СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Академия, 2005. – 576 с.
3. Абезгауз Г.Г., Тронь А.П., Копёнкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчётам. – М.: Воениздат, 1970. – 536 с.
4. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
5. Башуров Б.П. Пути совершенствования технической эксплуатации вспомогательного оборудования энергетических установок судовых транспортных средств. – Новороссийск: НГМА, 2002. – 269 с.
6. Слободян С.М. Телевизионная диагностика лазерных пучков. – Барнаул: Азбука, 2006. – 224 с.
7. Петров В.В., Соболев В.И. Энтропийный подход к оценке качества систем автоматического регулирования // Доклады РАН. – 1996. – Т. 387. – № 4. – С. 799–801.
8. Берже П., Помо М., Видаль К. Порядок в хаосе. – М.: Мир, 1991. – 160 с.
9. Шустер Г. Детерминированный хаос / пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 242 с.
10. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: РХД, 2001. – 528 с.
11. Деева В.С., Романишина С.А.Устойчивость энтропийной живучести систем // Молодёжь и наука: Матер. VIII Всеросс. научно-техн. конф., посвящённой 155-летию со дня рождения К.Э. Циолковского. – Красноярск, 19–27 апреля 2012. – Красноярск: Сибирский федеральный университет (СФУ), 2012. – С. 120–123.

Поступила 27.03.2012 г.

УДК 621.313:534

ДЕСТРУКЦИЯ СКОЛЬЗЯЩЕГО ЛАМЕЛЬНОГО КОНТАКТА

В.С. Деева, С.М. Слободян

Томский политехнический университет
E-mail: veradee@mail.ru; sms_46@ngs.ru

Предложен вероятностный подход к описанию динамики разрушения контактной пары тел в процессе скольжения одного по бесконечной периодической поверхности другого тела. Проведен анализ возможности решения проблемы точной оценки живучести щёток электрических машин. Предложена марковская модель износа щёток при скольжении по ламели коллектора машин.

***Ключевые слова**:*
Стохастическая динамика, скользящий контакт, ламель, деструкция.
***Key words**:*
Stochastic dynamics, sliding contact, lamella collector, destruction.

Введение

Деструкция – разрушение тонкого слоя соприкасающихся поверхностей в процессе контактного взаимодействия разной или соизмеримой упругости твердых тел, называемая часто износом, обусловлена если не в основном, то в наибольшей степени физико-механическими факторами различной природы.

Как показано в [1–7], именно эмиссия фракций деструкции (процесса разрушения тонких поверхностных слоёв вступающих в контакт тел) является причинно-следственным отражением износа – изменения объёма подвижных тел в процессе непосредственного контакта, вызываемого в большей степени движением скольжения поверхности одного тела по соприкасающейся с ней поверхностью другого тела (трением скольжения) и в меньшей степени – процессом качения элементов одной поверхности по поверхности другого тела (трением качения).

Для процесса непосредственного контактного скольжения характерно то, что области структур поверхностных слоёв тел, находящихся в контактном взаимодействии, в течение всего процесса каждый раз испытывают контактное прямое соприкосновение со структурно разными областями взаимно видоизменяющегося ввиду силовой механической деструкции двумерного поля поверхностей обоих подвижных тел. Пространственные изменения двумерной структуры поверхностных слоёв тел вызваны в большей степени взаимным срезанием (ломкой выступов) неравномерностей поверхностей тел в контактном пространстве.

В отличие от скольжения как механического вида относительного движения тел, процессу качения поверхности одного подвижного тела по поверхности другого, в частном случае неподвижного, в большей степени присущи объёмные деформационные явления (упругая и пластическая деформации) и в меньшей степени – явления среза и выкрашивания агломератов в виде отдельных фракций. Данные фракции отличаются по своим размерам и приводят в динамике процесса своего перемещения в направлении вектора скольжения к взаимному дроблению неравномерностей многомерной структуры поверхностных слоёв обоих тел.

