

### Выводы

1. Формирование свинцовой фазы в МСОБ зависит от условий кристаллизации зерен  $\alpha$ -фазы: измельчение зерна матрицы приводит к укрупнению свинцовых включений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сучков Д.И. Медь и ее сплавы. — М.: Металлургия, 1967. — 248 с.
2. Чурсин В.М., Коган Л.Б. Температуры заливки оловянных бронз при изготовлении герметичных отливок // Литейное производство. — 1961. — № 4. — С. 14.
3. Чурсин В.М. Условия получения равнопрочных отливок из медных сплавов // Литейное производство. — 1963. — № 9. — С. 6—10.
4. Медведев А.И. Особенности получения герметичных отливок из оловянных бронз типа БрОЦ и БрОЦС: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: МВМИ, 1971. — 26 с.
5. Медведев А.И., Чурсин В.М. Получение герметичных отливок из оловянных бронз // Литейное производство. — 1970. — № 8. — С. 14—16.

2. При повышении температуры заливки от 950 до 1250 °С укрупняются зерна матрицы до трех раз; свинцовые включения измельчаются в 1,5...2,2 раза.
3. Ликвация свинца снижается с увеличением температуры заливки МСОБ в указанном интервале температур при ЦБ литье.

6. Юдин С.Б., Розенфельд С.Е. О некоторых особенностях кристаллизации центробежных отливок // Литейное производство. — 1959. — № 6. — С. 40—41.
7. Лошкарев Б.И. К вопросу о теории и практике центробежного способа литья // Литейное производство. — 1957. — № 8. — С. 1—6.
8. Свидетельство на ПО 2004610217 РФ. Система компьютерной обработки изображений (система КОИ) / Ю.П. Егоров, Н.В. Мартюшев / Заявлено 24.11.2003; Оpubл. 19.01.2004.
9. Лошкарев Б.И. Исследование процесса заливки свинцовистых бронз центробежным способом: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 1954. — 22 с.
10. Флемингс М. Процессы затвердевания. — М.: Мир, 1977. — 396 с.

УДК 539.3

## ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

С.А. Бочкарева\*, Б.А. Люкшин, А.И. Реутов\*

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН. г. Томск  
E-mail: borisljuk@mail.2000.ru

\*Томский университет систем управления и радиоэлектроники

*При анализе надежности конструкций из полимерных и полимерных композитных материалов применяется вероятностный подход, поскольку для реальных материалов всегда существует некоторый разброс количественных характеристиках их свойств, для конструкций — отклонения размеров от их номинальных значений, для нагрузок — отклонения от средних эксплуатационных значений. Обработка массива параметров напряженно-деформированного состояния конструкций, полученных в результате численных и натурных экспериментов, проводится с помощью методов теории вероятности и математической статистики.*

### Введение

При анализе параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций и оценке их работоспособности распространенным является подход, который можно назвать детерминистским. Принимается, что все параметры, которыми определяется НДС конструкции, являются определенными с известной точностью величинами. Для задач анализа НДС деталей и конструкций это три группы параметров. Первая из них определяет свойства материала, вторая — геометрию конструкции, третья — способ приложения и интенсивность приложенных нагрузок. Все эти характеристики в той или иной степени носят случайный характер, а конкретные их величины, задаваемые в детерминистском подходе, являются некоторыми средними приближенными значениями. Существующий разброс параметров и их отклонение от средних значений учитывается введением коэффициента запаса прочности, чем компенсируется неопреде-

ленность информации о точных значениях. Можно говорить, что величина коэффициента запаса прочности — это характеристика уровня знания (вернее, незнания) точных значений этих параметров.

Возможность разрушения изделия, таким образом, носит вероятностный характер, и она должна оцениваться соответствующими количественными характеристиками. Вероятностный характер имеют не только выше перечисленные параметры материала, конструкции и нагрузки, но и сами критерии разрушения, поскольку они представляют собой обработку некоторого массива экспериментальных данных. При оценке вероятности безотказной работы (ВБР) необходимо сопоставлять расчетные или экспериментальные данные о НДС конструкции во всех ее точках, имеющие вероятностный характер, с критериями прочности, имеющими такой же смысл. Подобные подходы разрабатываются, например, в [1, 2]. Отличительные особенности предлагаемой работы заключаются в учете разбро-

са параметров материала не только от опыта к опыту, но и по самим конструкциям, что связано с технологическими особенностями их изготовления.

