распределения позволяет определить точность настройки фильтра, выявить фильтры, работающие с низкой эффективностью, произвести их подстройку.

Авторы благодарят проф. Ушакова В.Я. за полезные советы, инженеров Регионального центра ресурсосбережения ЭНИН ТПУ Боровикова В.С. и Волкова М.В. за предоставленные исходные данные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аррилага Дж., Брэдли Д., Боджер П. Гармоники в электрических системах / пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 320 с., ил.
2. Боровиков В.С., Волков М.В., Иванов В.В., Литвак В.В., Мельников В.А., Погонин А.В., Харлов Н.Н. Опыт корпоративного обследования электрических сетей Сибири. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 228 с.
3. Жежеленко И.В. Высшие гармоники в системах электроснабжения промпредприятий. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 272 с.
4. Стефанов К.С. Техника высоких напряжений. – Л.: Энергия. Ленингр. отд-ние, 1967. – 496 с.
5. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. – 488 с.
6. Базуткин В.В., Дмоховская Л.Ф. Расчеты переходных процессов и перенапряжений. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.

Поступила 28.01.2013 г.

УДК 621.3.011.7

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А.А. Сытник, К.Н. Ключка, С.Ю. Протасов

Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы, Украина
E-mail: chdtu-cherkasy@ukr.net

Показана возможность идентификации параметров электрических цепей с применением интегральных уравнений Вольтерры второго рода. Предположено, что использование интегральных динамических моделей электрических цепей в ряде случаев позволяет получать более точный результат по сравнению с традиционными методами, основанными на применении дифференциальных уравнений. Показано, что предложенный метод может быть эффективно использован при решении задач параметрической идентификации электрических цепей, при измерении входных и выходных сигналов на фоне высокочастотных помех, в том числе и шумовых.

Ключевые слова:
Электрические цепи, идентификация параметров, интегральные динамические модели.
Key words:
Electrical circuits, identification of parameters, integral dynamic models.

Введение

Под идентификацией в общей теории систем понимают определение вида и количественных характеристик операторов, описывающих данную систему. При этом предусматривается, что на систему можно подавать определенные тестовые воздействия и измерять отклики на такие воздействия. Полученная информация служит основой для приближенного построения соответствующего оператора.

Если в качестве оператора, описывающего электрическую цепь, принята ее электрическая принципиальная схема, то задачей идентификации может служить определение параметров схемы. Подобная же задача возникает при диагностике цепи, то есть при определении неисправных элементов.

Задача идентификации электрических цепей является актуальной в связи с необходимостью контролировать их функционирование в процессе эксплуатации, который, как правило, сопровождается естественным изменением параметров цепей. В таком случае фактические значения параметров определяются путем обработки экспериментальных данных, полученных при непосредственном измерении токов или напряжений в точках контроля, количество которых ограничено. Кроме того, методы идентификации применяются для получения макромоделей современных сложных электрических и электронных цепей, что позволяет упростить задачи математического моделирования при проектировании устройств и создании систем управления.

Постановка задачи

Традиционный подход при решении задачи параметрической идентификации предусматривает в большинстве случаев нахождение коэффициентов дифференциального уравнения электрической цепи оптимизационными методами [1]. Учитывая актуальность научно-технической задачи идентификации, подобный подход продолжает развиваться, что нашло отображение во многих современных публикациях [2–5]. Однако возможности такого подхода к решению задачи идентификации несколько ограничены, прежде всего, при измерении входных и выходных сигналов на фоне высокочастотных помех, в том числе и шумовых. Дальше будем рассматривать методы идентификации, основанные на применении интегральных динамических моделей электрических цепей [6, 7].

Применение интегральных моделей во многих случаях позволяет получать устойчивые, по отношению к погрешностям исходных данных, алгоритмы идентификации электрических цепей [8].

