

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ

Бондаренко Д.С.

Научный руководитель: д.ф.-м.н., доцент Шеремет М.А.
Томский государственный университет
e-mail: whiteink@bk.ru

Введение

Естественная конвекция ньютоновских и неньютоновских жидкостей в прямоугольных полостях реализуется в различных технических приложениях, таких как бурение нефтяных скважин, производство целлюлозной бумаги, пищевая промышленность и полимерная инженерия. Псевдопластические жидкости используются в компактных теплообменниках или электронных модулях в качестве охлаждающей среды.

Постановка задачи

В настоящей работе моделируются режимы естественной конвекции неньютоновской степенной жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой квадратной полости (рис. 1, где $L=H$).

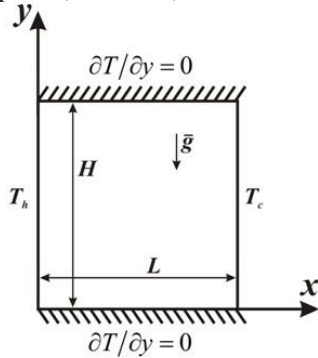


Рис 1. Область решения задачи

Дифференциальные уравнения, описывающие анализируемый процесс в приближении Буссинеска в размерных величинах «скорость-давление» имеют следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + g\beta(T - T_c) \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Для описания неньютоновского характера течения применяется степенной закон Оствальда-де-Вилла:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{eff} D_{ij} = 2K (2D_{kl} D_{kl})^{\frac{n-1}{2}} D_{ij} \quad (5)$$

Для описания гидродинамики внутри полости используются дифференциальные уравнения в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность»:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \left(\frac{Ra}{Pr} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left[\nabla^2 (\tilde{M} \Omega) + S_{\Omega} \right] + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{Ra \cdot Pr}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \quad (8)$$

где безразмерная эффективная вязкость \tilde{M} и дополнительная функция S_{Ω} имеют следующий вид:

$$\tilde{M} = \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (9)$$

$$S_{\Omega} = 2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{M}}{\partial X^2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \tilde{M}}{\partial Y^2} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial^2 \tilde{M}}{\partial X \partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] \quad (10)$$

Здесь X, Y – безразмерные декартовы координаты; U, V – безразмерные составляющие вектора скорости в проекции на оси; Θ – безразмерная температура; Ψ – безразмерная функция тока; Ω – безразмерная завихренность.

Критерии подобия системы: $Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu a}$ – число

Рэлея, $Ra = \frac{\nu}{a}$ – число Прандтля. Эффективный коэффициент вязкости μ_{eff} получен из соотношения вида:

$$\mu_{eff} = K \left(\sqrt{\frac{g\beta\Delta T}{L}} \right)^{n-1} \tilde{M} \quad (11)$$

Граничные условия для системы (6)–(8) в безразмерном виде:

$$X = 0, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = -0.5;$$

$$X = 1, 0 \leq Y \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 0.5;$$

$$Y = 0, 0 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0;$$

$$Y = 1, 0 \leq X \leq 1, \Psi = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0.$$

Полученные уравнения (6)–(8) с соответствующими начальными и граничными условиями решались методом конечных разностей на равномерной сетке 100*100. Дискретизация уравнения Пуассона (6) проводилась на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации.

Для численного решения уравнений (7) и (8) применялась локально-одномерная схема Самарского, позволяющая плоскую задачу свести к системе одномерных задач. Аппроксимация конвективных слагаемых проводилась на основе второй схемы с разностями против потока. Определение значений завихренности скорости и температуры в полученных разностных уравнениях производилось с помощью метода прогонки.

Результаты

Моделирование было проведено в широком диапазоне изменения показателя степени неньютоновской жидкости n . В следующей таблице приведены средние значения числа Нуссельта Nu в зависимости от показателя степени n .

Таблица 1. Значение числа Нуссельта в зависимости от показателя поведения жидкости

n	Полученные результаты	Данные [2]	Данные [3]
0.8	5.6201	5.5127	–
1.0	4.7662	4.6993	4.741
1.2	4.2227	4.1709	–
1.4	3.8464	3.7869	3.770

Анализ физического процесса проводился также на основе полученных распределений изолиний функции тока, приведенных на следующих рисунках.

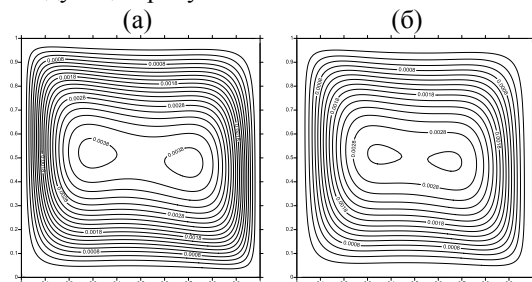


Рис. 2. Линии тока при $n=1.0$ (а), $n=1.4$ (б)

Из рис. 2. можно видеть конфигурацию изолиний функции тока в рассматриваемой полости. На левой стенке среда нагревается, становится легче и поднимается вверх. Достигая правой стенки, жидкость остывает, становится тяжелой и опускается вниз. Также можно наблюдать уменьшение скорости течения с увеличением показателя степени n , вследствие роста вязкости неньютоновской среды. Полученные распределения сравнивались с результатами других авторов (рис. 3).

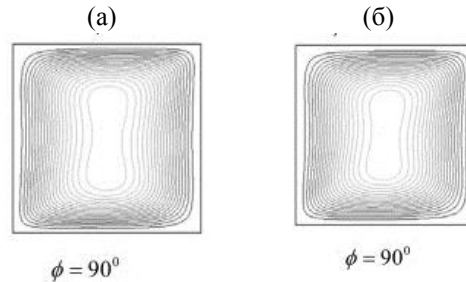


Рис. 3. Линии тока при $n=1.0$ (а), $n=1.4$ (б) [5]

Полученные результаты наглядно показывают, что разработанная вычислительная модель и численный алгоритм приводят к хорошему согласованию с данными других авторов.

Заключение

В рамках проведенных исследований установлено, что среднее число Нуссельта на нагреваемой стенке является нелинейной функцией показателя степенного закона неньютоновской жидкости. Увеличение показателя n приводит к снижению скорости циркуляции среды внутри полости, вследствие роста эффективной вязкости.

Список использованных источников

1. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
2. Khezzar L. Natural convection of power law fluids in inclined cavities / L. Khezzar, D. Siginer, I. Vinogradov // International Journal of Thermal Sciences. – 2012. – Vol. 53. – Pp. 8-17.
3. Sojoudi A. Steady natural convection of non-Newtonian power law fluid in a trapezoidal enclosure/ Sojoudi A., Saha S.C., Gu Y.T., Hossian M.A. // Advances in Mechanical Engineering. – 2003. – Vol. 5. Article ID 653 108. – P. 8.

Работа выполнена в рамках реализации проекта Российского научного фонда (соглашение № 17-79-20141).