ПРИМЕНЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПОДХОДА К ОЦЕНИВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

А.О. Шерстобитова
Научный руководитель: Т. В. Емельянова
Томский государственный университет
Annaivashchenko06@gmail.com

Введение

В задачах обработки временных рядов, идентификации, прогнозирования широко используются модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями с неизвестными параметрами. Этапу использования модели предшествует этап идентификации параметров модели непосредственным оцениванием [1]. Для решения задач в неасимптотической постановке требуются методы, позволяющие контролировать точность оценок при малых объемах данных. В связи с этим успешно применяется последовательный анализ, который характеризуется тем, что длительность наблюдений не фиксируется заранее и определяется специальными правилами.

Целью исследования является разработка последовательной процедуры оценивания для неизвестных параметров процесса авторегрессии диффузионного типа. Кроме того, представляет интерес исследование свойств получаемых последовательных оценок, в связи с чем формулируется теорема об асимптотической нормальности последовательных оценок неизвестных параметров рассматриваемого процесса.

Описание модели

Пусть наблюдаемый p-мерный процесс $X_t = (X_1(t),..., X_p(t))'$ описывается системой линейных дифференциальных уравнений

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t, \qquad (1)$$

в которой A и B – квадратные матрицы постоянных коэффициентов размера $p \times p$, причем все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, W_t – стандартный p-мерный процесс броуновского движения.

Задача состоит в том, чтобы оценить неизвестные коэффициенты матрицы $A = \|a_{ij}\|$ по наблюдениям процесса X_t.

Предполагается, что неизвестные параметры θ_i, $i = \overline{1, p}$ таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - ... - \theta_p$ лежат в единичном круге.

Построение последовательной процедуры

Одним из основных методов оценивания вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_p)'$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому оценка $\hat{\theta}_T$ имеет вид [3]

$$\hat{\theta}_T = M_T^{-1} \int_0^T X_s d\langle X_t \rangle_p, \qquad (2)$$

где $\langle \alpha \rangle_i$ обозначает i-ю координату вектора-столбца $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p)'$, M_T - выборочная информационная матрица Фишера, M_T^{-1} – обратная к ней, если она не вырождена, и $M_T^{-1} = 0$ – в противном случае [1].

Пусть H – пороговое значение процедуры оценивания, $H > 0$. Определим длительность наблюдений процесса и оценку неизвестных параметров по формулам

$$\tau = \tau(H) = \inf\{\tau > 0 : \left\|M_T^{-2}\right\|^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{H}\}, \qquad (3)$$

$$\theta^*(H) = M_{\tau(H)}^{-1} \int_0^{\tau(H)} X_s d\langle X_t \rangle_p. \qquad (4)$$

Последовательный план (3, 4) позволяет контролировать среднеквадратическую точность получаемых оценок за счет выбора порога процедуры H [2].

Асимптотическое распределение последовательных оценок устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть задан процесс вида (1)

$$dX_t = AX_t dt + BdW_t, \qquad (1)$$

где A и B – квадратные матрицы размера $p \times p$, W_t – стандартный p-мерный процесс броуновского движения.

Пусть θ_i, $i = \overline{1, p}$ таковы, что все корни характеристического полинома $Q(z) = z^p - \theta_1 z^{p-1} - ... - \theta_p$ лежат в единичном круге. Последовательный план $(\tau_H, \theta^*(H))$ задается формулами (3, 4). Тогда вектор $\frac{1}{\sqrt{H}}(\theta^{*}(H)-\theta)$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0, F^{-1})$.

Полученные результаты применены к процессу *AR(1)* с неизвестным параметром θ. Проведено имитационное моделирование, в ходе которого вычислены моменты остановки $\tau(H)$, а также последовательные оценки параметра θ. Моделирование реализовывается при условиях: $\Delta t = 0.1$, $x_0 = 0$, объем выборки $N = 1000$, истинное значение параметра θ приняли равным 0.2. Для полученных оценок строится полигон частот.

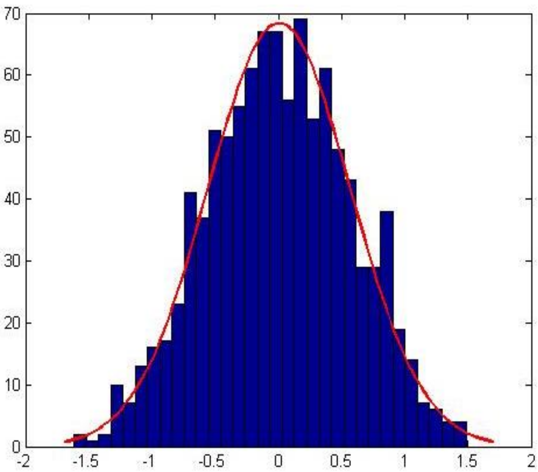

Рис. 1. Полигон частот для последовательных оценок параметра $\theta = 0.2$

С помощью критерия Жака-Бера была проведена проверка гипотезы о принадлежности последовательных оценок нормальному распределению с уровнем доверия $\gamma = 95\%$, который подтвердил нормальность результатов оценивания.

Заключение

Таким образом, в результате проведенного исследования построена последовательная процедура с использованием специального правила остановки. Построенный последовательный план позволяет контролировать среднеквадратическую точность получаемых оценок за счет выбора порога процедуры. Кроме того, получаемые последовательные оценки обладают свойстом асимптотической нормальности. Этот факт может быть использован для построения доверительных интервалов для параметров модели авторегрессии, а также для исследования оптимальности одноэтапной последовательной процедуры.

Список использованных источников

1. Емельянова Т. В., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии. – Вестник Томского гос. у-та: Математика и механика. №5(25). Томск, 2013, с. 12-25.
2. Конев В. В., Пергаменщиков С. М. О последовательном оценивании параметров случайных процессов диффузионного типа. Пробл. Передачи информ., 1985, т. 21, вып. 1, с.48-61.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974.