УДК 519.872

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОТОКОВ ПОКУПАТЕЛЕЙ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТОРГОВОЙ КОМПАНИИ В ВИДЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОВТОРНЫМИ ОБРАЩЕНИЯМИ К БЛОКАМ

Л.А. Жидкова, С.П. Моисеева

Томский государственный университет
E-mail: zhidkovala@mail.ru; smoiseeva@mail.ru

Построена математическая модель формирования потока покупателей торговой компании в виде системы параллельного обслуживания кратных заявок с повторным обращением и неограниченным числом обслуживающих приборов, получено выражение для математического ожидания капитала торговой компании, а также найдено условие для существования максимума этой функции. Для конкретного примера определено оптимальное отношение стоимости подарка к средней стоимости покупки, обеспечивающее максимальную прибыль компании.

Ключевые слова:
Немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, пуассоновский поток кратных заявок, повторное обслуживание заявок.

Key words:
Non-Markov system with an unlimited number of servers, Poisson process of multiple orders, repeated service of orders.

Введение

В настоящее время большинство торговых компаний столкнулось с падением спроса и замедлением темпов сбыта товаров. Особенно явно эта тенденция начала проявляться с 2008 г., одновременно с переориентацией конечных потребителей на экономию и рост сбережений.

Западные компании успешно используют методы уменьшения товарных запасов, увеличения их оборачиваемости, оптимизации заказа товаров, изучения потребностей покупателей, широко применяют информационные технологии (сканирование, внутрифирменные сети и др.). Использование подобного инструментария позволяет существенно повышать эффективность торговых компаний, снижать уровень розничных цен, издержек и торговой наценки.

В результате усложнения экономических процессов и возрастания конкуренции в торговой отрасли проблема разработки и внедрения научно-обоснованных методов принятия решений для управления торговыми компаниями является весьма актуальной. Особую актуальность представляет исследование процесса принятия решений в сложноорганизованных торговых компаниях. В 1970–80 гг. был накоплен значительный научный и практический потенциал моделирования торгово-экономических процессов. Отечественная экономико-математическая школа внесла значительный вклад в мировую науку. Можно отметить работы по математическому моделированию деятельности торговых компаний [1].

Практически каждый вид коммерческой деятельности содержит в качестве своего элемента совокупность распределенных во времени деловых сделок. Это заставляет уделять должное внимание математическому описанию потоков коммерческих сделок, характер и свойства которых определяются содержанием коммерческих операций [2–4]. В моделях массового обслуживания последовательность сделок рассматривается как случайный поток событий, что позволяет применить к ее описанию методов теории случайных процессов [5, 6].

Для привлечения клиентов торговые компании используют различные методы стимулирования сбыта продукции. К ним относятся различные акции, распродажи, предоставление клиентам различных видов скидок и другие. В настоящей работе предлагается рассмотреть процесс влияния маркетинговой программы («Подарок за покупку») на прибыль торговой компании.

Постановка задачи

Рассмотрим торговую компанию (магазин), в которой продаются две группы товаров (продовольственные и непродовольственные). Будем считать, что каждый покупатель при первом посещении приобретает товары обоих типов. После совершения покупки клиент в течение некоторого случайного времени не нуждается в товарах того или иного типа, а при необходимости выбирает возвратиться ему в ту же торговую компанию или выбрать другую. Число клиентов, обращающихся в магазин практически неограниченно. Кроме этого, предоставляемые компанией подарки при совершении покупки обеспечивают возможное повторное обращение клиента в эту компанию (магазин). Для таких компаний определяющее значение имеет процесс изменения числа клиентов с учетом повторных обращений [7, 8].

Поток клиентов, впервые обращающихся в торговую компанию, будем считать простейшим потоком с параметром λ [9], интервалы времени между потребностями посещения магазина являются независимыми случайными величинами с экспоненциальной функцией распределения с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно для каждого блока. Клиент при возникновении новой потребности приобрести товар с вероятностью r_k обращается в ту же торговую компанию, а с вероятностью $1-r_k$ выбирает другую, k=1,2 – номер блока. Очевидно, что вероятность возвращения клиента в компанию зависит от маркетинговой политики.