Рассмотрим стационарную электрическую цепь. Пусть электрическая цепь описывается интегральным уравнением Вольтерры II рода

$$u(t)+\int_0^t K(t,s)u(s)ds = F(t), \tag{1}$$

где

$$K(t,s)=\sum_{j=1}^{m} p_j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!},\ m\in N,$$

$$F(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds+\sum_{j=1}^{m-1} C_j \frac{t^j}{j!}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1} p_j \sum_{k=0}^{m-j-1} C_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!}; \tag{2}$$

C_k – известные величины; p_j – идентифицируемые параметры; $f(t)$, $u(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы исследуемой электрической цепи.

Интегральное уравнение (1) с ядром $K(t,s)$ и свободным членом $F(t)$ вида (2), следуя [8], является эквивалентным дифференциальному уравнению вида

$$u^{(m)}(t)+p_1u^{(m-1)}(t)+\ldots+p_m u(t)=f(t),$$

$$u^{(k)}(0)=C_k,\ k=\overline{1,m-1}. \tag{3}$$

Однако при произвольных $K(t,s)$ и $F(t)$ модели вида (1) являются более общими, чем модели вида (3), поскольку они могут содержать разрывные решения [8].

Для формирования системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов p_i, $i=\overline{1,m}$, уравнение (1) с учетом (2) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \left[\int_0^i \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}u(s)ds-\sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t^{k+i}}{(k+i)!}\right]=$$

$$=\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds-u(t)+\sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t^i}{i!}. \tag{4}$$

Из (4) для точек фиксации (измерения) $t=t_j$, $j=\overline{1,N}$, где N – количество фиксаций на периоде измерений T, ($t_N=T$); $h=T/N$ – шаг измерений, получаем СЛАУ относительно искомых коэффициентов

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ji}p_i = F_j,\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,N}, \tag{5}$$

где

$$A_{ji}=\int_0^{t_j} \frac{(t_j-s)^{i-1}}{(i-1)!}u(s)ds-\sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t_j^{k+i}}{(k+i)!}, \tag{6}$$

$$F_j=\int_0^t \frac{(t_j-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds-u(t_j)+\sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t_j^i}{i!}. \tag{7}$$

Используя бином Ньютона, запишем интегралы из (6) и (7) в виде

$$B_{ji}=\int_0^j \frac{(t_j-s)^{i-1}}{(i-1)!}u(s)ds=$$

$$=\frac{1}{(i-1)!}\sum_{l=0}^{i-1} C_{i-1}^l t_j^{i-1-l}(-1)^l \int_0^{t_j} s^l u(s)ds, \tag{8}$$

$$R_j=\int_0^{t_j} \frac{(t_j-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s)ds=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k t^{m-1-k}(-1)^{k-1}\int_0^{t_j} s^k f(s)ds, \tag{9}$$

где $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Если для вычисления интегралов в (8) и (9) применить формулу трапеций, то получим приближенные расчетные выражения для B_{ji} и R_j:

$$B_{ji}\approx\frac{1}{(i-1)!}\sum_{l=0}^{i-1} C_{i-1}^l t_j^{i-j-l}(-1)^l \begin{bmatrix}(jh)^l u(jh)+\\ +2\sum_{\nu=1}^{j-1}(\nu h)^l u(\nu h)\end{bmatrix} h,$$

$$R_j\approx\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k t^{n-1-k}(-1)^k \begin{bmatrix}(jh)^k f(jh)+\\ +2\sum_{\nu=1}^{j-1}(\nu h)^k f(\nu h)\end{bmatrix} h.$$

Таким образом, элементы матрицы СЛАУ (5) и ее правой части формируются согласно выражениям:

$$A_{ji}=B_{ji}-\sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t_j^{k+i}}{(k+i)!},\ \ F_j=R_j-u(t_j)+\sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t_j^i}{i!},$$

а решение системы (5) дает искомые коэффициенты (параметры электрической цепи).