В общем случае в зависимости от структуры поверхностных слоёв контактно взаимодействующих тел в контактном пространстве на практике, в реальных условиях, при силовом контактном динамическом взаимодействии материальных тел присутствуют оба процесса с разной степенью приоритета и превалирования по рангу влияния и веса деструкции. Ранее [5–7] были рассмотрены особенности контактного динамического взаимодействия элемента контактной пары скользящего по бесконечной протяжённости сплошной шероховатой поверхности второго элемента. На практике подобных вариантов скользящего контактного взаимодействия (контактных пар), особенно в электро- и энергомашиностроении, не говоря уже о машиностроении, весьма много: «электрическая щётка – контактное кольцо» в электрогенераторах и электродвигателях, «метаемое тело – направляющие шины – салазки» при электромагнитном метании тел, «токоведущий провод – направляющая скоба» в троллее и т. д.

Однако в той же области электро- и энергомашиностроения существуют и другие варианты подвижных устройств передачи энергии тока, в основе функционирования которых лежит принцип скользящего контактного взаимодействия двух токопроводящих пар элементов. Например, коллекторные электрические и электромеханические преобразователи, машины и аппараты, принцип функционирования которых основан на применении скользящего контактного взаимодействия двух токопроводящих элементов – контактной пары, один из элементов которой представляет собой профилированную периодической структуры, контактную в первом приближении, кольцевую бесконечной протяжённости поверхность. Такой род контактной поверхности в электрических машинах и аппаратах порождает ряд проблем, обусловленных наличием периодического прерывания передачи энергии тока (коммутации) в процессе скользящего перехода контактного элемента от одной элементарной ячейки поверхности (ламели) периодической структуры (коллектора) к другой, смежной с ней. Возникающий при этом ряд проблем называют проблемами коммутации, которые подробно рассмотрены в [2–4]. Наибольшее внимание исследователей привлекает проблема повышения ресурсных характеристик и коммутационной надёжности – основных и очень важных эксплуатационных характеристик коллекторных электрических и электромеханических аппаратов, в сильной степени определяемых состоянием износа щёточно-коллекторного узла токосъёма. Данная проблема актуальна до сих пор [2–7].

Краткий анализ коммутации энергии узлом токосъёма

Периодический процесс коммутации щёточным узлом скользящего токосъёма коллекторной цепи передачи тока обусловлен [1–4] принципом работы коллекторных электрических машин и аппаратов, например генераторов. Так же как и в любой динамической системе с временной многофакторной вариацией поля параметров, изменение одного или симбиоз нескольких наиболее чувствительных параметров может заметно повлиять на стабильность периодического процесса прерываемой передачи тока и привести при определённых условиях к росту коммутационной напряжённости и развитию детерминированной хаотической неустойчивости процесса транспортировки энергии – передачи тока от одного элемента к другому скользящим по поверхности коллектора щёточным контактом. Скользящий по периодической поверхности коллектора контактный элемент – щётка – это важный фактор существенного влияния на изменение тока не только в коммутируемой секции, но и в контуре коммутации. Требование высокой коммутационной устойчивости – один из аспектов, определяющих постоянное внимание к проблеме повышения надёжности и ресурса коллекторных электрических машин. Особенно важным для достижения высокой коммутационной устойчивости является обеспечение непрерывности щёточного контакта при передаче тока узлом скользящего токосъёма в условиях динамической неустойчивости профиля контактной поверхности коллектора и нестабильности параметров ряда других узлов. Устойчивость процесса коммутации – фактор «безыскровой» работы коллекторных электрических машин и аппаратов.

Для краткого анализа явлений динамика процесса коммутации тока в электрических машинах этого типа в достаточно общем случае может быть представлена видом нелинейного дифференциального уравнения первого порядка [2, 3]:

$$L\frac{di}{dt}+\sum_{k=1}M_k\frac{di_k}{dt}=\delta u_{\text{щ}}(J)-i(t)R_s-e_k(t),$$

где $e_L=-L\dfrac{di}{dt}$ и $e_k=-\sum\limits_{k=1}M_k\dfrac{di_k}{dt}$ – э.д.с. самоиндукции; $\delta u_{\text{щ}}(J)=[\Delta u_{\text{н}}(J)-\Delta u_{\text{с}}(J)]$ – разность значений переходных падений напряжений на пространственном интервале размера щётки (между передним набегающим $\Delta u_{\text{н}}(J)$ и задним сбегающим $\Delta u_{\text{с}}(J)$ краями щётки); $i(t)$ – коммутируемый ток; R_s – сопротивление коммутируемой секции; $e_k(t)$ – коммутирующая э.д.с., наводимая в секции (при её взаимодействии с магнитным полем) в зоне коммутации. Эта система уравнений используется практически всеми исследователями [2–4] как основа изучения процесса коммутации.