#### Физическая и математическая постановка

Качество изделий из полимерных композитных материалов (ПКМ), получаемых различными технологическими способами, определяется свойствами его фаз, зависящими как от рецептуры, так и от режимов переработки материала. В большинстве случаев операции изготовления ПКМ и изделия из него совмещаются при использовании различных технологий изготовления изделий: свободным литьем и литьем под давлением, прессованием, экструзией и т.д. Нестабильность параметров технологических процессов приводит к тому, что деформационно-прочностные свойства изделий и их геометрические размеры являются не детерминированными, а случайными значениями. Более того, в разных точках по объему пресс-формы отличаются уровни давления, температурный режим и т.д. Случайными величинами в условиях эксплуатации являются и внешние воздействия, например, снеговая или ветровая нагрузка, скачки давления в трубопроводе при срабатывании запорной арматуры или включении и выключении насосов и т.д. Для описания поведения конструкций всем прочностным и геометрическим характеристикам, а также внешним воздействиям придается вероятностный характер.

Для построения полей ВБР конструкций из ПКМ с учетом нестабильности их свойств определяются параметры НДС конструкции, которые носят вероятностный характер, строятся кривые распределения значений эквивалентных напряжений и/или деформаций в каждой точке конструкции и сравниваются с экспериментально полученными предельными напряжениями, имеющими также вероятностный характер.

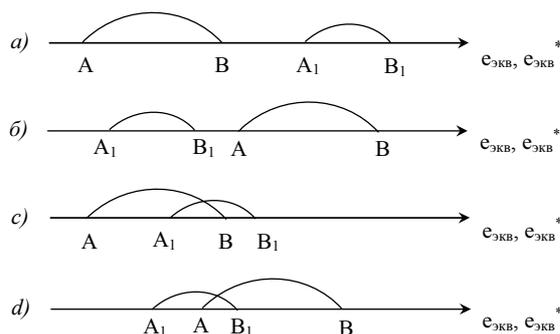


Рис. 1. Варианты распределений эквивалентных деформаций и предельных значений в точке конструкции  $e_{экв}^*$

Рассмотрим возникающие в связи с этим варианты (рис. 1). Считаем для конкретности, что критерием, по которому можно судить о работоспособности материала, является так называемая эквивалентная деформация. На оси эквивалентных деформаций  $e_{экв}$  отрезком АВ обозначим область, в которую попадают все эквивалентные деформации в данной точке конструкции при натурном или численном модели-

ровании НДС изделия. При численном анализе это означает проведение ряда расчетов, в которых часть параметров или все параметры, определяющие НДС конструкции, являются случайными величинами. В натурном эксперименте это означает проведение ряда испытаний одного и того же или нескольких подобных изделий. На этой же оси отрезком  $A_1B_1$  обозначим интервал эквивалентных деформаций  $e_{экв}^*$ , соответствующих разрушению, или пределу текучести материала при экспериментальных исследованиях.

Тогда в случае *a* (рис. 1) в данной точке конструкции разрушение исключено, в случае *b* разрушение произойдет обязательно. В случае *c* область "перекрывтия", отрезок  $A_1B_1$ , есть не что иное, как характеристика (вероятность) разрушения (точнее, она определяется отношением  $A_1B_1/AB$ ), а в случае *d* – область  $AB_1$  ( $AB_1/AB$ ) – вероятность разрушения.

Эти оценки справедливы, если вероятность попадания эквивалентных деформаций в данной точке конструкции в любое место внутри отрезка АВ одинакова, а уровни  $e_{экв}^*$ , отвечающие разрушению материала при его испытаниях, равномерно распределены по отрезку  $A_1B_1$ . Экспериментально установлено, что на самом деле распределения этих параметров подчиняются нормальному закону. В этом случае для вариантов *a* и *b* (рис. 1) все рассуждения сохраняют свою силу, а для вариантов *c* и *d* нужно оценивать так называемую область "перекрывтия" кривых распределения  $e_{экв}$  и  $e_{экв}^*$ .

Область "перекрывтия" (рис. 2), полученная в результате сопоставления кривых распределения эквивалентных деформаций и их предельных значений, и является областью вероятного отказа работы конструкции [2].