Рассмотрим нестационарную электрическую цепь. Традиционный подход при решении подобных задач состоит, как правило, в применении обычных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=0}^{r} A_i(t)u^{(r-i)}(t)=f(t),$$

где $f(t)$, $u(t)$ – по-прежнему входной и выходной сигналы соответственно; $f_i(t)$ – переменные коэффициенты.

Рассмотрим алгоритмы восстановления параметров нестационарных электрических цепей на основе интегральных уравнений с применением сумматорных операторов.

Обозначим как L_q^k пространство функций $\varphi(t)$, имеющих на промежутке $[0, T]$ абсолютно непрерывную производную порядка k–1 и q-ю степень модуля kq-производной, интегрируемой по Лебегу ($L_q^0{:=}L_q$).

Норма в этом пространстве определяется по формулам [9]

$$\|\varphi\|_q := \{\int_0^T |\varphi(t)|^q \, dt\}^{1/q} \text{ при } 1 \le q \le \infty,$$

а при $q=\infty$

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess} \sup_{0\le t\le T} |\varphi(t)|.$$

Будем полагать, что значения входного и выходного сигналов заданы так же, как и в стационарном случае.

Кроме того, будем считать, что u и f принадлежат соответственно некоторым классам функций $u\in Y\subset L_q^k, f\in F\subset L_1$.

Рассмотрим задачу восстановления параметров $\{A_i(t)\}_{i=0}^r$ нестационарной электрической цепи с предположением, что они имеют вид

$$A_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\varphi_j(t),\ \ m_i \in N,\ \ i = \overline{0,r},$$

где a_{ij} – неизвестные, подлежащие определению числа; $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^m$ ($m:=\max_{0\le i\le r} m_i$) – некоторая система линейно независимых функций

$$\varphi_j \in L_\infty^k,\ j = \overline{1,m}.$$

Во избежание решения некорректной задачи численного дифференцирования перейдем на основании эквивалентных преобразований [8] (из-за принятых предположений о гладкости функций u, f, φ_j) от исходной модели к интегральному уравнению Вольтерры вида

$$A_0(t)u(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds = F(t), \tag{10}$$

где

$$K(t,r) = \sum_{j=1}^r (-1)^{j-1} C_r^j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} A_0^{(j)}(s) +$$
$$+\sum_{k=1}^r \sum_{j=0}^{r-k-1} \frac{B_j^{(r-k)}(A_{r-k},u)}{r(j+k)!} t^{j+k} + l_r(f), \tag{11}$$

$$F(t,r) = \sum_{k=0}^r \sum_{j=0}^{r-k-1} \frac{B_j^{(r-k)}(A_{r-k},u)}{r(j+k)!} t^{j+k} + l_r(f);$$

$$B_j^{(r-k)}(A_{r-k},u) =$$
$$= \frac{r!}{j!}\sum_{v=0}^{j} C_j^v A_{r-k}^{(v)}(0) u_{j-v} \sum_{i=0}^{v} (-1)^i \frac{(j-k)!}{(r-k-v)!} C_v^i.$$

Через $l_r(f)$ обозначен r-й интеграл от входного сигнала

$$l_r(f) = \frac{1}{(r-1)!}\int_0^t (t-s)^{r-1} f(s)ds,$$

$$u_k := u^k(0),\ k = \overline{0,\ r-1}. \tag{12}$$

В связи с тем, что на практике, как правило, число измерений N и число неизвестных параметров $M := \sum_{i=0}^r m_i$ не равны, а также в связи с необходимостью эффективного вычисления интегралов в (10) и (11) рассмотрим вопрос получения нормальных систем линейных уравнений относительно $\{a_{ij}\}_{i=0,r}^{j=\overline{1,m_i}}$ на основе предварительной аппроксимации исходных данных $u(t_i)$ и $f(t_i)$, $i=\overline{1,N}$, с помощью сумматорных операторов [10].