Идеальной коммутации соответствует наилучшая коммутационная устойчивость машин, когда $di/dt=0$ и для предельно малого размера щётки (игольчатый электрод), когда $\Delta u_{\text{н}}(J)\equiv\Delta u_{\text{с}}(J)$. Тогда нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка процесса коммутации вырождается в тип уравнения закона Ома: $i(t)R_s=e_k(t)$.

Если первое условие – достижение высокой коммутационной устойчивости – считать целью, то второе (минимизация $\delta u_{щ}(J)$ – разности переходных падений напряжений на щётке, а в идеале обеспечение соотношения $\Delta u_{н}(J)=\Delta u_{с}(J)$) является фактором достижения этой цели.

В [2–4] показано, что наиболее сложным для учёта в уравнениях контура коммутации коллекторных электрических машин является случайный характер распределения электрической проводимости в контактном слое. Так же как и при контакте щётки, скользящей по непрерывной поверхности контактного кольца [5–7], в зависимости от особенностей структуры контактно сопрягаемых поверхностей скользящих относительно друг друга тел, в контактном пространстве щёточного узла токосъёма могут возникать разные виды контактного взаимодействия: прямой контакт неравномерностей поверхностей соприкасающихся элементов тел; контакт поверхностей через слой смеси фракций деструкции (разрушения) элементов поверхностей этих же тел; совместное действие первых двух факторов (симбиоз обоих приведённых случаев) – частичное наличие прямого непосредственного точечного контакта выступами поверхностей тел с присутствием частичного образования проводящих ток областей через слой фракций деструкции поверхности тел. Во всех перечисленных типах часть контактного пространства занимают области полного отсутствия контакта, занятые газом окружающей среды (воздух). Поэтому контактные пространства щётки, скользящей по составному (ламельному) и сплошному кольцу коллектора, существенно отличаются, но и то и другое с позиции динамического взаимодействия является вероятностной динамической системой. Характеристики такой динамической системы определены физико-механическими свойствами структур поверхностных слоёв и динамикой контакта тел, естественно с учётом электромагнитного влияния транспортируемой энергии.

Для повышения точности оценки состояния щётки, скользящей по ламельной периодической контактной поверхности коллектора, лучшего учёта влияния фактора контактной периодичности скольжения и более точного приближения оценок реальной нестабильности периодического процесса коммутации тока в ламельном коллекторном токосъёме ниже на основе марковской модели контактного динамического взаимодействия элементов скользящего токосъёма проведён анализ вероятностной динамики контактного пространства, образованного скользящей по ламелям коллектора контактной парой «щётка–коллектор», позволяющей оценивать в реальном времени состояние и живучесть щёточного узла периодического коллекторного токосъёма машин.

Сущность модели локального контактного пространства на ламели

В контактном процессе одного элемента, скользящего по периодической ламельной структуре, со вторым элементом узла токосъёма можно выделить четыре последовательно сменяющих друг друга состояния механического и электрического контакта: разомкнутое, замыкание, замкнутое, размыкание. Практически на всех стадиях смены состояния происходит механический износ поверхностей обоих элементов контактной пары, что сказывается на живучести контакта, определяемой долговечностью существования объёма элементов контактной пары. Взаимодействие тел приводит к сложным физико-механическим процессам, заметно изменяющих идеализацию периодического контактного соединения пары элементов в области щёточного токосъёма. Скользящее взаимодействие элементов контакта влечет, как правило, изменение их свойств ввиду фрикционного износа. Это заметно влияет на физику и механику процесса контактного взаимодействия, в том числе на состояние поверхностей, надёжности работы и живучести элементов контакта. Живучесть элементов контактной пары – мера длительной и надежной работы контакта в целом. С позиций живучести наиболее тяжелые условия существуют для щёточного узла как наиболее подверженного деструкции, хотя и неподвижного элемента электрического контакта, выполняющего размыкание и замыкание электрической цепи, в которой протекает сильный ток. При работе таких контактов на стадиях «замыкание–скольжение–размыкание» образуются электрические дуги с температурой, приводящей к изменению упругих свойств материала элементов контакта в сторону усиления пластичности материала, частичного плавления и изменения структуры контактирующих поверхностей. Контроль и диагностика живучести такой контактной пары актуальны для оценки состояния широкого класса коллекторных электрических машин и аппаратов.