Ставится задача определения условий проведения акции для обеспечения наибольшей прибыли рассматриваемой торговой компании.

Математическая модель

В качестве математической модели поставленной задачи будем рассматривать систему массового обслуживания с двумя блоками обслуживания и повторным обращением (рис. 1). Данная система массового обслуживания (СМО) состоит из двух блоков обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число обслуживающих устройств. На вход системы поступает простейший с параметром λ поток сдвоенных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки [10–12].

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая во второй блоки обслуживания и занимает любое из свободных устройств, на котором выполняется ее обслуживание в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно [13]. Закончив обслуживание, заявка k-го блока с вероятностью $1-r_k$ покидает систему, а с вероятностью r_k возвращается обратно на прибор для повторного обслуживания.

Обозначим $i_k(t)$ число занятых приборов в k-м блоке обслуживания в момент времени t; $m_k(t)$ – суммарное число заявок, обратившихся k-му блоку за время t, как из внешнего источника, так и для повторного обслуживания.

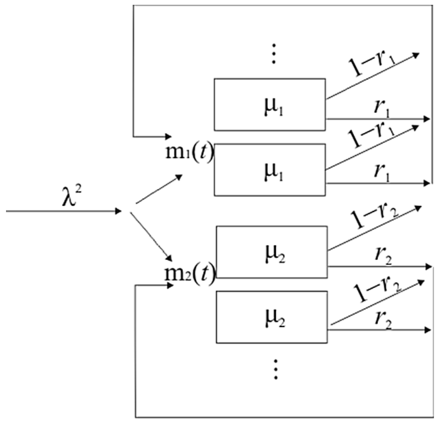

Рис. 1. *СМО с параллельным обслуживанием сдвоенных заявок и повторными обращениями к блокам*

Полученный четырехмерный случайный процесс $\{i_1(t),i_2(t),m_1(t),m_2(t)\}$ является марковским [14, 15]. Определим для данного процесса вероятности $P(i_1,i_2,m_1,m_2,t)=P\{i_1(t)=i_1,i_2(t)=i_2,\ m_1(t)=m_1,m_2(t)=m_2\}$, тогда система дифференциальных уравнений Колмогорова [5] имеет вид:

$$\frac{\partial P(i_1,i_2,m_1,m_2,t)}{\partial t}=$$
$$=-(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2)P(i_1,i_2,m_1,m_2,t)+$$
$$+i_1\mu_1 r_1 P(i_1,i_2,m_1-1,m_2,t)+$$
$$+(i_2+1)\mu_2(1-r_2)P(i_1,i_2+1,m_1,m_2,t)+$$
$$+i_2\mu_2 r_2 P(i_1,i_2,m_1,m_2-1,t)+\mu_1(i_1+1)(1-r_1)\times$$
$$\times P(i_1+1,i_2,m_1,m_2,t)+$$
$$+\lambda P(i_1-1,i_2-1,m_1-1,m_2-1,t). \quad (1)$$

Определим производящую функцию четырехмерного распределения $P(i_1,i_2,m_1,m_2,t)$ в виде [9, 16]:

$$F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)=$$
$$=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}x_1^{i_1}x_2^{i_2}y_1^{m_1}y_2^{m_2}P(i_1,i_2,m_1,m_2,t).$$

Из системы дифференциальных уравнений Колмогорова (1) получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции $F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)$:

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_1}\times$$
$$\times(\mu_1 x_1(1-r_1 y_1)-\mu_1(1-r_1))+\frac{\partial F(x_1,x_2,y_1,y_2,t)}{\partial x_2}\times$$
$$\times(\mu_2 x_2(1-r_2 y_2)-\mu_2(1-r_2))=$$
$$=\lambda(x_1x_2y_1y_2-1)F(x_1,x_2,y_1,y_2,t).$$

