation in the kinetic theory of dilute turbulent gas-particle suspensions. *Physica A*, 1998, vol. 254, pp. 517–547.
- Belan S. Concentration of diffusional particles in viscous boundary sublayer of turbulent flow. *Physica A*, 2016, vol. 443, pp. 128–136.

20. Belan S., Chernykh A., Lebedev V., Falkovich G. Inelastic collapse and near-wall localization of randomly accelerated particles. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 93, pp. 052206–1-6.
21. Belan S., Fouxon I., Falkovich G. Localization-delocalization transitions in turbophoresis of inertial particles. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, pp. 234502.
22. Fornari W., Formenti A., Picano F., Brandt L. The effect of particle density in turbulent channel flow laden with finite size particles in semi-dilute conditions. *Phys. Fluids*, 2016, vol. 28, pp. 033301–1-19.
23. Marchioli C., Soldati A., Kuerten J.G.M., Arcen B., Taniere A., Goldensoph G., Squires K.D., Cargnelutti M.F., Portela L.M. Statistics of particle dispersion in direct numerical simulations of wallbounded turbulence: Results of an international collaborative benchmark test. *Int. J. Multiphase Flow*, 2008, vol. 34, pp. 879–893.
24. Pallares J., Vernet A., Grau F.X. Effect of the instantaneous turbulent flow structures on the particle distribution near the wall of a channel. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2014, vol. 46, pp. 144–153.

Received: 29 November 2017.

Information about the authors

Dmitrii Ph. Sikovsky, Cand. Sc., senior researcher, Kutateladze Institute of Thermophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; associate professor, Novosibirsk State University.