СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.
2. Чуриков В.А. Экспоненты в дробном анализе целочисленных порядков на основе *d*-оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 16–20.
3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 28.06.2012 г.

УДК 517.3

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЛОКАЛЬНОМ ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрено дробное интегродифференцирование биномиальных разложений в локальном дробном анализе на основе d-оператора.

Ключевые слова:
Дробный анализ, d-оператор, биномиальное разложение.
Key words:
Fractional analysis, d-operator, binomial decomposition.

В стандартном анализе справедлива формула дифференцирования степенных рядов в окрестности центра $a\in\mathbb{R}$; $a=\text{const}<\infty$

$$d^{-1}x:\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x\pm a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}nb_n(x\pm a)^{n-1};b_n=\text{const}<\infty.$$

Эта формула часто используется в дробном анализе для дифференцирования нецелочисленных порядков, например [1].

Но при простом распространении данной формулы на случай дробных производных она уже не является справедливой. Покажем это на простом примере для второго члена разложения ряда.

Найдём производную нецелочисленного порядка s с помощью локального d-оператора [2], когда скобки не раскрываются, тогда по формуле можно записать

$$d^{-s}x:(x\pm a)^2=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-s+1)}(x\pm a)^{2-s}. \qquad (1)$$

Здесь $\Gamma(...)$ – гамма-функция Эйлера.

Найдём производную такого же порядка, но уже раскрыв скобки

$$d^{-s}x:(x\pm a)^2=d^{-s}x:(x^2+2ax+a^2)=$$
$$=\frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-s+1)}x^{2-s}\pm 2a\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-s+1)}x^{1-s}+$$
$$+a^2\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(-s+1)}x^{0-s}.$$

Полученные результаты не равны между собой, если $a\neq 0$. Последний полученный результат является правильным. Из этого следует, что в дробном анализе формула дифференцирования степенных рядов (1), обобщающая формулу стандартного анализа, не применима в дробном анализе.

Поэтому имеет смысл получить для дробного анализа общие формулы интегродифференцирования дробных порядков биномиальных разложений как для случаев с целочисленными порядками, так и с нецелочисленными порядками разложения.

Для целочисленных порядков m справедливо разложение

$$(x\pm a)^m=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm 1)^n\binom{m}{n}a^n x^{m-n}=$$
$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm 1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}x^{m-n};$$
$$\binom{m}{n}=\frac{n!}{m!(n-m)!};m,n\in\mathbb{N};\ m\geq n\geq 0.$$

Здесь $\binom{m}{n}$ – биномиальные коэффициенты, которые в общем случае вещественных коэффициентов будут

$$\binom{a}{b}=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b-a+1)};a,b\in\mathbb{R}.$$

Когда показатель степени $q>0$, $q\neq 1,2,3,...$ не является целочисленным, будет справедливо разложение в ряд, сходящийся для значений, когда выполняются условия: $-1<x\pm a<1$; $a\neq 0$

$$(x\pm a)^q=(\pm1)^q(a\pm x)^q=(\pm a)^q\left(1\pm\frac{x}{a}\right)^q=$$

$$=(\pm a)^q\left(1\pm q\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{q(q-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\ldots\right.$$

$$\left.+\ldots+(\pm1)^n\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\binom{q}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n=$$

$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(q-n+1)}\left(\frac{x}{a}\right)^n=$$

$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{(a)^n}\frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q-n+1)}x^n.$$

Коэффициент $(\pm a)^q$ распадается на множество неравных друг другу комплексных коэффициентов.

Если q рациональное число, и его можно представить в виде $q=r/p$; $r,p\in\mathbb{N}$ с условием, чтобы у r и p не было общих нетривиальных делителей, тогда в комплексной плоскости эти коэффициенты будут распадаться на два множества, для случаев с положительным и с отрицательным значением a

$$(\pm a)^q=\begin{cases}|a|^q(\exp(i\varphi_{a>0}))^q;\\|a|^q(\exp(i\varphi_{a<0}))^q.\end{cases}=\begin{cases}|a|^{\frac{r}{p}}(\exp(i\varphi_{a>0}))^{\frac{r}{p}};\\|a|^{\frac{r}{p}}(\exp(i\varphi_{a<0}))^{\frac{r}{p}}.\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}|a|^{\frac{r}{p}}\left(\exp\left(i\frac{r}{p}\varphi_{a>0}\right)\right);\\|a|^{\frac{r}{p}}\left(\exp\left(i\frac{r}{p}\varphi_{a<0}\right)\right).\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}|a|^{\frac{r}{p}}\exp\left(i2\pi l\frac{r}{p}\right);\ a>0;\\|a|^{\frac{r}{p}}\exp\left(i\pi\frac{r}{p}+i2\pi l\frac{r}{p}\right);\ a<0.\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}|a|^{\frac{r}{p}}\left(\cos\left(2\pi l\frac{r}{p}\right)+i\sin\left(2\pi l\frac{r}{p}\right)\right);\ a>0;\\|a|^{\frac{r}{p}}\left(\cos\left(\pi\frac{r}{p}+2\pi l\frac{r}{p}\right)+i\sin\left(\pi\frac{r}{p}+2\pi l\frac{r}{p}\right)\right);\ a<0.\end{cases}$$

Всего имеется p комплексных коэффициентов, которые задают разложение. Число $2\pi r$ будем называть *периодом коэффициентов*. Все коэффициенты будут повторяться при каждом прохождении углом φ периода коэффициентов.