Решая данное уравнение, находим производящую функцию числа занятых приборов и суммарного числа заявок в блоках, из которой получаем вид производящей функции суммарного числа обращений в рассматриваемой системе:

$$F(y_1,y_2,t)=$$
$$=\exp\left\{\lambda\left(\begin{array}{l}\dfrac{r_1r_2(y_1-1)(y_2-1)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}+\\ +\dfrac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+\dfrac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}\end{array}\right)y_1y_2t+\right.$$
$$+\lambda\frac{r_1r_2(1-y_1)(1-y_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}\frac{(1-\mathrm{e}^{-[\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2)]t})}{(\mu_1(1-r_1y_1)+\mu_2(1-r_2y_2))}-$$
$$-\lambda\frac{r_1(1-y_1)}{(1-r_1y_1)}\frac{(1-e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})}{\mu_1(1-r_1y_1)}\left(\frac{r_2(y_2-1)}{1-r_2y_2}+y_1y_2\right)+$$
$$+\lambda(y_1y_2-1)t-\frac{\lambda\left(\begin{array}{l}\dfrac{r_1r_2(1-y_1)(1-y_2)}{(1-r_1y_1)(1-r_2y_2)}\times\\ \times(1+e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})(1+e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})\end{array}\right)}{\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2)}-$$
$$-\frac{\lambda\left(\dfrac{r_1(1-y_1)}{(1-r_1y_1)}(1+e^{-\mu_1(1-r_1y_1)t})\right)}{\mu_1(1-r_1)}-$$
$$-\frac{\lambda\left(\dfrac{r_2(1-y_2)}{(1-r_2y_2)}(1+e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})\right)}{\mu_2(1-r_2)}-$$
$$\left.-\lambda\frac{r_2(1-y_2)}{(1-r_2y_2)}\frac{(1-e^{-\mu_2(1-r_2y_2)t})}{\mu_2(1-r_2y_2)}\left(\frac{r_1(y_1-1)}{1-r_1y_1}+y_1y_2\right)\right\}. \qquad (2)$$

Определение основных характеристик дохода компании

Пусть компания при каждом первичном обращении и совершении покупки первого типа получает доход в размере значения случайной величины ξ_1 с функцией распределения $A_1(x)$, $M\xi=a_1$, а при совершении покупки второго типа получает доход в размере значения случайной величины ξ_2 с функцией распределения $A_2(x)$, $M\xi=a_2$, при повторном обращении ее доход составляет долю δ_i от величины ξ_i. Здесь $1-\delta_i$ – отношение стоимости подарка к средней стоимости покупки в каждом блоке.

Рассмотрим функцию $H(\alpha,t)=Me^{-\alpha S(t)}$, здесь $S(t)$ – суммарный доход, полученный компанией за время t, очевидно,

$$S(t)=\sum_{k=1}^{m_1(t)}\xi_1\delta_1+\sum_{l=1}^{m_2(t)}\xi_2\delta_2,$$

тогда

$$H(\alpha,t)=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}(Me^{-\alpha\xi_1\delta_1})^{m_1}\times(Me^{-\alpha\xi_2\delta_2})^{m_2}P(m_1,m_2,t).$$

Обозначив

$$Me^{\alpha\xi_1\delta_1}=\varphi_1(\delta_1\alpha) \text{ и } Me^{\alpha\xi_2\delta_2}=\varphi_2(\delta_2\alpha)$$

получаем

$$H(\alpha,t)=M\{\varphi_2(\delta_1\alpha)^{m_1(t)}\varphi_2(\delta_2\alpha)^{m_2(t)}\}.$$

Учитывая (2), имеем:

$$H(\alpha,t)=F(\varphi_1(\delta_1\alpha),\varphi_2(\delta_2\alpha),t)=$$
$$=\exp\left\{\lambda\left(\begin{array}{l}\dfrac{r_1r_2(\varphi_1(\delta_1\alpha)-1)(\varphi_2(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi_1(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi_2(\delta_2\alpha))}+\\ +\dfrac{r_1(\varphi_1(\delta_1\alpha)-1)}{1-r_1\varphi_1(\delta_1\alpha)}+\dfrac{r_2(\varphi_2(\delta_2\alpha)-1)}{1-r_2\varphi_2(\delta_2\alpha)}\end{array}\right)\times\right.$$
$$\times\varphi_1(\delta_1\alpha)\varphi_2(\delta_2\alpha)t+$$
$$+\lambda\frac{\left[\begin{array}{l}r_1r_2(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-\varphi(\delta_2\alpha))\times\\ \times(1-\exp^{-[\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))]t})\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l}(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))\times\\ \times(\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))+\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha)))\end{array}\right]}+$$
$$+\lambda\frac{\left[\begin{array}{l}r_1r_2(\varphi(\delta_1\alpha)-1)(\varphi(\delta_2\alpha)-1)\times\\ \times(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l}(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))\times\\ \times(\mu_1(1-r_1)+\mu_2(1-r_2))\end{array}\right]}+$$
$$+\lambda\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1-e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))^2}\times$$
$$\times\left(\frac{r_2(\varphi(\delta_2\alpha)-1)}{(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+$$
$$+\lambda\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1-e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))^2}\times$$
$$\times\left(\frac{r_1(\varphi(\delta_1\alpha)-1)}{(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}+\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)\right)+$$
$$+\lambda\frac{r_1(1-\varphi(\delta_1\alpha))(1+e^{-\mu_1(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))t})}{\mu_1(1-r_1)(1-r_1\varphi(\delta_1\alpha))}+$$
$$+\lambda\frac{r_2(1-\varphi(\delta_2\alpha))(1+e^{-\mu_2(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))t})}{\mu_2(1-r_2)(1-r_2\varphi(\delta_2\alpha))}+$$
$$\left.+\lambda(\varphi(\delta_1\alpha)\varphi(\delta_2\alpha)-1)t\right\}. \qquad (3)$$

Дифференцируя (3) по α и учитывая условия $\varphi_1(0)=1$, $\varphi'_1(0)=a_1$, $\varphi_2(0)=1$, $\varphi'_2(0)=a_2$, имеем:

$$\left.\frac{\partial H(\alpha,t)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}=\lambda t\left(\frac{r_1\delta_1a_1}{1-r_1}+\frac{r_2\delta_2a_2}{1-r_2}+a_1\delta_1+a_2\delta_2\right).$$

Откуда получаем выражение для математического ожидания капитала торговой компании

$$MS(t)=\lambda t\left(a_1\delta_1\left(\frac{r_1}{1-r_1}+1\right)+a_2\delta_2\left(\frac{r_2}{1-r_2}+1\right)\right). \qquad (4)$$

Исследование влияния наличия маркетинговой программы (предоставление подарка) на капитал торговой компании

Определим оптимальную стоимость подарка для получения максимальной прибыли.

Очевидно, вероятность возвращения в магазин зависит от предоставляемых премий, т. е. $r_1=r_1(\delta_1)$ и $r_2=r_2(\delta_2)$. Тогда для определения оптимальной стоимости подарка необходимо найти максимальное значение функции (4).

Таблица. *Изменение капитала торговой компании при разной стоимости подарков*

δ1\δ2	**0,9**	**0,91**	**0,92**	**0,93**	**0,94**	**0,95**	**0,96**	**0,97**
0,84	4921,12	4925,80	4928,65	4929,39	4927,62	4922,79	4914,04	4899,95
0,85	4929,81	4934,49	4937,34	4938,08	4936,31	4931,47	4922,73	4908,63
0,86	4937,74	4942,42	4945,27	4946,01	4944,24	4939,41	4930,66	4916,57
0,87	4944,85	4949,53	4952,38	4953,11	4951,34	4946,51	4937,76	4923,67
0,88	4951,03	4955,71	4958,56	4959,29	4957,52	4952,69	4943,94	4929,85
0,89	4956,17	4960,85	4963,70	4964,44	4962,67	4957,83	4949,08	4934,99
0,9	4960,13	4964,81	4967,67	4968,40	4966,63	4961,80	4953,05	4938,96
0,91	4962,74	4967,42	4970,27	4971,01	4969,24	4964,41	4955,66	4941,56
0,92	4963,75	4968,43	4971,28	4972,02	4970,25	4965,42	4956,67	4942,58
0,93	4962,86	4967,54	4970,39	4971,12	4969,35	4964,52	4955,77	4941,68
0,94	4959,61	4964,29	4967,14	4967,87	4966,10	4961,27	4952,52	4938,43
0,95	4953,34	4958,02	4960,87	4961,61	4959,84	4955,01	4946,26	4932,17
0,96	4943,04	4947,72	4950,57	4951,30	4949,53	4944,70	4935,95	4921,86
0,97	4926,87	4931,55	4934,40	4935,13	4933,36	4928,53	4919,78	4905,69
0,98	4901,09	4905,77	4908,62	4909,36	4907,59	4902,75	4894,01	4879,91
0,99	4855,13	4859,82	4862,67	4863,40	4861,63	4856,80	4848,05	4833,96
1	4540,42	4545,10	4547,95	4548,68	4546,92	4542,08	4533,33	4519,24