Рассматриваемая ниже математическая модель аналитического описания динамики ламельно-щёточного, по временной последовательности – периодического контакта коллекторных электрических машин и аппаратов ориентирована на компьютерное и имитационное моделирование контактного пространства с дискретными фракциями. Сущность представляемой ниже математической модели контактного пространства – математический и имитационный алгоритм, каждая компьютерная реализация которого – адекватная имитация совокупности процессов эмиссии фракций износа в течение реального времени функционирования моделируемого контактного пространства. Содержание и связь событий в модели, их временная динамика соответствуют содержанию и последовательности протекания процессов в реальной контактной системе. При этом предполагается, что на каждое вероятностное событие – эмиссию фракций разрушения области поверхности любого из элементов контактной пары – модель реагирует мгновенно (скачком) в некоторый момент времени.

Контактные пространства отличает сложность и разнообразие способов взаимодействия поверхностей, структуры элементов контактной пары алгоритмов протекания процессов. Выбор параметров контактного пространства в процессе оптимизации щёточного узла скользящего токосъёма является трудной задачей из-за отсутствия математического аппарата для их анализа.

Модель контактного пространства на основе представлений системного подхода можно представить совокупностью формализованных описаний процессов, каждое из которых представляет собой совместное действие (симбиоз) взаимосвязанных алгоритмов, состоящий из операторов и описательной части. Пространственные и временные изменения структуры и свойств реального контактного пространства элементов контактной пары скользящего токосъёма представлены в модели совокупным поведением дискретных процессов, совмещённых в непрерывно меняющемся условном времени. Основой лаконичного описания функционирования контактного пространства служит аппарат процессов Маркова – эквивалент соответствующих реальных процессов.

Структура локального ламельного контактного пространства

Анализ физики и механики явлений в щёточном контакте электрических машин показывает, что для общности анализа динамики областей соприкосновения поверхностей элементов контактной пары «щётка – ламель коллектора», как и при скольжении на сплошном бесконечной протяжённости контактном кольце [5–7], можно принять деление на два логических множества областей контакта: проводящих и не проводящих ток. Случайный процесс, основанный [8] на показательном законе описания событий, может быть применен для исследования физико-механических явлений, протекающих в контактном пространстве любого вида процессов динамического взаимодействия сред и тел.

Одну из областей контактного слоя (область основного контакта), частично образованную прямым соприкосновением проводящих ток неравномерностей поверхности элементов контактной пары, будем считать полным контактным множеством. Другая часть этого множества обусловлена контактом поверхностей этих элементов через буферную проводящую ток прослойку, образованную фракциями разрушения разной дисперсности, но в большей части частицами износа обоих элементов пары, в том числе контактирующими с выступами неравномерностей поверхности любого из элементов контактной пары. Вторая область – пространство примыкающих друг к другу областей воздушного зазора (т. е. областей, в которых контакт поверхностей элементов пары отсутствует). Зона отсутствия контакта – пустое множество.

Контактное пространство пары «щётка–ламель» в течение времени перекрытия их контактных поверхностей может находиться в любом ij-м конечном (счётном) или бесконечном числе состояний. Примем, что m есть максимальное в среднем число состояний, которое определяется минимальным дисперсным размером отторгаемых контактной парой дискретных фракций деструкции $V_{дф}$ и объёмом наименьшего элемента. Для элемента прямоугольной формы $V_э=a_эb_эc_э$ (произведение размеров):

$$m = \sup\{V_э / V_{дф}\} = (a_эb_эc_э)\big/\langle V_э\rangle. \qquad (1)$$

Здесь скобки $\langle ... \rangle$ – усреднение по множеству размеров фракций разрушения элементов контактной пары. При неправильной геометрии фракций как агломерата деструкции средний размер фракции определится интегральной формулой вычисления объёма.

Обоснование марковского подхода

Эмиссия дискретных фракций деструкции (износа) – отрыв от объёма среды плотноупакованной структуры тела одного из элементов контактной пары скользящего токосъёма в результате скользящего взаимодействия слоёв их поверхностей, приводящий к переходу контактного множества из одного состояния в другое, – происходит не в фиксированные, а в произвольные моменты времени. Это и определяет стохастичность траектории изменения пространственно-временного состояния контактного пространства, условий передачи энергии в контактном слое «щётка–ламель коллектора» и вероятностный характер процесса коммутации тока узлом скользящего токосъёма.

