# ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ РАНЖИРОВАНИЙ И ИНРАНЖИРОВАНИЙ С УЧЕТОМ СВОЙСТВ СЛАБЫХ ПОРЯДКОВ КОМПЛЕКСИРОВАННЫХ ДАННЫХ

Емельянова Е.Ю.
Научный руководитель: Муравьев С.В., кафедра СУМ
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
zeta@tpu.ru

**Введение**

Процедура комплексирования данных предполагает объединение данных различной природы происхождения, полученных от нескольких источников или измеренных разными средствами измерений с целью формирования более полного и объективного представления об анализируемом объекте. Комплексированные данные обладают различными свойствами исходных данных, соответственно совместный анализ и обработка могут оказаться весьма трудоемкими и вызывать ряд сложностей. Целесообразно применение метода *агрегирования предпочтений* на множестве $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и нахождение единственного отношение предпочтения β, *ранжирование консенсуса,* обеспечивающего наилучший компромисс между ранжированиями *исходного профиля предпочтений* Λ. *Ранжирование* λ, являясь бинарным отношением, позволяет выразить отношения предпочтения оцениваемых параметров или элементов в виде цепочки $\lambda = (a_1 \succ a_2 \succ ... \sim a_s \sim a_t \succ ... \sim a_n)$. Это отношение обладает свойствами, определяющими наличие отношений строгого порядка $\succ$ $(a_i \succ a_j)$ и отношений безразличия $\sim$ $(a_i \sim a_j)$ $m$ ранжирований из $n$ элементов, образующих *профиль предпочтения* $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$, а именно:

1. рефлексивность ($a_i \lambda a_i$ для любых $a_i \in A$);
2. транзитивность (для всех $i, j, k$ из $a_i \lambda a_j$ и $a_j \lambda a_k$ следует $a_i \lambda a_k$);
3. полнота (для любых $a_i, a_j \in A$ выполняется либо $a_i \lambda a_j$, либо $a_j \lambda a_i$).

Анализируемый исходный профиль предпочтений строится на основе интервальных данных. Учитывая тот факт, что каждый *интервал* $\{I_k\}$, $k = 1, …, m$, на вещественной числовой оси может быть представлен отношением слабого порядка на множестве $A$ принадлежащих соответствующим интервалам дискретных значений, является объединением двух непересекающихся подмножеств:

1. подмножество $A_k = \{a \mid a \in I_k, a \in A\}$, включающего все те элементы $A$, которые принадлежат интервалу $I_k$;
2. подмножество – дополнение: $\bar{A}_k = \{a \mid a \notin I_k, a \in A\}$, включающего все остальные элементы $A$, т.е. $A = A_k \cup \bar{A}_k$, $A_k \cap \bar{A}_k = \varnothing$, $k = 1, …, m$ [3].

*Инранжирование* – это ранжирование $\lambda_k$, *наведенное интервалом* $I_k$ ,удовлетворяющее следующим условиям при $i, j = 1, …, n$:

1. $a_i \in A_k \wedge a_j \notin A_k \Rightarrow a_i \succ a_j$;
2. $a_i, a_j \in A_k \vee a_i, a_j \notin A_k \Rightarrow a_i \sim a_j$;
3. $a_i \notin A_k \wedge a_j \in A_k \Rightarrow a_i \prec a_j$;
4. $a_i, a_j \in A_k$, соседние натуральные числа $\Rightarrow$ $j \equiv i + 1$.

Нарушение условия (4) приводит к существованию *запрещенных ранжирований*, для которых, при этом, выполняются условия (1 – 3).

Пространство ранжирований и подпространство инранжирований (рисунок 1) определяются их свойствами (1 – 3, 1 – 4) и образуются конгруэнтно, передавая свойства предыдущего состояния последующему, как при переходе из $\square^3$-пространства в $\square^4$. Каждое из предыдущих пространств располагается в последующем, непустые подпространства (точки, прямые, плоскости и т.д.) получаются из линейных подпространств параллельным переносом [2]. Это свойство позволяет переходить от одного графического изображения к другому, от простого к сложному с увеличением $n$ (рисунок 1).


Рис. 1.Пространство слабых порядков

Структура пространства слабых порядков $\square^{weak}$ задается комбинациями соответствующих им строгих порядков. Количество слабых порядков определяется по формуле:

$$P_{weak} = \sum_{n=0}^{n-1} (S_{n,k} \cdot k!) \tag{1}$$

где $n$ – количество элементов множества $A$;
$S_{n,k}$ – числа Стирлинга 2-го рода – количество неупорядоченных разбиений $n$-элементного множества на $k$-непустых подмножеств.

Структура подпространства исходных строгих порядков $\square^{str}$ для найденного отношения консенсуса β задается множеством всех $n!$ линейных отношений на $A$, которые получаются перестановкой первых натуральных чисел $N_n = \{1, 2, …, n\}$, что в свою очередь соответствует перестановке строк и столбцов матрицы профиля предпочтений Λ $m$ ранжирований из $n$ элементов при определении наилучшего значения $a_i$ в ранжировании консенсуса β.