Рассмотрим функцию:

$$f(\delta_1,\delta_2)=a_1\delta_1+a_2\delta_2+\frac{a_1\delta_1 r_1(\delta_1)}{1-r_1(\delta_1)}+\frac{a_2\delta_2 r_2(\delta_2)}{1-r_2(\delta_2)}.$$

Используя необходимое условие экстремума, получаем систему дифференциальных уравнений для нахождения δ_1 и δ_2

$$\begin{cases} r_1'(\delta_1)=\dfrac{r_1(\delta_1)-1}{\delta_1}; \\ r_2'(\delta_2)=\dfrac{r_2(\delta_2)-1}{\delta_2}. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим случай, когда $\delta_1\neq\delta_2$, то есть стоимость подарков в первом и втором блоках различна.

Предположим, что вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно:

$$r_1(\delta_1)=r_0^{(1)}+(r_1^{(1)}-r_0^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{n_1}},$$

$$r_2(\delta_2)=r_0^{(2)}+(r_1^{(2)}-r_0^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{n_2}}.$$

где r_0 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta=1$, r_1 – вероятность повторного обращения клиента в торговую компанию при $\delta=0$.

Учитывая (5), находим δ_1 и δ_2:

$$\begin{cases} \delta_1=\dfrac{n_1(r_1^{(1)}-1)}{r_0^{(1)}-r_1^{(1)}+n(r_1^{(1)}-r_0^{(1)})}; \\ \delta_2=\dfrac{n_2(r_1^{(2)}-1)}{r_0^{(2)}-r_1^{(2)}+n(r_1^{(2)}-r_0^{(2)})}. \end{cases}$$

Очевидно, что при $n_1=n_2=1$ критических точек нет, следовательно, функция $f(\delta_1,\delta_2)$ при $\delta_1\in(0;1)$ и $\delta_2\in(0;1)$ не достигает своего максимального значения.

При $n_1\neq 1$ и $n_2\neq 1$ функция $f(\delta_1,\delta_2)$ достигает своего максимального значения.

Пример.

Рассмотрим случай, когда вероятности возвращения клиентов в каждый блок имеют вид соответственно $n_1=2$, $n_2=5$:

$$r_1(\delta_1)=r_0^{(1)}+(r_1^{(1)}-r_0^{(1)})(1-\delta)^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2(\delta_2)=r_0^{(2)}+(r_1^{(2)}-r_0^{(2)})(1-\delta)^{\frac{1}{5}}.$$

Пусть $r_0^{(1)}=0{,}6$, $r_1^{(1)}=0{,}8$, $r_0^{(2)}=0{,}4$, $r_1^{(2)}=0{,}7$, $a_1=1200$, $a_2=800$, тогда $f(\delta_1,\delta_2)$ достигает своего максимального значения 4972,02 при $\delta_1=0{,}93$ и $\delta_2=0{,}92$ (таблица), тогда стоимость подарка в первом блоке составляет 7 % от средней стоимости покупки, а во втором – 8 %.

Поведение функции $f(\delta_1,\delta_2)$ можно увидеть на рис. 2. и в таблице изменения капитала компании при различной стоимости подарков.