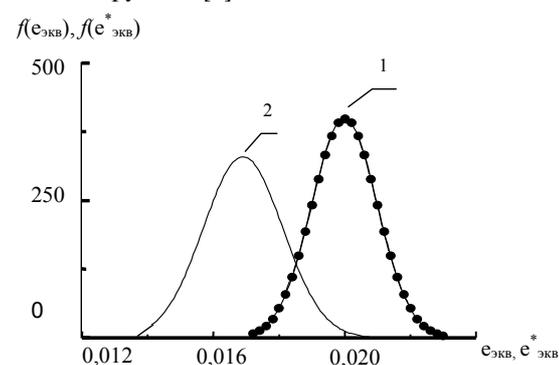


Рис. 2. Пример распределений: 1) предельной и 2) реальной эквивалентных деформаций

В работе предлагаемый подход иллюстрируется на примере построения поля вероятностей безотказной работы для конструкции в виде участка трубы, выполненной из полимерного материала на основе полипропилена, используемого для производства трубопроводов различного технологического значения – транспортировки воды, газа и т.д. Одним из значимых параметров, определяющим НДС изделия, является модуль упругости материала. Экспериментально установлено, что от наблюде-

ния к наблюдению значения модуля упругости отличаются от его среднего значения в пределах 20 %. При математическом моделировании случайное изменение модуля упругости от наблюдения к наблюдению задается с помощью датчика псевдослучайных чисел [3]. Согласно экспериментальным данным, это изменение подчиняется нормальному закону распределения. В качестве эквивалентной деформации, по которой можно судить о работоспособности материала в конструкции, принимается интенсивность деформаций. В силу осевой симметрии задачи рассматривается расчетная область, представляющая собой часть осевого сечения трубы, и решается осесимметричная задача теории упругости (рис. 3).

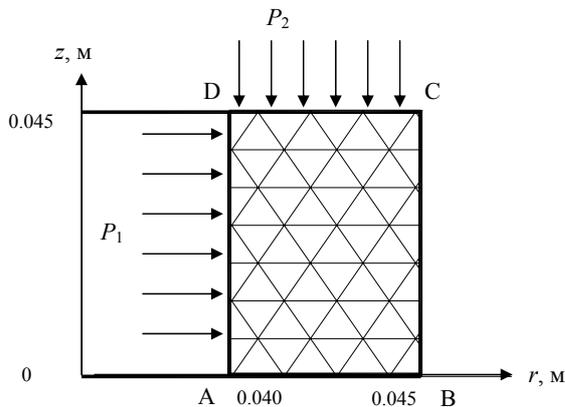


Рис. 3. Расчетная схема нагруженного участка трубы

В качестве внешних нагрузок принимаются одновременно приложенное внутреннее давление  $P_1$  и осевое сжатие  $P_2$ . Для упругой трубы под действием внутреннего давления известно решение Ламе [4], которое в данном случае служит для тестирования программы.

В каждой точке контура области ABCD необходимо ставить по два условия (задача является двумерной по пространственным переменным), задаваясь вектором напряжений, вектором перемещений или по одной из разнонаправленных компонент этих векторов. В примере использованы следующие условия.

На линии АВ ставятся условия скольжения вдоль жесткой стенки:

$$u = 0, \sigma_r = 0,$$

где  $u$  – радиальное смещение,  $\sigma_r$  – касательные напряжения.

На линии ВС напряжения отсутствуют:

$$\sigma_n = \sigma_t = 0,$$

где  $\sigma_n$  – нормальные напряжения.

На линии CD:  $\sigma_n = -P_2, \sigma_t = 0$ .

На линии AD:  $\sigma_n = -P_1, \sigma_t = 0$ .

#### Метод решения

Численная реализация задачи определения параметров НДС конструкции для каждого конкретного варианта распределения его свойств по объему

изделия проводится методом конечных элементов с использованием разбиения расчетной области на конечные элементы треугольной формы. Метод основан на использовании соотношения:

$$\frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{U\}} = [k^{(e)}] \{U\} + \{f^{(e)}\}, \quad (1)$$

где  $\Pi^{(e)}$  – потенциальная энергия отдельного элемента системы,  $\{U\}$  – узловые перемещения,  $\{f^{(e)}\}$  – вектор нагрузки,  $[k^{(e)}]$  – матрица жесткости отдельного элемента, представляющая собой объемный интеграл вида:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV. \quad (2)$$

Для разбиения расчетной области используются треугольные конечные элементы с шестью компонентами узловых перемещений. Для уменьшения вычислительных ошибок треугольные элементы выбираются возможно более правильной геометрической формы, без тупых углов.

Уравнения для элемента записываются в цилиндрической системе координат. Компоненты перемещения  $u, v$  аппроксимируются внутри треугольного элемента соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Соотношение (1) содержит три функции формы, которые в линейном случае имеют вид:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z),$$

где  $A$  – площадь треугольного элемента,  $a_i, b_i, c_i$  – коэффициенты, вычисленные по значениям узловых координат.