В случае иррациональных порядков q число комплексных коэффициентов будет образовывать бесконечное счётное множество.

Коэффициент, соответствующий номеру l=0, будем называть *главным коэффициентом*.

Остальные p–1 комплексных коэффициентов будем называть *дополнительными коэффициентами* с соответствующими номерами l.

Если число q иррациональное, то имеется бесконечное счётное множество комплексных коэффициентов.

Ряды, у которых каждый коэффициент разложения имеет более одного значения, будем называть *многослойными рядами*. А общее число комплексных значений коэффициентов задают множество слоёв ряда.

Ряд с главным коэффициентом будем называть *главным рядом*.

Ряды с дополнительными коэффициентом будем называть *дополнительными рядами*, каждый из которых имеет свой номер, в соответствии с номером l.

Интегродифференцирование целочисленных порядков k биномиальных разложений с целочисленными порядками m будет

$$d^{\pm k}x:(x\pm a)^m=d^{\pm k}x:\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\binom{m}{n}x^{m-n}=$$

$$=d^{\pm k}x:\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n\frac{m!}{n!(m-n)!}a^n x^{m-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m-n\pm s+1)}x^{m-n\pm k}+C_\alpha(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{(m-n)!}{\Gamma(m-n\pm k+1)}x^{m-n\pm k}+C_\alpha(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n\pm k)!}x^{m-n\pm k}+C_\alpha(x);$$

$$m,n\in\mathbb{N};\ m\ge n\ge0;\ \alpha=\pm k;\ k\ge0;\ k=0,1,2,3,\ldots;$$

$$C_\alpha(x)=\begin{cases}0;\ \alpha\le0;\\C_\alpha(x)=\sum_{j=1}^{k-1}a_j x^j;\ a_j=\text{const};\ \alpha>0.\end{cases}$$

Здесь $C_\alpha(x)$– полиномы интегрирования, которые для оператора дифференцирования и для единичного оператора будут равны нулю. В случае оператора интегрирования полиномы интегрирования будут отличны от нуля.

Интегродифференцирование нецелочисленных порядков s биномиальных разложений с целочисленными порядками показателей степени m

$$d^{\pm s}x:(x\pm a)^m=d^{\pm s}x:\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\binom{m}{n}x^{m-n}=$$

$$=d^{\pm s}x:\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}x^{m-n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(m-n\pm s+1)}x^{m-n\pm s}+C_\alpha(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{(m-n)!}{\Gamma(m-n\pm s+1)}x^{m-n\pm s}+C_\alpha(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{n=m}(\pm1)^n a^n\frac{m!}{n!\Gamma(m-n\pm s+1)}x^{m-n\pm s}+C_\alpha(x);$$

$$\alpha=\pm s;\ s\ge0;\ s\ne1,2,3,4\ldots;$$

$$C_\alpha(x)=\begin{cases}0;\ \alpha\le0;\\C_\alpha(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_k x^{-j+s};\ a_j=\text{const};\ \alpha>0;\ \alpha\ne1,2,3,4\ldots\end{cases}$$

Формула интегродифференцирования целочисленных порядков k с нецелочисленными показателями q

$$d^{\pm k}x:(x\pm a)^q =$$
$$= d^{\pm k}x:\left((\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{(a)^n}\frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q-n+1)}x^n\right)=$$
$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{a^n}\frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q-n+1)}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n\pm k+1)}x^{n\pm k}+C_\alpha(x)=$$
$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{a^n}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-n+1)(n\pm k)!}x^{n\pm k}+C_\alpha(x);$$
$$m,n\in\mathbb{N};\ m\ge n\ge 0;\ \alpha=\pm k;\ k\ge 0;\ k=1,2,3,4...;$$
$$C_\alpha(x)=\begin{cases}0;\ \alpha\le 0;\\ C_\alpha(x)=\sum\limits_{j=1}^{j=k-1}a_jx^j;\ a_j=\text{const};\ \alpha>0.\end{cases}$$

Формула интегродифференцирования нецелочисленных порядков s с нецелочисленными показателями q

$$d^{\pm s}x:(x\pm a)^q =$$
$$= d^{\pm s}x:\left((\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{(a)^n}\frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q-n+1)}x^n\right)=$$
$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{a^n}\frac{\Gamma(q+1)}{n!\Gamma(q-n+1)}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n\pm s+1)}x^{n\pm s}+C_\alpha(x)=$$
$$=(\pm a)^q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{a^n}\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-n+1)\Gamma(n\pm s+1)}x^{n\pm s}+C_\alpha(x);$$
$$\alpha=\pm s;\ s\ge 0;\ s\ne 1,2,3,4...;$$
$$C_\alpha(x)=\begin{cases}0;\ \alpha\le 0;\\ C_\alpha(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_kx^{-j+s};\ a_j=\text{const};\ \alpha>0;\ \alpha\ne 1,2,3,4...\end{cases}$$

Из полученных двух последних выражений можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема. При дробном интегродифференцировании многослойного ряда биномиального разложения, имеющего p слоёв, получается ряд, который тоже имеет p слоёв.

Доказательство следует из того, что коэффициенты являются константами и в случае дробного интегродифференцирования выносятся за знак оператора, и их число остаётся неизменным.

Из теоремы следует, что число слоёв биномиального ряда является величиной инвариантной относительно дробного интегродифференцирования, и каждый слой является «самостоятельным» рядом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Чуриков В.А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.

Поступила 19.03.2012 г.