Случайный процесс скачкообразного изменения состояния контактного пространства и множества на действительной оси непрерывного времени будет, следуя классическому понятию [8], марковским, если для любого момента времени контактного взаимодействия пары элементов токосъёма условные вероятности всех состояний контактного множества $\mathbf{C}$ в будущем (при $t>t_0$) зависит только от того, в каком состоянии c_j находится контактное множество $\mathbf{C}$ в настоящем (при $t=t_0$), и не зависит от того, через какие состояния c_j оно прошло на интервале $t<t_0$, когда и каким путём контактное множество $\mathbf{C}$ пришло в настоящее состояние. Кратко – будущее марковского контактного множества зависит от прошлого только через его настоящее.

Привлекательность аппарата теории марковских процессов в анализе «живучести» скользящего токосъёма основана на сравнительной простоте математического описания обобщённого поведения состояния контактного взаимодействия тел. Следует понимать, что описание динамики поведения контактного множества, как и обобщённое отождествление стохастичности контактного процесса в «чистом виде» с марковским, является в большей или меньшей степени некоторым, хорошо совпадающим с практикой, асимптотическим приближением к реальному. При марковском анализе удобно принять, что переходы – скачки изменения – контактного множества $\mathbf{C}$ обусловлены эмиссией фракций разрушения элементов тел в контактное пространство. Это подтверждается экспериментальными данными [1–4].

Следуя теории марковских случайных процессов, для контактного пространства с дискретными состояниями и непрерывным временем изменения состояний примем, что поток фракций износа элементов контактной пары (входит в «политуру»), переводящий контактное множество из одного состояния в другое, является пуассоновским не всегда, а значит, не обязательно стационарным, установившимся. Плотность его распределения описывается в общем случае показательным законом, в простейшем случае [8] – законом Пуассона с характерным отсутствием последействия. Именно это обстоятельство и позволяет при оценке настоящего состояния контактного множества c_i в момент t не выяснять, как и когда оно оказалось в этом состоянии. Переход **С** из состояния c_i в c_j происходит под воздействием пуассоновского потока эмиссии фракций разрушения с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Первая же фракция разрушения контактной пары (щётки или коллектора), пополнившая контактное множество или, наоборот, покинувшая его пространство, скачком изменяет состояние c_i множества на c_j. Ветвь графа смены состояний контактного множества **С** имеет вид $C_i \overset{\lambda_{ij}(t)}{\Longrightarrow} C_j$, где стрелка с указанием интенсивности потока фракций показывает направление смены состояния.

Анализ одиночного ламельного контактного цикла

Рассмотрим физический процесс контактного разрушения плотно упакованной щётки, содержащей m фракций (определяется формулой (1)), при скольжении по периодически структурированной поверхности ламелям коллектора. Процесс контактного взаимодействия щётки с любой ламелью коллектора можно анализировать при следующих предположениях.

Интенсивность простейшего пуассоновского потока фракций деструкции в контактное пространство «щётка–коллектор» равна λ, где $\lambda = \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij}$ – const на всех интервалах времени ламельного контакта. Время контакта щётки с каждой ламелью коллектора на уровне среднего значения (математическое ожидание) определяется режимом работы ($n_{об}$ – числом оборотов в минуту) и конструктивными особенностями ($n_{лк}$ – числом ламелей коллектора; $p_{пп}$ – числом пар полюсов электрической машины):

$$\overline{T}_{лi} = 60/(p_{пп} n_{об} n_{лк}).$$

Если принять $\overline{T}_{ж}$ – среднюю длительность «жизни» щётки (паспортное её значение устанавливается производителем), – то среднее число фракций, эмитируемых за время контакта щётки с каждой ламелью при средней интенсивности потока эмиссии фракций $\overline{\lambda}=m/\overline{T}_{ж}$, составит:

$$\overline{\lambda}_i = m\overline{T}_{лi} / \overline{T}_{ж} = \overline{\lambda}\,\overline{T}_{лi}.$$

Итак, из полного объёма фракций (1) с интенсивностью стационарного пуассоновского потока λ любая дискретная фракция может попадать в контактное пространство «щётка–ламель» и участвовать в изменении состояния полного контактного множества. Время пребывания фракции в полном контактном множестве для приближения Пуассона распределено по показательному закону с параметром γ, а время её аннигиляции (перехода в пустое множество, разрушения до малых размеров, удаления из контактного пространства, возврата за счёт адгезии в структуру щётки) или покидания – с параметром μ. Траекторию смены состояний контактного пространства в интервале единичного цикла взаимодействия щётки с ламелью коллектора можно представить в виде простейшего кольцевого графа.