Для осесимметричной задачи используются геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z}; \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}; \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (5)$$

Матрица упругих характеристик  $[D]$  в случае осесимметричной задачи и для изотропного материала имеет порядок  $4 \times 4$ :

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{Bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{Bmatrix}.$$

Дифференцируя (3) и используя выражения для функций формы, получим соотношения для деформаций:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\}, \quad (6)$$

где  $[B]$  – матрица, которая содержит коэффициенты, являющиеся функциями координат. Матрица жесткости  $[B]$  для элемента представляет собой объемный интеграл и содержит коэффициенты, которые являются функциями координат  $r$  и  $z$ , и поэтому не могут быть вынесены за знак интеграла. В [5] предлагается использовать следующую формулу для матрицы жесткости:

$$[k^{(e)}] = [\bar{B}^{(e)}]^T \cdot [D^{(e)}] \cdot [\bar{B}^{(e)}] \cdot 2\pi \cdot \bar{r} \cdot A, \quad (7)$$

где  $[\bar{B}^{(e)}]$  – матрица коэффициентов, вычисленная по значениям  $r$  и  $z$  в центре элемента для строки, содержащей функции формы. Матричное уравнение для ансамбля элементов имеет вид:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}, \quad (8)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости, которая собирается из матриц жесткости элементов,  $\{F\}$  – глобальный вектор-столбец нагрузок.

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad \{F\} = -\sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}.$$

Соотношение (8) представляет собой матричную форму записи системы линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора перемещений во всех узлах конечно-элементной сетки. Эта система линейных уравнений решается методом Гаусса. Затем деформации во всех ячейках сетки определяются по соотношению (6), а напряжения в элементах вычисляются по закону Гука

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}.$$

#### Определение вероятностей безотказной работы конструкции

Задача вероятностного расчета сводится к многократному определению параметров НДС, которые являются случайными величинами. В результате обработки полученного массива данных определяются характеристики параметров НДС – математическое ожидание  $\mu_s$  и среднеквадратичное отклонение  $\sigma_s$ . Они оцениваются для значений интенсивности деформации в каждой конечно-элементной ячейке расчетной сетки по соответствующим формулам теории вероятностей, что позволяет построить функции плотности распределения [2].

Плотность нормального распределения интенсивности деформаций  $s$  имеет вид

$$f_s(s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{s - \mu_s}{\sigma_s} \right)^2 \right], \quad -\infty < s < \infty.$$

Аналогичному закону подчиняется плотность нормального распределения предельных деформаций  $S$

$$f_s(S) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{S - \mu_s}{\sigma_s} \right)^2 \right], \quad -\infty < S < \infty,$$

где  $\mu_s$  – математическое ожидание интенсивности деформаций,  $\sigma_s$  – среднее квадратичное отклонение интенсивности деформаций,  $\mu_s$  – математическое ожидание предельных деформаций,  $\sigma_s$  – среднее квадратичное отклонение предельных деформаций.

Введем случайную величину  $y = S - s$ . Принимаем, что случайная величина  $y$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием

$$\mu_y = \mu_s - \mu_s$$

и средним квадратичным отклонением

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}.$$

Тогда ВБР можно выразить через  $y$  как

$$R = P(y > 0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] dy.$$

Если  $x = (y - \mu_y) / \sigma_y$ , то  $dx = dy$ . При  $y = 0$  нижний предел случайной величины  $x$  имеет вид

$$x = \frac{0 - \mu_y}{\sigma_y} = -\frac{\mu_s - \mu_s}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}},$$

а при  $y \rightarrow +\infty$  верхний предел  $x \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\mu_s - \mu_s}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx. \quad (9)$$

Ясно, что  $x = (y - \mu_y) / \sigma_y$  является нормированной случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Следовательно, вероятность безотказной работы можно найти с помощью таблиц функции нормального распределения.

Формулу (9) можно представить в виде:

$$R = 1 - \Phi \left( -\frac{\mu_s - \mu_s}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_s^2}} \right). \quad (10)$$

где  $\Phi$  – интеграл Лапласа.

Полученная функция плотности распределения вероятностей значений интенсивности деформаций  $e_i$  подчиняется нормальному распределению. Функция плотности распределения вероятностей для экспериментально полученных предельных значений интенсивности деформаций  $e_i^*$  имеет вид, показанный на рис. 2 (кривая 1). Область пересечения этих кривых является областью отказа. Величина вероятности отказа (безотказной работы) вычисляется по приведенной формуле (10). Определив значения  $x$ , можно с помощью таблицы нормального нормированного распределения определить величину вероятности безотказной работы конструкции.

