УДК 517

# ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ ДРОБНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

*Вводится дискретный d-оператор дробного интегродифференцирования комплексных порядков. Рассматривается алгоритм дискретного дифференцирования и дискретного интегрирования функций дискретной переменной.*

***Ключевые слова:***
*d-оператор дискретной переменной, дискретная производная, дискретный интеграл.*
***Key words:***
*d-operator of discrete variable, discrete derivative, discrete integral.*

Как известно, такие аналитические операции, как дифференцирование и интегрирование, применяют к функциям, которые обладают рядом необходимых свойств. Например, дифференцируемая функции в точке должна быть непрерывной в данной точке, а интегрируемая функции (по Риману) на отрезке должна быть кусочно непрерывной на данном отрезке [1].

Формально операции дифференцирования и интегрирования (интегродифференцирования) можно определить и для последовательностей – функций $f(n)$ дискретной переменной $n$, пробегающей ряд натуральных чисел. Особенностью этих операций является то, что они должны определяться на нигде не плотном множестве. Эти операции назовём *дискретной производной* и *дискретным интегралом* порядка $s$, и будем обозначать

$$d^{-s}n : f(n) \equiv \frac{d^s}{dn^s} f(n) \equiv \left(\frac{d}{dn}\right)^s f(n);$$

$$d^s n : f(n) \equiv \int f(n) d^s n,$$

где символами $d^{-s}n$ и $d^s n$ обозначены, соответственно, операторы дифференцирования и интегрирования порядка $s$, по дискретной переменной $n$.

Прежде чем определить данные операции, сформулируем условия, которым они должны удовлетворять.

Потребуем, чтобы функции дискретной переменной $f(n)$ переходили в функции непрерывной переменной $f(x)$, а операторы дискретного дифференцирования $d^{-s}n$ и дискретного интегрирования $d^s n$ переходили в соответствующие непрерывные операторы дифференцирования $d^{-s}n$ и интегрирования $d^s n$, при замене дискретной переменной $n$ непрерывной переменной $x$. Такой переход назовём *прямым переходом*, а переход при замене непрерывной переменной на дискретную в функциях и операторах – *обратным переходом*. Прямой и обратный переходы должны всегда выполняться и приводить к однозначным результатам для всех значений $n$ из области определения функции $f(n)$. Порядок интегродифференцирования $s$ является комплексным и не меняется при прямом и обратном переходах

$$f(n) \xleftrightarrow{n \leftrightarrow x} f(x) \;\Leftrightarrow\; f(n) = f(x)\big|_{n=x};$$

$$d^{\pm s} n \xleftrightarrow{n \leftrightarrow x} d^{\pm s} x \;\Leftrightarrow\; d^{\pm s} n = d^{\pm s} x\big|_{n=x}. \qquad (1)$$

Из этого следует выполнение равенств, для производных и интегралов при тех же преобразованиях

$$d^{\pm s} n : f(n) \xleftrightarrow{n \leftrightarrow x} d^{\pm s} x : f(x) \Leftrightarrow d^{\pm s} n : f(n) = \\ = d^{\pm s} x : f(x)\big|_{n=x}.$$

Дополнительно потребуем, чтобы при переходе функций дискретной переменной к функциям непрерывной переменной, от которых берётся производная и/или интеграл порядка 1, результат совпадал с аналогичным результатом, если эту функцию продифференцировать и/или проинтегрировать в стандартном анализе. Выполнение этого условия является следствием *принципа соответствия*.

В данной работе введём дискретную производную и дискретный неопределённый интеграл на основе локального $d$-оператора дробного интегродифференцирования. Этот оператор носит алгебраический характер, что и позволяет применить его к функциям дискретной переменной. В данном случае переопределим $d$-оператор как оператор дискретной переменной $n$, действующий в *пространстве степенных функций дискретной переменной* $n^q$. Это сужает возможности ранее введённого $d$-оператора [2, 3].

В рассматриваемом $d$-операторе порядки интегродифференцирования и показатели степенных функций, на которые действует $d$-оператор, являются комплексными числами, что в данном случае расширяет область применения $d$-оператора.

**Определение**. *Дискретным d-оператором*, или оператором *дробного дифференцирования и дробного интегрирования дискретной переменной* $n \in \mathbb{Z}$ комплексного порядка $s = \chi + i\gamma$, $\chi, \gamma \in \mathbb{R}$; $\chi, \gamma = \text{const}$; $\chi, \gamma \geq 0$, действующим в пространстве степенных функций дискретной переменной $n$ с комплексными показателями $q = \mu + i\nu$; $\mu, \nu \in \mathbb{R}$; $\mu, \nu = \text{const}$, будем называть равенства

