# СИНТЕЗ ФИЛЬТРА КАЛМАНА-БЬЮСИ

Бологов А.А., Сидорова А.А.
Научный руководитель: Сидорова А.А. Томский политехнический университет
Bologov.andrey.94@mail.ru

**Аннотация**

В работе рассмотрен алгоритм фильтра Калмана-Бьюси, позволяющий увеличить точность. Представлена структурная-схемы алгоритма фильтрации. Также проведена серии численных расчетов для различных линейных и нелинейных моделей. Приведены сравнительные характеристики работы алгоритма при различных коэффициентах.

**Введение**

В 60-х годах появились работы Р.Калмана и Р.Бьюси, посвящённые проблеме построения линейных оценок вектора состояния динамической системы, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями, со случайной аддитивной добавкой типа стандартного белого шума. Наряду с системой рассматриваются наблюдения, линейно зависящие от вектора фазовых переменных, со случайным шумом. В предположении положительной определённости матриц интенсивностей шумов выведены уравнения оптимального фильтра Калмана-Бьюси.

Новизна подхода Калмана к построению оценки состояния динамических систем при наличии случайных помех заключается в комбинации двух известных идей: динамическая система рассматривается как перемещение в пространстве наблюдений и линейная оценка строится как проекция в гильбертовом пространстве. Метод Калмана-Бьюси учитывает также свойства исследуемой системы путём введения в уравнения фильтра уравнения динамики системы [1].

**Синтез фильтра Калмана-Бьюси**

Синтезируем стационарный оптимальный наблюдатель для несингулярной задачи оптимального наблюдения при некоррелированных шуме, возмущающем состояние, и шуме наблюдения, для следующего динамического объекта первого порядка: $\dot{x}(t) = -a \cdot x(t) + b \cdot u(t) + g(t)$.

Наблюдаемая переменная определяется выражением $y(t) = x(t) + p(t)$.

Здесь через $g(t)$ обозначен шум, возмущающий состояние, а через $p(t)$ - шум измерений (белые шумы с постоянными скалярными интенсивностями, соответственно $V_1$ и $V_2$). Предположим также, что совокупный процесс $[g(t), p(t)]$ можно описать как белый шум с интенсивностью

$$V(t) = \begin{vmatrix} V_1(t) & V_{12}(t) \\ V_{12}^T(t) & V_2(t) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$E\left\{\begin{pmatrix} g(t_1) \\ p(t_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^T(t_1), & p^T(t_1) \end{pmatrix}\right\} = V(t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2). \qquad (2)$$

Здесь E – символ математического ожидания.

Если все компоненты наблюдаемой переменной возмущаются белым шумом и невозможно извлечь из $y(t)$ информацию, которая не содержала бы белого шума, то задача восстановления состояния системы называется несингулярной (невырожденной).

Примем обозначения $E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0$, $E\{[x(t_0) - x_0] \cdot [x(t_0) - x_0]^T\} = Q_0$.

Будем считать, что показателем того, насколько успешно наблюдатель восстанавливает состояние системы в момент времени t, является среднее значение квадрата ошибки восстановления $E\{e^T(t) \cdot W \cdot e(t)\}$с заданной положительно определенной матрицей $W(t)$.Средняя квадратическая ошибка восстановления зависит от выбора $\hat{x}(t_0)$ и матрицы наблюдающего устройства $K(\tau), t_0 \leq \tau \leq t$. Задача оптимального выбора этих величин называется задачей оптимального наблюдения.

Задача в такой постановке впервые была решена Калманом и Бьюси. Ее решение получается путем выбора матрицы коэффициентов усиления:

$$K^0(t) = Q(t) \cdot c^T(t) \cdot V_2^{-1}(t), t \geq t_0 \qquad (3)$$

где $Q(t)$– решение матричного уравнения Риккати [2].

$$\dot{Q}(t) = V_1(t) - Q(t) \cdot C^T(t) \cdot V_2^{-1}(t) \cdot C(t) \cdot \\ \cdot Q(t) + Q(t) \cdot A^T(t) + A(t) \cdot Q(t) \qquad (4)$$

с начальным условием $Q(t_0) = Q_0$. Начальное условие для наблюдателя должно быть выбрано в виде $\hat{x}(t_0) = \bar{x}_o$.

Если удовлетворяются соотношения (3 и 4), то выражение$E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T \cdot W(t) \cdot [x(t) - \hat{x}(t)]\}$ минимизируется при всех$t \geq t_0$.Матрица дисперсий ошибки восстановления определяется выражением $E\{[x(t) - \hat{x}(t)] \cdot [x(t) - \hat{x}(t)]^T\} = Q(t)$, а среднее значение квадрата ошибки восстановления равно $E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T \cdot W(t) \cdot [x(t) - \hat{x}(t)]\} = tr[Q(t) \cdot W(t)]$. Отметим, что решение задачи оптимального наблюдения не зависит от весовой матрицы $W(t)$.

Полученный оптимальный наблюдатель известен как фильтр Калмана–Бьюси. Этот фильтр является линейным оценивателем с минимальным средним значением квадрата ошибки, т.е. нельзя найти другой линейный функционал наблюдений $y(t)$ и входного воздействия $u(t)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, который дает оценку состояния $\hat{x}(t)$ с меньшей квадратической ошибкой восстановления.