Не ограничивая общности рассуждений и во избежание громоздкости изложений, будем считать в дальнейшем, что в (12)

$$u_k := u_k(0) = 0,\ k = \overline{0,\ r-1},$$

а функции $\{\varphi_i(t)\}$, $i=\overline{1,m}$, а также $\omega_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, такие, что интегралы вида

$$\int \tau^v \omega_k(\tau)d\tau,\ \int \tau^v \omega_k(\tau)\varphi_i^{(j)}(\tau)d\tau,\ v = 1,2,...;$$
$$k = \overline{1,\ n};\ \ j = \overline{0,\ r}$$

вычисляются точно.

Интегро-сумматорный алгоритм восстановления параметров заключается в следующем:

1) представляя с помощью сумматорного оператора U_n входной и выходной сигналы, переходим от исходного уравнения модели к следующей приближенной интегральной модели:

$$A_0(t)U_n(\tilde{u};t) + \int_0^t K(t,s)U_n(u;s)ds = l_r(U_n, f, t), \tag{13}$$

где $l_r(U_n,\tilde{f},t) = \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{r-1} U_n(\tilde{f};\tau)d\tau;$

2) дискретизируя уравнение (13) в произвольных точках, переходим к СЛАУ относительно неизвестных приближенных значений неизвестных параметров

$$\sum_{s=0}^r \sum_{\mu=0}^{m_s} a_{s\mu}\psi_{s\mu}(U_n u;\xi_i) =$$
$$= \frac{1}{(r-1)!}\int_0^{\xi} (\xi_i - t)^{r-1} U_n(f;\tau)d\tau, \tag{14}$$

где при $s=0$

$$\psi_{0\mu}(U_n\tilde{u};\xi_i) = \varphi_\mu(\xi_i)U_n(\tilde{u},\xi_i) +$$
$$+\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} C_r^j \int_0^{\xi} (\xi_i - \tau)^{j-1} \varphi_\mu^{(j)}(\tau) U_n(\tilde{u};\tau)d\tau,$$

а при $s=\overline{1,r}$

$$\psi_{s\mu}(U_n\tilde{u};\xi_i) =$$
$$= \sum_{j=0}^{r-s} C_{r-s}^j \frac{(-1)^{j-1}}{(s+j-1)!}\int_0^{\xi} (\xi_i - t)^{s+j-1} \varphi_\mu^{(j)} U_n(\tilde{u};\tau)d\tau;$$

3) решая систему (14), находим матрицу $\{\tilde{a}_{ij}\}_{i=0,\ r}^{j=\overline{1,\ m_i}}$ приближенных значений восстанавливаемых параметров.

Пример. Для подтверждения работоспособности предложенного метода и его особенностей был проведен ряд вычислительных экспериментов в программной среде MATLAB, когда по заданной электрической схеме и известным входному и выходному сигналам определяются параметры исследуемой электрической цепи. Определялась среднеквадратическая ошибка и ее зависимость от погрешностей измерения входного и выходного сигналов. В качестве рассматриваемой схемы использовалась интегрирующая *RC* цепь, дифференциальное уравнение которой, как известно, имеет вид

$$\frac{dU_{\text{вых}}}{dt}+\frac{1}{RC}U_{\text{вых}}=\frac{1}{RC}U_{\text{вх}}, \qquad (15)$$

где $\frac{1}{RC}=37.$

Из уравнения (15) путем эквивалентных преобразований получим модель в виде интегрального уравнения Вольтерры II рода

$$U_{\text{вых}}=U_{\text{вых}}(0)-\int_0^t\frac{1}{RC}(U_{\text{вых}}-U_{\text{вх}})ds. \qquad (16)$$

Для формирования системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов p_i (для исследуемой цепи $p_i=\frac{1}{RC}$, i=1) уравнение (16) запишем в виде

$$p_1(U_{\text{вых}}-U_{\text{вых}}(0))=\int_0^t(U_{\text{вх}}-U_{\text{вых}})ds. \qquad (17)$$