$$\begin{cases} d^{-s}n:n^{q}=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}n^{q-s};\, q\neq -1,-2,-3,...; \\ d^{s}n:n^{q}=\dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}n^{q+s}+C_{s}(n); \\ \quad \begin{cases} q\neq -1,-2,-3,...;\, s\notin \mathbb{N}; \\ q=-1,-2,-3,...;\, s\in \mathbb{N};\, s<|q|; \end{cases} \\ d^{-s}n:n^{-m}=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s-m+1)}n^{-m-s}; \\ \quad m\in \mathbb{N};\, s\neq 0,1,2,3,...; \\ d^{s}n:n^{-m}=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s-m+1)}n^{-m+s}+C_{s}(n); \\ \quad m\in \mathbb{N};\, s\neq 0,1,2,3,...; \\ d^{1}n:n^{-1}=\ln|n|+C_{1};\, C_{1}=\mathrm{const}. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим частные случаи возможных порядков интегродифференцирования.

Когда порядок $s=\chi=\gamma=0$, это единичный оператор, переводящий функции самих в себя.

Когда порядок интегродифференцирования вещественный, $s=\mathrm{Re}(s)=\chi>0$, а в равенствах (2) перед показателем порядка оператора $s$ стоит знак минус, это будет соответствовать оператору *дробного дифференцирования вещественного порядка* $\chi$, а если значение порядка оператора со знаком плюс, то это будет оператор *дробного интегрирования вещественного порядка* $\chi$.

Когда порядок интегродифференцирования мнимый, $s=i\mathrm{Im}(s)=i\gamma$; $\gamma>0$, и если в равенствах (2) перед показателем порядка оператора $s$, стоит знак минус, то это будет *оператор дробного дифференцирования мнимого порядка* $\chi$, а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это оператор *дробного интегрирования мнимого порядка* $\chi$.

Если порядок интегродифференцирования комплексный, $s=\chi+i\gamma$; $\chi,\gamma>0$, а знак у порядка отрицательный, то это будет *дробное дифференцирование комплексного порядка*, а если знак положительный, то это соответствует *дробному интегрированию комплексного порядка*.

Если знаки у вещественной и мнимой части порядка интегродифференцирования различаются, т. е. $s=-\chi+i\gamma$ или $s=\chi-i\gamma$, то такие порядки будем называть *смешанными комплексными порядками*. В этом случае нельзя говорить только о дифференцировании или только об интегрировании. Если в операторе у смешанного порядка перед вещественной частью стоит знак минус, то формально будем говорить, что это оператор *смешанного дифференцирования комплексного порядка s*, а если знак плюс, то это оператор *смешанного интегрирования комплексного порядка s*.

*Первое* равенство в операторе (2) определяет дробное дифференцирование порядка $s$. Дополнительные условия исключают случаи дифференцирования в полюсах гамма-функции Г(...) в числителе коэффициента оператора. Полюса у гамма-функции имеются для целочисленных вещественных порядков $s=\mathrm{Re}(s)=\chi=0,-1,-2,-3,...$

*Второе* равенство определяет дробное интегрирование порядка $s\geq 0$, когда значение гамма-функция в числителе не попадает в полюс. Первые дополнительные условия в данном равенстве исключают случаи интегрирования в полюсах. Вторые дополнительные условия исключают интегрирование в логарифмических случаях.

*Третье* и *четвёртое* равенства определяют дифференцирование и интегрирование в полюсах, когда показатели степени степенных функций вещественные и имеют отрицательные целочисленные значения.

*Пятое* равенство определяет интегрирование в логарифмическом случае, которое соответствует такому случаю в стандартном анализе.

Все указанные дополнительные условия в операторе, налагаемые на $d$-оператор, лежат в вещественной области.

Далее $C_s(n)$ и $C_1$ – полиномы интегрирования порядков $s$ и 1 соответственно, которые являются обобщениями констант интегрирования стандартного анализа. Производная порядка $s$ от полинома интегрирования порядка $s$ равна нулю.

При дискретном дифференцировании порядка $s$ полиномов интегрирования порядка $s$ получим ноль

$$d^{-s}n:C_{s}(n)=0.$$

Полиномы интегрирования дискретного аргумента определяются как в случае одномерного дробного анализа [2, 3]

$$C_{s}(n)=$$

$$=\begin{cases} C_{0}(n)=0;\, s=0; \\ C_{\alpha}(n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{k}n^{-k+\alpha};\;\; s=\alpha; \\ \quad \alpha=\chi+i\gamma \wedge s=\pm\chi\mp i\gamma; \\ \quad a_{k}\in\mathbb{C};\, a_{k}=\mathrm{const};\, |\alpha|>0;\, \alpha\neq 1,2,3,...; \\ C_{m}(n)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}a_{k}n^{k};\, a_{k}=\mathrm{const};\;\; s=m;\;\; m\in\mathbb{N}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь неопределённые коэффициенты $a_k$ являются константами интегрирования, которых будет $k$ в случае целочисленных порядков и бесконечное счётное множество для нецелочисленных порядков.