Определим вероятности состояний контактного пространства (полного контактного множества), если в начальный момент оно уже существовало с вероятностью 1, то есть контакт щётки с коллектором был обеспечен. При этом примем: C_1 – начальное состояние контактного множества (контакт пары «щётка–коллектор» обеспечен); C_2 – произошла эмиссия (или принудительная подача) в контактное пространство дискретных фракций с интенсивностью λ, формирующих контактное множество; C_3 – раздробленные (до пренебрежения учёта их участия) фракции за счёт адгезии, принудительной подачи или заменившие их транзитные фракции с интенсивностью μ стремятся восстановить начальное состояние. В соответствии с логикой изменения фрактального множества, вероятности изменения дискретных состояний ламельного контактного множества на оси непрерывного времени отразит следующая система дифференциальных уравнений Колмогорова как однородного марковского процесса [8]:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = \mu p_3(t) - \lambda p_1(t); \\ \dot{p}_2(t) = \lambda p_1(t) - \gamma p_2(t); \\ \dot{p}_3(t) = \gamma p_2(t) - \mu p_3(t) \end{cases} \tag{2}$$

с начальными условиями: $p_1(0)=1$; $p_2(0)=p_3(0)=0$. Тогда, с учётом несовместности действия разных траекторий фракций, справедливо условие нормировки – равенства единице полной вероятности всех событий $p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)=1$ или

$$\sum_{i=1}^{3} p_i(t) = 1 \quad (0 \le p_i(t) \le 1; \; t \ge 0), \tag{3}$$

которым можно заменить любое из уравнений системы (2).

Система дифференциальных уравнений вероятности состояний контактного множества ламельно-щёточного пространства, отражающая принятую постановку задачи, отображаемой графом состояний этого пространства, согласно правилам описания динамики смены состояний, изложенных в [8], с соблюдением условия нормировки (3) и начальных условий $\{p_1(0)=1; p_2(0)=p_3(0)=0\}$ примет вид:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot p_1(t)=\mu p_3(t)-\lambda p_1(t); \\ \dot p_2(t)=\lambda p_1(t)-\gamma p_2(t); \\ \dot p_3(t)=\gamma p_2(t)-\mu p_3(t) \end{array}\right\}. \quad (4)$$

Используя свойства преобразования Лапласа при его применении для решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова путём замены изображения вероятности состояния $p_i(t)$ на функцию $\pi_i(x)$, с учётом которой изображение условия (3) меняет вид $\sum_{i=1}^{n}\pi_i(x)=x^{-1}$, система дифференциальных (4) вырождается [8] в систему алгебраических уравнений оценки вероятности состояний:

$$\left\{\begin{array}{l} x\pi_2(x)=\lambda\pi_1(x)-\gamma\pi_2(x); \\ x\pi_3(x)=\gamma\pi_2(x)-\mu\pi_3(x); \quad \sum_{i=1}^{3}\pi_i(x)=x^{-1} \end{array}\right\}$$

с решением

$$\pi_2(x)=x^{-1}[\lambda(x+\mu)]/p(x);$$
$$\pi_3(x)=\gamma\pi_2(x)/(x+\mu),$$

где

$$p(x)=x^2+Ax+B=(x-x_1)(x-x_2) \quad (5)$$

и ($A=\lambda+\mu+\gamma$; $B=\lambda\mu+\lambda\gamma+\gamma\mu$) – квадратное уравнение с дискриминантом, при $p(x)=0$ равным $\Delta=B-A^2/4=0{,}25(4B-A^2)$. Для положительных значений параметров пуассоновского потока фракций ($\lambda>0; \mu>0; \gamma>0$) поведение дискриминанта говорит о возможности принятия им любых значений на числовой оси $-\infty...+\infty$: $\Delta\geq0$, $\Delta=0$, $\Delta\leq0$.