Как видно, матрица коэффициентов усиления фильтра $K^0(t)$нестационарна. Ее можно получить, решая матричное уравнение Риккати (4) в реальном масштабе времени и используя выражение (3).

При нежестких ограничениях решение $Q(t)$ уравнения Риккати (4) для наблюдателя сходится к установившемуся решению $\bar{Q}(t)$, которое не зависит от $Q_0$, когда начальный момент времени $t_0$ приближается к бесконечности. Для системы с постоянными параметрами и постоянными плотностями шумов датчиков и шумов, возмущающих состояние, установившееся решение $\bar{Q}$ также является постоянной матрицей и, в общем случае, представляет собой единственное неотрицательно определенное решение алгебраического уравнения Риккати для наблюдателя:

$$0 = A \cdot Q + Q \cdot A^T + V_1 - Q \cdot C^T \cdot V_2^{-1} \cdot C \cdot Q \qquad (5)$$

Это уравнение получается из уравнения (4), если принять производную по времени $\dot{Q}(t)$ равной нулю. Соответственно, установившаяся матрица коэффициентов усиления оптимального наблюдателя может быть записана в виде

$$\bar{K} = \bar{Q} \cdot C^T \cdot V_2^{-1} \qquad (6)$$

Полученный стационарный оптимальный наблюдатель с постоянной матрицей коэффициентов усиления$\bar{K}$является асимптотически устойчивым. В системе с постоянными параметрами он оптимален в том смысле, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} E\{e^T(t) \cdot W \cdot e(t)\}$ достигает минимума в сравнении со всеми другими наблюдателями с постоянными параметрами. Оптимальный наблюдатель обеспечивает компромисс между скоростью восстановления и устойчивостью к шуму наблюдений.

Рассчитаем установившейся оптимальный наблюдатель для этой системы. Для этого решим алгебраическое уравнение Риккати:

$$-\frac{1}{V_2} Q^2 - 2 \cdot a \cdot Q + V_1^2 = 0 \qquad (7)$$

Получим $\bar{Q}_{1,2} = [-a \pm \sqrt{a^2 + V_1^2/V_2}] \cdot V_2$. Отсюда следуют два варианта для установившегося коэффициента усиления наблюдателя:

$$\bar{K}_1 = \bar{Q}_1 \cdot C^T \cdot V_2^{-1}, \qquad \bar{K}_2 = \bar{Q}_2 \cdot C^T \cdot V_2^{-1}. \qquad (8)$$

Приняв значения $a = 0.5, V_1 = 1, V_2 = 1.5$ и учитывая, что $\bar{K} \geq 0$, получим $\bar{K} = 0.457$. Структурная схема объекта с наблюдателем представлена на рисунке 1, а схема моделирования - рисунке 2 [3, 4].

На рисунках 3 и 4 представлены графики выходных величин.

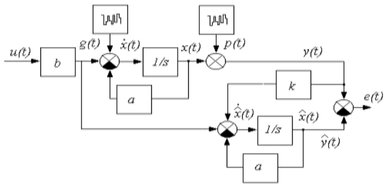


Рис. 1. Структурная схема объекта со стационарным оптимальным наблюдателем

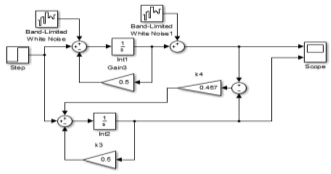

Рис. 2. Схема моделирования объекта с фильтром Калмана–Бьюси

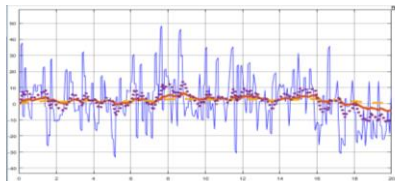

Рис. 3. Выходные характеристики (линия - выход фильтра при К=0.457, пунктир - выход фильтра при К=2, штрих - выход фильтра при К=0.1)

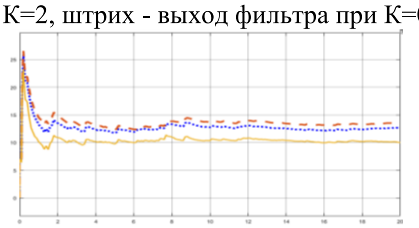

Рис. 4. Среднеквадратичная ошибка (линия - при К=0.457, пунктир - при К=2, штрих - при К=0.1)

**Заключение**

В ходе выполнения работы был сделан анализ свойств фильтра Калмана-Бьюси в рамках несингулярной задачи оптимального наблюдения при некоррелированных шуме, получен результат фильтрации сигнала объекта. При применении фильтра Калмана-Бьюси мы можем избавиться от биения в системе, которая негативно влияют на надежность системы, чем меньше коэффициент К, тем лучше происходит сглаживание сигнала. При рассчитанном коэффициенте К имеем самую маленькую среднеквадратичную ошибку.

**Литература**

1. Фильтр Калмана-Бьюси. [Электронный ресурс]. Режим доступа: свободный. Ссылка на ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki/ФильтрКалмана

2. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768 с.

3. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. –528 с.

4. Теория автоматического управления Ч.II Под ред. А.В.Нетушила – М.: Высшая школа, 1972 .– 43