При дискретном интегрировании порядка $s$, по дискретной переменной $n$, функции дискретной переменной $f(n)$ получим

$$d^{s}n:f(n)=F^{(s)}(n)+C_{s}(n)\equiv f^{(-s)}(n)+C_{s}(n).$$

Здесь $F^{(s)}(n)\equiv F^{(-s)}(n)$ – *базовая первообразная* порядка $s$ функции $f(n)$, т. е. такая первообразная, у которой полином интегрирования равен нулю [4] и $C_s(n)$ – полином интегрирования порядка $s$.

При прямом переходе, $n\to x$, дискретный оператор (2) и полином интегрирования (3) переходят в непрерывный $d$-оператор и полином интегрирования, зависящие от непрерывной переменной. Порядки дифференцирования и интегрирования в этом операторе в общем случае являются комплексными. Действует такой оператор на степенные функции $x^q$, показатели степени $q$ у которых в общем случае тоже комплексные.

Дискретный $d$-оператор является линейным

$$d^{\pm s}n:(\eta f(n)+\lambda g(n))=\eta d^{\pm s}n:f(n)+\lambda d^{\pm s}n:g(n).$$

Здесь $f(n)$, $g(n)$ – функции дискретной переменной; $\eta,\lambda\in\mathbb{C}$; $\eta,\lambda$=const.

Для непрерывного $d$-оператора справедлив принцип соответствия [5], из которого следует, что он выполняется и для дискретного $d$-оператора ввиду того, что дискретный $d$-оператор является частным случаем непрерывного $d$-оператора.

Нахождение дискретной производной и дискретного интеграла от функций дискретной переменной, которые можно представить в виде суперпозиции степенных функций от дискретной переменной, производится, используя оператор (2).

В силу преобразований (1) возможен и более сложный, но более универсальный, алгоритм нахождения дискретной производной и дискретного интеграла от функции дискретной переменной, который заключается в последовательности действий:

1) замена в функции дискретной переменной самой дискретной переменной на непрерывную и получение функции непрерывной переменной (прямой переход);
2) представление функции непрерывной переменной в виде конечной линейной комбинации степенных функций или в виде степенного ряда;
3) интегродифференцирование полученной функции непрерывным $d$-оператором;
4) обратный переход, т. е. замена в производной (первообразной) функции непрерывной переменной на функции дискретной переменной.

Второй способ интегродифференцирования необходимо использовать, когда функция дискретного аргумента не представлена в виде суперпозиции степенных функций дискретного аргумента.

Производную дискретной переменной, можно интерпретировать как скорость изменения последовательности при изменении дискретного аргумента.

Рассмотрим пример дифференцирования комплексного порядка $\beta=a+ib$; $a$, $b\in\mathbb{R}$; $a$, $b$=const ряда арифметической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}n$. Непосредственное дифференцирование даёт

$$d^{-\beta}n:\sum_{n=1}^{\infty}n=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\beta+1)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\beta}=\frac{1}{\Gamma(1+s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}.$$

Здесь $1-\beta=1-a-ib=-s$.

Если $\mathrm{Re}(s)=a-1>1$, то полученную производную можно выразить через дзета-функцию Римана $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ [6]

$$d^{-\alpha}n:\sum_{n=1}^{\infty}n=\frac{1}{\Gamma(1+s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\frac{1}{\Gamma(1+s)}\zeta(s).$$

Пример интегрирования комплексного порядка $\rho=a+ib$ гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}$

$$d^{\rho}n:\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}+C_{\rho}(n)=$$
$$=\frac{(-1)^0}{0!}\frac{1}{\Gamma(-1+\rho+1)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\rho-1}+C_{\rho}(n)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-s)}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}+C_{\rho}(n).$$

Здесь $\rho-1=-s=a-1+ib$.

Если $\mathrm{Re}(s)=a-1>1$, то полученный неопределённый интеграл можно выразить через дзета-функцию Римана

$$d^{\rho}n:\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}+C_{\rho}(n)=\frac{1}{\Gamma(1-s)}\zeta(s)+C_{\rho}(n).$$

Последовательности играют важную роль для строгого определения пределов в анализе. Дискретный $d$-оператор позволяет использовать дифференцирование и интегрирование для более глубокого изучения самих последовательностей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс / под ред. А.Н. Тихонова. 2-е изд., перераб. – М.: МГУ, 1985. – 662 с.
2. Чуриков В.А. Локальный $d$-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.
3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.
4. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе $d$-оператора. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.
5. Чуриков В.А. Доказательство принципа соответствия в дробном анализе на основе $d$-оператора // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Междунар. конф. молодых ученых. – Нальчик, 5–8 декабря, 2011. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2011. – С. 237–239.
6. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. – М.: Физматлит, 1994. – 376 с.


*Поступила 16.07.2012 г.*