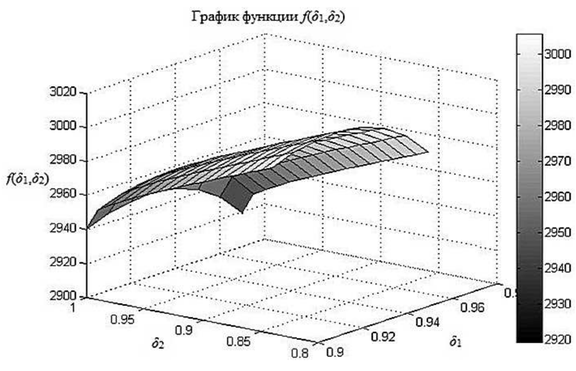

Рис. 2. *График изменения капитала торговой компании при различной стоимости подарков*

Выводы

В работе построена математическая модель торговой компании в виде системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов с повторным обращением, построена и исследована экономико-математическая модель влияния наличия стимулирования натурой на прибыль торговой компании. Проведёно исследование этих моделей методами теории случайных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калашникова Т.В., Извеков Н.Ю. Интеграция метода ориентации на спрос в систему ценообразования сети розничной торговли // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 6. – С. 9–13.
2. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.
3. Натан А.А. Стохастический модельный анализ простых коммерческих операций. – М.: МЗ Пресс, 2005. – 120 с.
4. Натан А.А. Стохастические модели в микроэкономике. – М.: МФТИ, 2001. – 172 с.
5. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2005. – 228 с.
6. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория вероятностей и случайных процессов. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 204 с.
7. Морозова А.С., Моисеева С.П., Одинцов К.М. Математическая модель процесса изменения числа клиентов торговой компании в виде СМО с неограниченным числом обслуживающих приборов // Научное творчество молодежи: Матер. XI Всеросс. научно-практ. конф. Ч. 1. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. – С. 37–39.
8. Морозова А.С., Моисеева С.П., Назаров А.А. Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 293. – С. 49–52.
9. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
10. Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследование потока повторных обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2005. – № 287. – С. 46–51.
11. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Исследование суммарного потока обращений в бесконечнолинейной СМО с повторным обслуживанием // Вестник Томского государственного университета. – 2006. – № 290. – С. 173–175.
12. Моисеева С.П., Морозова А.С., Назаров А.А. Распределение вероятностей двумерного потока обращений в бесконечнолинейной системе массового обслуживания с повторным обращением // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2006. – № 16. – С. 125–128.
13. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование систем параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – № 4 (17). – С. 49–55.
14. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. – М.: Изд-во «Наука», 1969. – 512 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. – М.: Наука, 1966. – 662 с.
16. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. – М.: Физматгиз, 1963. – 236 с.

Поступила 23.04.2013 г.

УДК 519.865

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ КАПИТАЛА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Н.С. Демин, С.В. Рожкова*, А.В. Цитко

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Получены дифференциальные уравнения, определяющие изменение во времени среднего значения и дисперсии капитала, а также точные формулы для среднего значения и дисперсии капитала.

Ключевые слова:
Финансовый рынок, капитал, портфель, ценные бумаги.
Key words:
Financial market, capital, portfolio, securities.

1. Постановка задачи

В [1] решена задача формирования портфеля ценных бумаг на основе динамического программирования, допускающая точное решение. Данная работа посвящена теоретическому исследованию свойств капитала портфеля при использовании оптимального управления, полученного в [1]. Система обозначений та же, что и в [1].

2. Основные результаты

Утверждение.

При оптимальном управлении капитал $X(t)$ определяется уравнением

$$dX(t) = \frac{1}{\sigma^2 b_2(t)}\left[\begin{array}{l} -(a-r)^2 b_1(t) + \\ +(r\sigma^2 - (a-r)^2) b_2(t) X(t) \end{array}\right] dt - $$
$$ - \frac{(a-r)}{\sigma b_2(t)} [b_1(t) + b_2(t) X(t)] dW(t), \qquad (1)$$

где

$$b_1(t) = [b_1^1 e^{(\mu-\beta)t} - b_1^2] e^{\beta t}, \qquad (2)$$

$$b_2(t) = b_2^1 e^{-(r-\beta)t} - b_2^2, \qquad (3)$$

$$\beta = \frac{(a-r)^2}{\sigma^2} - r,$$