Следуя [8], для уравнения (5) с отрицательным дискриминантом $\Delta\leq0$, приводящим к двум разным отрицательным корням $x_1x_2=B$ и $x_1+x_2=-A$, $x_{1,2}=(-A\pm\sqrt{A^2-4B})/2$, можно получить соотношения для оценки вероятностей состояния множества контактного пространства:

$$p_1(t)=1-p_2(t)-p_3(t);$$
$$p_2(t)=\lambda[(e^{x_1t}-e^{x_2t})/(x_1-x_2)]+$$
$$+\frac{\lambda\mu}{x_1x_2}[1+(x_2e^{x_1t}-x_1e^{x_2t})/(x_1-x_2)];$$
$$p_3(t)=\frac{\lambda\mu}{x_1x_2}[1+(x_2e^{x_1t}-x_1e^{x_2t})/(x_1-x_2)].$$

При $t\to\infty$ ламельное контактное пространство коллектора в своём подобии асимптотически приближается к свойствам контактного множества на сплошном контактном кольце. Для примера, при $\mu=\gamma=1$: $\lambda=3$ имеем: $p_2(t)=p_3(t)=3/7$, $p_1(t)=1/7$ или

$$\lim_{t\to\infty}p_1(t)=p_1=1/7,\ \lim_{t\to\infty}p_2(t)=p_2=3/7,$$
$$\lim_{t\to\infty}p_3(t)=p_3=3/7.$$

Другие ситуации: $\lambda=0$, когда $p_2(t)=p_3(t)=0$, $p_1(t)=1$, эмиссии и износа нет; щётка в исходном состоянии; $\mu=0$ – фракции не возвращаются в полное множество: $p_3(t)=0$; $p_1(t)=1-p_2(t)$; $\gamma=0$ – фракция без задержки вылетает из контактного множества.

Эргодичность ламельного контактного пространства

Контактное пространство на ламели коллектора представляет собой простейшее эргодическое контактное пространство. Все потоки фракций, переводящих пространство из одного состояния в другое, – пуассоновские (простейшие), а все случайные состояния являются транзитивными.

Следуя этому определению, для обобщённой форме записи системы однородных вероятностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$p_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}p_i\right)/\lambda_j;\ \lambda_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}\quad (i,j=1,\ 2,\ ...,\ n),$$

считая контактное множество на ламели простейшим, эргодическим, получим простую систему оценки предельных вероятностей финального состояния ламельного контактного пространства: $\{p_1=\mu p_3/\lambda;\ p_2=\lambda p_1/\gamma;\ p_3=\gamma p_1/\mu\}$, или, с условием нормировки,

$$\{p_1=\mu p_3/\lambda;\ \ p_2=\lambda p_1/\gamma;\ \ p_1+p_2+p_3=1\}. \quad (6)$$

Из (6) следует $p_3=\lambda p_1/\mu$ и условие нормировки получает вид: $p_1+(\lambda/\gamma)p_1+(\lambda/\mu)p_1=1$ или $p_1[(\gamma\mu+\lambda\mu+\lambda\gamma)/\gamma\mu]=1$. Для $\mu=\gamma=1$: $\lambda=1$ имеем $p_1=p_2=p_3=1/3$; $\lambda=3$: $p_1=1/7$, $p_2=p_3=3/7$; $\lambda=5$: $p_1=1/11$; $p_2=p_3=5/11$ и т. д. Равенство значений траектории процессов, отражаемых вероятностями p_2 и p_3, при изменении интенсивности эмиссии λ означает их весьма близкий характер поведения. Иначе говоря, пределы вероятностей состояния контактного ламельного пространства при $t\to\infty$ и получаемые предельные вероятности финального состояния контактного пространства аутентичны.