Количество строгих порядков определяется по формуле:

$$P_n = n! \quad (2)$$

Структура подпространства отдельного инранжирования $\square^{inr}$ определяется следующим неравенством:

$$\lambda_k \in \bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n-j}\{a_{i+j}\}\right) \succ \left(A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{n-j}\{a_{i+j}\}\right)\right\} \quad (3)$$

Неравенство (3) определяет для каждого $\lambda_k$-инранжирования ($n - 2$)-отношений безразличия трактуемого как эквивалентность $(\square)$ и *единственное* отношение строгого порядка $(\succ)$ между рассматриваемыми элементами двух классов эквивалентности соответствующих подмножеств $A_k$ и $\bar{A}_k$, при чем элементы подмножества $A_k$ строго предпочитаются элементам его дополнения $\bar{A}_k$, т.е. всегда $A_k \succ \bar{A}_k$ Каждое $k$-е инранжирование характеризуется *мощностью* и *спектром*, который может быть задан как строгими порядками, так и соответствующими слабыми порядками. Количество разрешенных слабых порядков для $n$-элементного множества определяется *треугольным числом T:* $T_n = n(n+1)/2$ (4). Согласно неравенству (3) и формуле (4) отношение полной эквивалентности, характеризующее равнозначность всех рассматриваемых $n$-элемен-тов и пустое множество $(\varnothing)$ соответствуют условиям (1–4) и входят в число разрешенных ранжирований, однако анализируя их свойства [4], следует выделить их как самостоятельные объекты пространства.

Из-за кратного увеличения числа всех перестановок порядка $n$, формула (2), и соответствующего увеличения размерности пространства $\square^d$ ($d$ обозначается размерность пространства) проблема выбора адекватной геометрической формы для графического представления перестановок выражается тем сильнее, чем больше $n$. Подпространства инранжирований размерностей 0, 1, 2 и $d - 1$ в $\square^d$ проявляются в качестве *точки*, *прямой*, *плоскости* и *гиперплоскостями* соответственно, что графически представлено на рисунке 2.

Геометрия многогранников, есть геометрия самого пространства $\square^d$, а размерность многогранника можно охарактеризовать размерностью его оболочки. В $\square^3$-пространстве классификация правильных многогранников дает пять хорошо известных платоновых тел [1]. Однако согласно ограничениям по структуре инранжирований для графического представления $\square^{str}$ и $\square^{inr}$ будем использовать *перестановочный многогранник* порядка $n$ – это ($n - 1$)-мерный выпуклый многогранник, вложенный в $n$-мерное евклидово пространство, который является выпуклой оболочкой всех $n$! точек, получающихся перестановками координат вектора (1, 2, 3, …, $n$).

Согласно существующей классификации правильных архимедовых тел для корректного отображения пространства для $n$ = 4 подходит только один высоко симметричный полуправильный выпуклый многогранник – *усечённый октаэдр* (рисунок 2, г). Трехмерное пространство можно считать частью модели четырехмерного пространства, однако следует отметить, что геометрия тел в $\square^4$ гораздо сложнее, чем в $\square^3$. В $\square^3$ многогранники ограничены двумерными многоугольниками (гранями), соответственно в $\square^4$ существуют 4-многогранники, ограниченные 3-многогранниками (рисунок 2, д) [1].

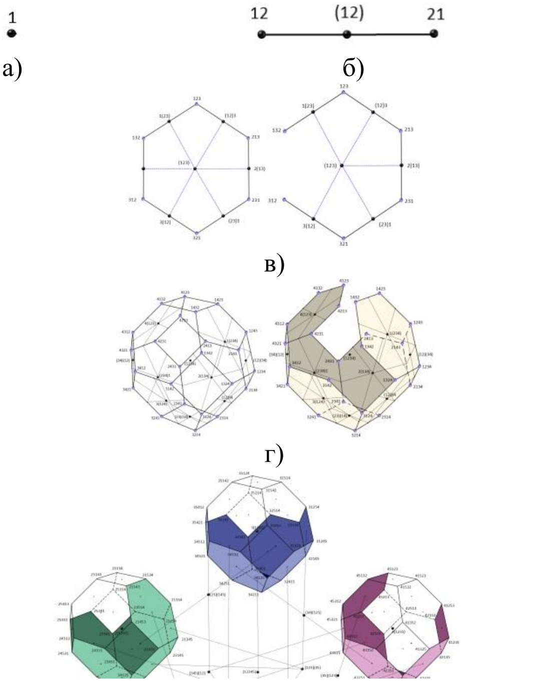


Рис. 2. Графическое представление пространств ранжирований и инранжирований для а) $n$ = 1 (а); $n$ = 2; в) $n$ = 3; г) $n$ = 4; д) $n$ = 5 (рис.усеченный)

**Список использованных источников**

1. Портал Википедия. Статья «Четырёхмерный многогранник».http://ru.wikipedia.org/?oldid=83639255
2. Циглер Г. М. Теория многогранников / Пер. с анг. под ред. Н. П. Долбилина. – М.: МЦНМО, 2014. – 568 с.
3. Худоногова Л. И. Комплексирование интервальных измерительных данных методом агрегирования предпочтений: диссертация на соискание ученой степени к.т.н. http://earchive.tpu.ru/handle/11683/43197
4. Портал Википедия. Статья «Пустое множество». http://ru.wikipedia.org/?oldid=88146288