Дальше для точек фиксации $t=t_j$; $j=\overline{1,N}$, где N – количество фиксаций; $t_N=T$ – период измерения; $h=T/N$ – шаг измерений, получаем СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов

$$A_j p_1=F_j,$$

где

$$A_j=U_{\text{вых}}(t_j)-U_{\text{вых}}(0),$$

$$F_j=\int_0^t(U_{\text{вх}}(t_j)-U_{\text{вых}}(t_j))ds. \qquad (18)$$

Используя выражения (16)–(18) и квадратурную формулу трапеций для аппроксимации интегралов из выражения (18), получаем СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов, причем система является несовместной. Применяя для ее решения метод наименьших квадратов, получаем значение искомых коэффициентов – p_1=37,0671.

Сравнивая решения уравнения (15) соответственно при точном значении коэффициента p_1=37 и при полученном его значении в результате расчета p_1=37,0671, получаем среднеквадратическую ошибку $\Delta=1{,}2397\cdot10^{-4}$. Также было рассчитано значение p_1=37,2927 на основе подхода, базирующегося на использовании дифференциальных уравнений. Значение среднеквадратической ошибки в этом случае составило $\Delta=1{,}027\cdot10^{-3}$.

Был также исследован случай, когда к выходному сигналу добавлялась случайная помеха, распределенная по нормальному закону. В этом случае рассчитанные по интегральному методу значения коэффициентов p_1 позволяли получить значение среднеквадратической ошибки ниже, чем при использовании дифференциальных уравнений (соответственно $\Delta=1{,}2469\cdot10^{-4}$ против $\Delta=0{,}0276$ при величине среднеквадратического отклонения помехи 0,1 %). При возрастании величины среднеквадратического отклонения помехи точность интегрального метода увеличивалась. В случае, когда выходной сигнал измерялся с аддитивной низкочастотной гармонической помехой, значения среднеквадратических ошибок были соизмеримы. При добавлении к выходному сигналу помехи постоянного уровня меньшую среднеквадратическую ошибку обеспечивало применение дифференциальных уравнений (Δ=0,002 против Δ=0,011 при уровне помехи 1 % от величины измеряемого выходного сигнала).

Выводы. Таким образом, предложенный метод может быть эффективно использован при решении задач параметрической идентификации электрических цепей, характеризующихся наличием определенных погрешностей в исходных данных. Также метод может быть успешно использован при нахождении вида оператора объекта идентификации при структурно-параметрической идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
2. Букреев В.Г., Параев Ю.И., Шамин А.М., Чащин А.М. Алгоритм идентификации параметров электромеханического объекта на основе теории чувствительности // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 3. – С. 143–146.
3. Карташов В.Я., Сахнин Д.Ю. Структурно-параметрическая идентификация дискретных моделей объектов с запаздыванием для настройки регуляторов Смита // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 5. – С. 19–23.
4. Карташов В.Я., Новосельцева М.А. Структурно-параметрическая идентификация линейных стохастических объектов с использованием непрерывных дробей // Управление большими системами: сборник трудов. – 2008. – № 21. – С. 27–48.
5. Ефимов С.В., Замятин С.В., Гайворонский С.А. Структурно-параметрическая идентификация объекта управления на основе характеристик переходного процесса // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 5. – С. 107–112.
6. Верлань А.Ф. Метод интегральных уравнений в задаче описания и расчета электрических цепей // Электронное моделирование. – 1983. – № 5. – С. 8–12.
7. Верлань А.Ф., Сытник А.А., Ключка К.Н. Интегральные уравнения анализа нестационарных электрических систем // Вестник Национального университета «Львовская политехника». – 2009. – № 637. – С. 12–18.
8. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наукова думка, 1988. – 542 с.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.
10. Верлань А.Ф., Москалюк С.С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. – К.: Наукова думка, 1988. – 288 с.

Поступила 24.02.2013 г.