Смысл понятия предельной вероятности ламельного пространства

Предельная вероятность состояния p_i при марковском формировании ламельного контактного пространства с дискретными состояниями и непрерывным временем имеет смысл, аналогичный предельным вероятностям для однородной цепи Маркова:

$$p_i=\bar t_i/\bar\tau_i, \quad (7)$$

где $\bar t_i$ – среднее (математическое ожидание) время однократного пребывания контактного пространства **C** в состоянии c_i; $\bar t_i$ – среднее время цикла траектории блуждания контактного множества **C** относительно состояния c_i. Если учесть время пребывания **C** вне c_i, то выражение (7) приобретёт вид: $p_i=\bar t_i/(\bar t_i+\bar\tau_{\neq c_i})$, где $\bar\tau_{\neq c_i}$ – среднее время однократного пребывания контактного множества **C** вне состояния c_i. Другими словами, предельная вероятность p_i

есть отношение времени пребывания простейшего эргодического контактного множества **С** в состоянии c_i к сумме математических ожиданий времён $\bar{t}_i$ и $\bar{\tau}_{\neq c_i}$. Устанавливает их взаимосвязь следующая система:

$$\{\bar{t}_i = \bar{\tau}_{\neq c_i} p_i / (1 - p_i);\ \bar{\tau}_{\neq c_i} = \bar{t}_i (1 - p_i) / p_i\}.$$

Иначе, пуассоновский однородный поток фракций, переводящий контактное множество **С** не из конечного состояния c_i, является простейшим с интенсивностью λ_i. При этом интервал времени $\bar{t}_i$ от любой точки на оси времени до ближайшего акта смены состояния пространства под действием простейшего потока фракций распределён по показательному закону с параметром, равным интенсивности этого потока: $\bar{t}_i = \lambda_i^{-1}$.

Выводы

Определена статистическая марковская аналогия подобия динамического процесса разрушения щёточного элемента, скользящего по периодической ламельной структуре, процессу скольжения щётки на сплошной, бесконечной протяжённости, поверхности контактного кольца. Разработана аналитическая модель динамических случайных процессов в скользящем по поверхности периодической структуры – ламелям коллектора – щёточном контакте, учитывающая совокупное влияние случайных факторов в параметрах дискретного потока эмиссии фракций деструкции и позволяющая исследовать основные характеристики и оценивать состояние контактного узла токосъёма вероятностными методами и моделированием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мышкин Н.К., Кончиц В.В., Браунович М. Электрические контакты. – М.: Издательская группа URSS, 2008. – 560 с.
2. Лившиц П.С. Скользящий контакт электрических машин. – М.: Энергия, 1974. – 272 с.
3. Копылов И.П. Электрические машины. – М.: Логос, 2000. – 607 с.
4. Плохов И.В. Комплексная диагностика и прогнозирование технического состояния узлов скользящего токосъёма турбогенераторов: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – СПб., 2001. – 36 с.
5. Слободян М.С., Слободян С.М. Модель динамики электрического контакта // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. – 2010. – № 2. – С. 42–47.
6. Слободян М.С., Слободян С.М. Деструкция тел скользящего контакта // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 20–25.
7. Деева В.С., Слободян С.М. Физическая модель разрушения скользящего токосъёма // Инженерная физика. – 2011. – № 6. – С. 32–37.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Академия, 2009. – 384 с.

Поступила 18.01.2013 г.

УДК 535.36

ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОИСТОЙ ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ С ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Б.В. Горячев, С.Б. Могильницкий

Томский политехнический университет
E-mail: msb@tpu.ru

Рассмотрен перенос излучения в двухслойной дисперсной среде с отражающей поверхностью. Получены аналитические выражения для определения характеристик радиационного баланса. Показано, что приземный слой атмосферы даже при малой величине оптической плотности и ее слабом изменении оказывает существенное влияние на отражательную способность системы «двухслойная среда – отражающая поверхность» при всех значениях коэффициента отражения подстилающей поверхности. Установлено, что увеличение оптической плотности приземного слоя атмосферы с поглощением приводит к почти полной независимости поглощательной способности системы «двухслойная среда – отражающая поверхность» от коэффициента отражения подстилающей поверхности.

Ключевые слова:
Радиация, баланс, дисперсная среда, слой, отражающая поверхность.
Key words:
Radiation, balance, dispersion media, layer, reflective surface.

Изучение радиационного баланса планетных атмосфер проводится на основе методов теории переноса излучения и численных методов [1, 2]. При проведении исследований используются различные модели атмосферы с подстилающей поверхностью [3–5]. Точность получаемых результатов зависит от точности используемых приближений и учета всех эффектов, существенно влияющих на результат, например эффекта пространственной ограниченности дисперсной среды [6, 7].