### Результаты расчетов

Сопоставляя полученные деформации с предельными экспериментальными значениями, имеющими также случайное распределение (с характеристиками  $\mu_s=0,02$ ,  $\sigma_s=0,001$  для ПКМ на основе полипропилена), получаем в каждой точке трубы по ее толщине значение функции  $R$  (ВБР) материала. Из анализа решения следует, что наибольшие деформации получаются на внутренней стенке трубы, а вероятность безотказной работы ее в этих точках является наименьшей (рис. 4). Если в какой либо точке конструкций вероятность безотказной работы меньше требуемого (нормативного) значения, то можно говорить о вероятности разрушения конструкции в целом. В качестве нормативного значения вероятности безотказной работы можно принять, например, характеристику, связанную с отношением стоимости планового ремонта изделия к стоимости устранения последствий аварийного разрушения [6].

Анализ влияния трех параметров (толщины стенки трубы  $r$ , внутреннего давления  $P_1$  и осевого сжатия  $P_2$ ) на напряженно-деформированное состояние конструкции и соответственно на вероятность безотказной работы  $R$  показывает, что наиболее значимым параметром является  $\Delta r$ , далее по убывающей  $P_1$  и  $P_2$ . Это означает, что при производстве полимерных труб их толщина должна контролироваться наиболее тщательно.

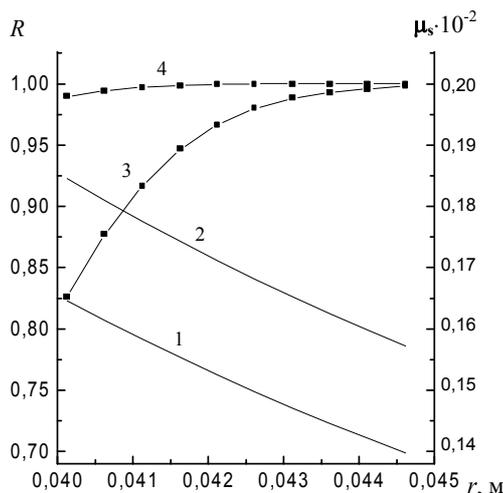


Рис. 4. Распределение математического ожидания интенсивности деформаций  $\mu_s$  (1, 2) и вероятности безотказной работы  $R$  (3, 4) по толщине стенки трубы  $r$ ; кривые 1, 4) соответствуют уровню внутреннего давления  $P_1 = 4,5$  МПа и осевого сжатия  $P_2 = 1$  МПа, кривые 2, 3)  $P_1 = 5$  МПа,  $P_2 = 2$  МПа

Таким образом, ответ на вопрос о надежности, или о возможном разрушении конструкции, при рассматриваемом подходе получается в виде вероятности разрушения (неразрушения) материала во всех точках изделия, что можно представить в виде полей распределения ВБР по всему объему конструкции.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. — М.: Машиностроение, 1990. — 448 с.
2. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. — М.: Мир, 1980. — 351 с.
3. Теннант-Смит Дж. Бейсик для статистиков. — М.: Мир, 1988. — 208 с.

4. Любошиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов. — Минск: Вышэйшая школа, 1969. — 460 с.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979. — 392 с.
6. Юдин А.В., Кучерявый В.И. Расчет надежности конструктивных элементов при растяжении с кручением // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2001. — № 5. — С. 56–61.

УДК 539.621+674.053

## СМЕЩЕНИЕ ЗОН ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОКОЯ В МНОГОКОНТУРНЫХ ПЕРЕДАЧАХ ГИБКОЙ СВЯЗЬЮ "ШКИВ – ГИБКИЙ РАБОЧИЙ ОРГАН – ЛЕНТОЧНАЯ ПИЛА"

А.А. Кондратюк, В.К. Шилько\*

Томский политехнический университет  
E-mail: publish@tpu.ru

\*Томский государственный архитектурно-строительный университет  
E-mail: docent46@yandex.ru

Рассмотрены процессы и явления, происходящие в многоконтурной передаче гибкой связью "шків – гибкий рабочий орган – ленточная пила", а также случай смещения зон относительного покоя. Приведены аналитические зависимости для определения длины зон относительного скольжения и дан их сравнительный анализ с экспериментальными данными, а также с другими типами многоконтурных передач гибкой связью.

Многоконтурные передачи гибкой связью применяются в том случае, когда гибкая связь предназначена не только для передачи крутящего момента

от ведущего шкива к ведомому, как, например, в ременных передачах, но и для выполнения полезной работы своей тянущей (ведущей) ветвью [1].